

CHƯƠNG IV

ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA HÌNH PHẪNG

Ở chương 2, khi tính sự chịu lực của thanh chịu kéo (nén), ta nhận thấy ứng suất trong thanh chỉ phụ thuộc vào độ lớn của diện tích mặt cắt ngang. Trong những trường hợp khác, ứng suất trong thanh không chỉ phụ thuộc vào diện tích mà còn phụ thuộc vào hình dáng, cách bố trí mặt cắt... gọi chung là đặc trưng hình học của mặt cắt ngang.

1. Khái niệm về moment tĩnh:

1.1. Định nghĩa:

Xét hình phẳng biểu diễn mặt cắt ngang F. Xác lập hệ toạ độ Oxy trong mặt phẳng của mặt cắt. M(x,y) là một điểm bất kỳ trên hình. Lấy chung quanh M một vi phân diện tích dF.

Moment tĩnh của diện tích F đối với trục x và y là các tích phân:

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF$$

Trong đó: F- Diện tích của mặt cắt

dF- Phần tử diện tích

x và y- Toạ độ của phần tử đó

Vì x, y có thể âm hoặc dương nên moment tĩnh có thể có trị số âm hoặc dương. Đơn vị của moment tĩnh là m³

Trục trung tâm là trục có moment tĩnh của diện tích F đối với trục đó bằng không. Trọng tâm là giao điểm của hai trục trung tâm của mặt cắt.

Vậy, moment tĩnh đối với một trục đi qua trọng tâm bằng không.

1.2. Công thức xác định toạ độ trọng tâm:

Gọi C là trọng tâm của mặt cắt có diện tích là F. Toạ độ của trọng tâm được xác định theo công thức:

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F}$$

Nếu mặt cắt có trục đối xứng thì trọng tâm sẽ nằm trên trục này vì moment tĩnh đối với trục bằng không.

Trong thực tế, ta hay gặp những mặt cắt ngang có hình dáng phức tạp được ghép từ nhiều hình đơn giản thì *moment tĩnh của hình phức tạp bằng tổng moment tĩnh của các hình đơn giản.*

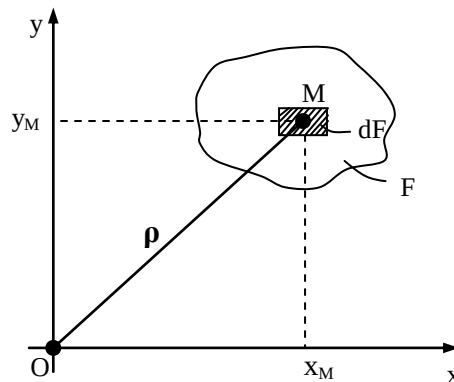
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{F}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{F}$$

Trong đó: x_i, y_i là toạ độ trọng tâm của hình đơn giản thứ i

F_i là diện tích của hình đơn giản thứ i.

- Ví dụ: Xác định trọng tâm của hình phẳng có kích thước cho trên hình vẽ.

Giải:



Ta có: $C_1 (x_1 = 1, y_1 = 2,5)$ và $F_1 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}^2$

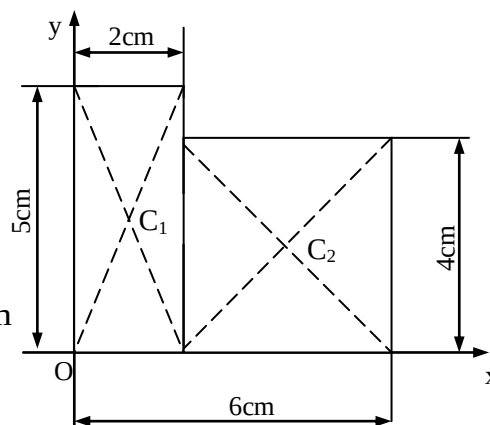
$C_2 (x_2 = 4, y_2 = 2)$ và $F_2 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$

$F = F_1 + F_2 = 26 \text{ cm}^2$

Toạ độ trọng tâm của hình phẳng là:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{F} = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{F} = \frac{10 \cdot 1 + 16 \cdot 4}{26} = 2,85 \text{ cm}$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{F} = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2}{F} = \frac{10 \cdot 2,5 + 16 \cdot 2}{26} = 2,2 \text{ cm}$$



2. Khái niệm về moment quán tính:

2.1. Định nghĩa:

Moment quán tính của mặt cắt (hay moment quán tính độc cực) đối với điểm O được định nghĩa bằng biểu thức tích phân:

$$J_o = \int_F \rho^2 dF$$

Trong đó: ρ là khoảng cách từ tâm M của phần tử diện tích dF đến gốc toạ độ O.

Nếu thay khoảng cách ρ bằng khoảng cách từ M đến trục x và y, ta sẽ có moment quán tính đối với trục x và y là:

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF$$

Moment quán tính ly tâm của mặt cắt đối với hệ trục x, y được định nghĩa bằng biểu thức tích phân:

$$J_{xy} = \int_F xy dF$$

Từ định nghĩa các moment quán tính, ta nhận thấy:

- Moment quán tính có đơn vị là m^4
- Trong khi moment quán tính đối với điểm, với trục luôn luôn dương, moment quán tính ly tâm có thể dương, âm hoặc bằng không.

Vì $\rho^2 = x^2 + y^2$ nên $J_o = J_x + J_y$

Dựa vào định nghĩa, giống như moment tĩnh, moment quán tính cũng có tính chất sau: *moment quán tính của một hình phức tạp bằng tổng moment quán tính của từng hình đơn giản.*

2.2. Hệ trục quán tính chính trung tâm (QTCTT)

Một hệ trục toạ độ có moment quán tính ly tâm đối với hệ trục đó bằng không được gọi là hệ trục quán tính chính.

Hệ trục quán tính chính đi qua trọng tâm mặt cắt được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm. Đối với hệ trục này, ta có:

$$S_x = 0; \quad S_y = 0; \quad J_{xy} = 0$$

Tính chất: Khi diện tích F có một trục đối xứng thì bất kỳ hệ trục vuông góc nào chứa trục đối xứng đều là hệ trục quán tính chính của mặt cắt.

Moment quán tính đối với trục chính trung tâm được gọi là moment quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

2.3. Công thức tính moment quán tính của một số hình cơ bản:

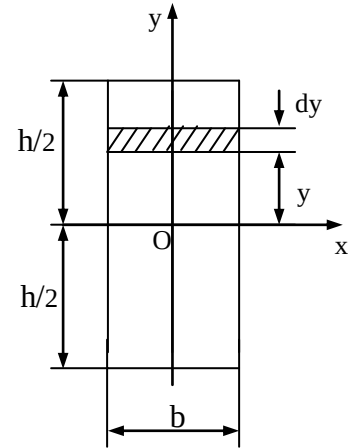
2.3.1. Hình chữ nhật:

Xác định moment quán tính chính trung tâm của hình chữ nhật có kích thước $b \times h$

Hệ có hai trục đối xứng x và y nên đồng thời là hệ QTCTT. Ta có:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_y = \int_F x^2 dF = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 h dx = \frac{hb^3}{12}$$



2.3.2. Hình tam giác:

Moment quán tính của tam giác đối với trục x đi qua đáy:

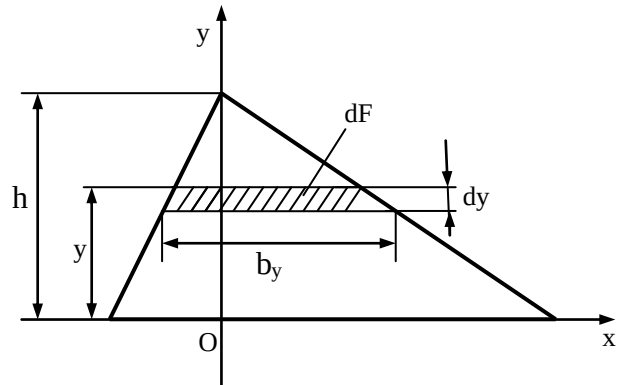
Dải vi phân diện tích dF song song với đáy, có chiều dày là dy , khoảng cách đến trục x là y và có bề rộng b_y được tính như sau:

$$b_y = \frac{b(h-y)}{h}$$

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_0^h y^2 \frac{b(h-y)}{h} dy$$

$$J_x = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy$$

$$J_x = \frac{b}{h} \left(\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}$$



2.3.3. Hình tròn - Hình vành khăn:

Moment quán tính của hình tròn: Xét vòng tròn bán kính R . Lấy phần tử diện tích dF ở dạng một vành tròn nhỏ có bán kính ρ và bề dày $d\rho$.

Ta có $dF = 2\pi\rho d\rho$

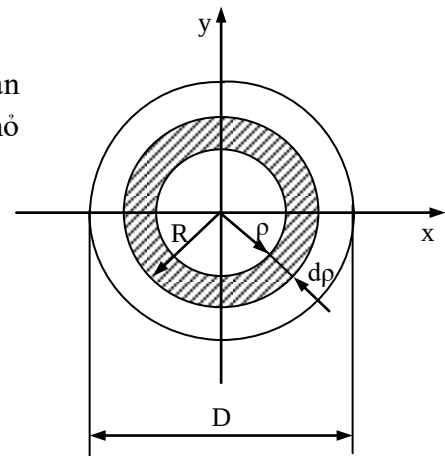
Moment quán tính độc cực của toàn bộ hình tròn:

$$J_o = \int_F \rho^2 dF = \int_0^R 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$J_o = \frac{\pi D^4}{32} = 0,1D^4$$

Do đối xứng, ta có: $J_x = J_y$

Mặt khác: $J_o = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y$



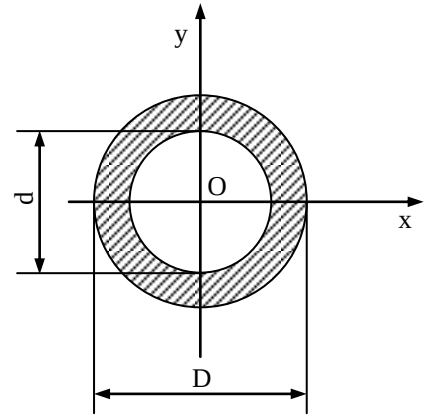
$$\text{Nên } J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4$$

Theo tính chất của moment quán tính, ta có moment quán tính của mặt cắt hình tròn rỗng hay hình vành khăn là hiệu moment quán tính của hai đường tròn đặc có đường kính D và d .

$$J_x = J_x^{(D)} - J_x^{(d)} = 0,05D^4 - 0,05d^4$$

$$\text{Vậy: } J_x = J_y = 0,05D^4(1 - \alpha^4)$$

$$\text{Với } \alpha = \frac{d}{D}$$



2.4. Công thức chuyển trục song song:

Trong trường hợp mặt cắt có hình dáng phức tạp hơn, việc tính các moment quán tính sẽ khó khăn hơn. Trong trường đó, ta phải sử dụng các công thức chuyển trục.

Xét hình phẳng F trong hệ trục tọa độ Oxy . Ta xác định moment quán tính của hình phẳng đối với hệ trục $O'XY$ song song với hệ trục đã cho. Gọi a và b là tọa độ của O trong hệ $O'XY$. Tọa độ điểm M thuộc phân tố diện tích dF của hình phẳng F trong hai hệ trục:

$$X = a + x, Y = b + y$$

Theo định nghĩa:

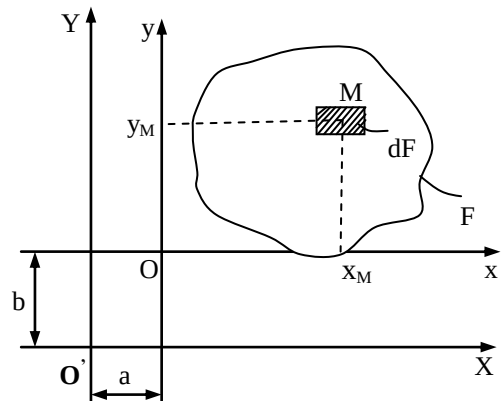
$$\begin{aligned} J_x &= \int_F Y^2 dF = \int_F (b + y)^2 dF \\ &= \int_F y^2 dF + 2b \int_F y dF + \int_F b^2 dF \\ &= J_x + 2bS_x + b^2F \end{aligned}$$

Tương tự:

$$J_Y = J_y + 2aS_y + a^2F$$

Đối với moment quán tính ly tâm:

$$\begin{aligned} J_{XY} &= \int_F XY dF = \int_F (a + x)(b + y) dF \\ &= \int_F xy dF + b \int_F x dF + a \int_F y dF + ab \int_F dF \\ &= J_{xy} + bS_y + aS_x + abF \end{aligned}$$



Nếu Oxy là hệ trục trung tâm của hình F thì các công thức trên có dạng:

$$J_X = J_x + b^2F; J_Y = J_y + a^2F; J_{XY} = J_{xy} + abF$$