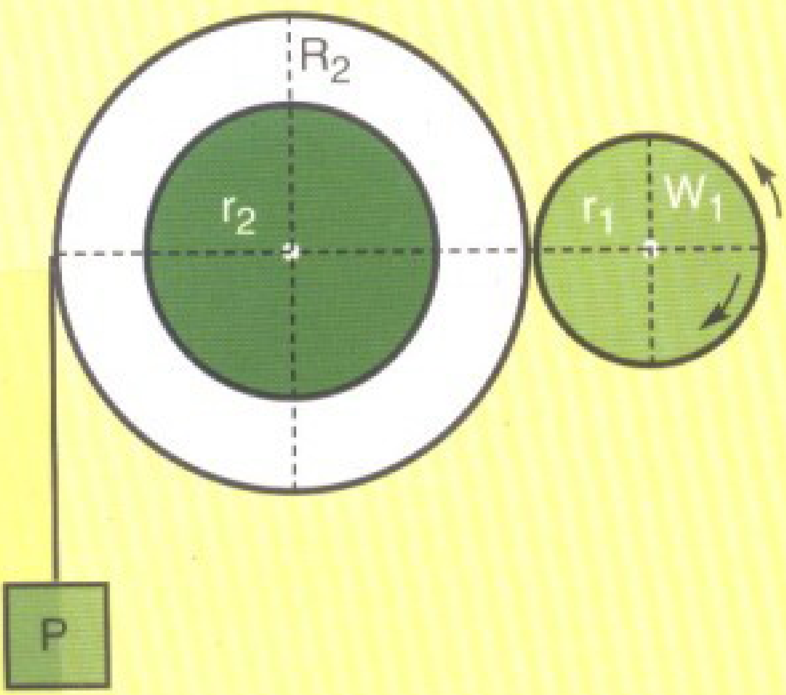
CĐ

ĐỖ SANH (chủ biên)
NGUYỄN VĂN ĐÌNH - NGUYỄN VĂN KHANG

CƠ HỌC

TẬP MỘT

TĨNH HỌC VÀ ĐỘNG HỌC



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NK

GS. TSKH. ĐỖ SANH (chủ biên)
GS. TS. NGUYỄN VĂN ĐÌNH – GS. TSKH. NGUYỄN VĂN KHANG

CƠ HỌC

TẬP MỘT

TĨNH HỌC VÀ ĐỘNG HỌC

(Đã được Hội đồng môn học của Bộ Giáo dục và Đào tạo
thông qua dùng làm tài liệu giảng dạy
trong các trường đại học kĩ thuật)

(Tái bản lần thứ mười)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI GIỚI THIỆU

Cơ học là một trong những môn học nền tảng được giảng dạy trong các trường đại học kĩ thuật. Nó không những là cơ sở cho hàng loạt các môn kĩ thuật cơ sở và kĩ thuật chuyên ngành mà còn xây dựng tiềm lực tư duy khoa học cho các kĩ sư và cán bộ khoa học kĩ thuật tương lai.

Việc giảng dạy môn Cơ học lí thuyết trong các trường đại học kĩ thuật của nước ta từng bước được nâng cao và chuẩn hóa. Từ năm 1969 trong điều kiện vô cùng khó khăn của cuộc kháng chiến chống Mỹ cứu nước, Bộ Đại học và THCN đã cho xuất bản giáo trình Cơ học lí thuyết do Giáo sư Viện sĩ Nguyễn Văn Đạo chủ biên với tư cách là giáo trình chuẩn để giảng dạy trong các trường đại học kĩ thuật. Giáo trình đó trong những năm qua đã góp phần tích cực vào việc giảng dạy và học tập môn Cơ học lí thuyết.

Ngày nay, để đáp ứng những đòi hỏi mới của khoa học và thực tế sản xuất của đất nước và của bản thân việc nâng cao chất lượng đào tạo, Bộ Giáo dục và Đào tạo đang chỉ đạo các trường đại học tiến hành cải cách một cách sâu rộng việc giảng dạy, học tập theo quy trình đào tạo mới, trong đó môn Cơ học lí thuyết được đưa vào giảng dạy ở hai năm đầu cho tất cả các ngành kĩ thuật của các trường đại học.

Giáo trình Cơ học (Cơ học cơ sở) lần này được biên soạn với khối lượng 10 đơn vị học trình cơ bản, nhằm phục vụ chương trình cải cách giáo dục của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Quyển sách chắc chắn còn thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của bạn đọc. Các ý kiến xin gửi về Ban biên tập sách Kĩ thuật đại học và hướng nghiệp dạy nghề – Nhà xuất bản Giáo dục, 81 Trần Hưng Đạo – Hà Nội.

VỤ ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC

LỜI NÓI ĐẦU

Dưới sự chỉ đạo của Vụ Đào tạo Đại học và Hội đồng giảng dạy môn Cơ học của Bộ Giáo dục và Đào tạo, một tập thể tác giả của các trường đại học đã biên soạn giáo trình Cơ học nhằm phục vụ chương trình cải cách giáo dục của Bộ cho các trường đại học kĩ thuật.

Giáo trình Cơ học gồm bốn phần và được in thành ba tập.

Tập một : Gồm hai phần Tĩnh học và Động học.

Tập hai : Phần Động lực học

Tập ba : Phần Cơ học và môi trường liên tục.

Biên soạn tập một là các đồng chí Đỗ Sanh (chương 1, chương 2 phần Tĩnh học và chịu trách nhiệm chủ biên), Nguyễn Văn Đình (chương 3, chương 4 phần Tĩnh học), Nguyễn Văn Khang (phần Động học).

Sau mỗi phần đều có các câu hỏi ôn tập. Đó cũng chính là nội dung kiểm tra kết quả thu nhận của sinh viên.

Giáo trình đã được đưa ra lấy ý kiến đóng góp rộng rãi của nhiều cán bộ giảng dạy cơ học của các trường đại học kĩ thuật, của các xêmina giảng dạy Cơ học do Bộ Giáo dục và Đào tạo và Hội Cơ học Việt Nam phối hợp tổ chức.

Chúng tôi xin chân thành cám ơn tất cả các đồng chí đã đóng góp vào việc hoàn thiện tập giáo trình. Đặc biệt chúng tôi xin cám ơn Giáo sư Viện sĩ Nguyễn Văn Đạo, Giáo sư – Phạm Huyễn, Giáo sư – Nguyễn Thúc An, Phó Giáo sư Phan Nguyên Di đã đọc bản thảo và góp nhiều ý kiến quý báu.

Chúng tôi cũng xin cám ơn Vụ Đào tạo Đại học của Bộ Giáo dục và Đào tạo đã viết lời giới thiệu cho quyển sách.

CÁC TÁC GIẢ

MỞ ĐẦU

Cơ học lí thuyết là khoa học nghiên cứu các quy luật về chuyển động cơ học của các vật thể trong không gian, theo thời gian.

Chuyển động cơ học được hiểu là sự đổi chỗ (bao gồm cả sự biến dạng) của các vật thể so với vật thể được chọn làm chuẩn gọi là hệ quy chiếu. Các vật thể trong cơ học lí thuyết được xây dựng dưới các dạng mô hình chất điểm, cơ hệ (hệ các chất điểm rời rạc và liên tục) và một dạng rất quan trọng của nó là vật rắn tuyệt đối.

Không gian trong cơ học lí thuyết được quan niệm không phụ thuộc vào thời gian và vật thể chuyển động trong nó. Không gian có tính chất đồng nhất, đẳng hướng và do đó, thỏa mãn các tính chất của không gian Oclít, trong đó các tiên đề và các định lí của hình học Oclít được sử dụng.

Thời gian cũng được quan niệm không phụ thuộc vào không gian, vào vật thể chuyển động, trôi đều từ quá khứ, qua hiện tại đến tương lai, đối với mọi hệ quy chiếu.

Không gian và thời gian như vậy được gọi là không – thời gian tuyệt đối, chúng là dạng lí tưởng hóa (mô hình) của không gian và thời gian thực.

Cơ học lí thuyết được xây dựng theo phương pháp tiên đề, cơ sở trên hệ tiên đề do Niutơn đưa ra lần đầu tiên trong tác phẩm nổi tiếng "Cơ sở toán học của triết học tự nhiên" – (Philosophiaenturalis Principia Mathematica, 1687). Do đó, Cơ học lí thuyết còn có tên gọi là Cơ học Niutơn.

Cơ học Niutơn chỉ khảo sát đối với các vật thể có kích thước hữu hạn và chuyển động với vận tốc bé hơn nhiều lần vận tốc ánh sáng. Cơ học của các vật thể có kích thước vi mô được khảo sát trong cơ học lượng tử, còn cơ học của các vật thể chuyển động với vận tốc cùng cỡ vận tốc ánh sáng được khảo sát trong cơ học tương đối của Anhxtanh.

Cơ học lí thuyết phát sinh và phát triển gắn liền với sự phát triển của lực lượng sản xuất xã hội và tri thức văn hóa của nhân loại, đặc biệt, với sự phát triển của kĩ thuật.

Cơ học lí thuyết là cơ sở và xuất phát điểm cho nhiều bộ môn cơ học khác như sức bền vật liệu, lí thuyết đàn hồi, thủy khí động lực học,..., chúng được xây dựng trên các định luật chung của cơ học lí thuyết với các định luật bổ sung do các tính chất đặc thù của thực thể vật chất. Trong sức bền vật liệu và lí thuyết đàn hồi kể đến biến dạng của vật thể và được bổ sung thêm các định luật về quan hệ giữa biến dạng và lực. Trong thủy – động lực học kể đến vận tốc biến dạng của thực thể vật chất với định luật bổ sung về sự liên hệ giữa vận tốc biến dạng và lực, còn trong khí động lực học kể thêm tính chất nén được của thể khí.

Trong các trường đại học kĩ thuật, môn Cơ học lí thuyết làm nền tảng cho hàng loạt các môn kĩ thuật cơ sở và kĩ thuật chuyên ngành như Sức bền vật liệu, Nguyên lí máy, Động lực học máy, Động lực học công trình...

Cơ học lí thuyết đã có lịch sử phát triển lâu đời do lao động của nhiều thế hệ các nhà bác học. Ngay trong thời kì cổ đại người ta cũng đã biết áp dụng nhiều quy luật của cơ học, ví dụ, quy luật mặt phẳng nghiêng, đòn bẩy,... để xây dựng nhiều công trình đồ sộ vẫn còn tồn tại đến tận ngày nay... Dưới đây chúng ta sẽ nêu lên một số giai đoạn phát triển tiêu biểu của cơ học lí thuyết.

Sự phát triển mạnh mẽ của các khoa học tự nhiên, trong đó có cơ học, bắt đầu từ thời kì Phục hưng, đầu tiên ở Italia và sau đó tại các nước khác. Trong thời kì này nổi bật lên tên tuổi của họa sĩ thiên tài người Italia Lêôna đơ Vinxi (1452 – 1519) một nhà hình học và kĩ sư có tài, có nhiều khảo sát trong lĩnh vực cơ cấu, ma sát trong máy và chuyển động trên mặt phẳng nghiêng. Cùng thời cần kể đến nhà bác học Ba Lan nổi tiếng, Nicolai Copecnic (1473 - 1543), người đã xây dựng lí thuyết về chuyển động của các hành tinh trong thái dương hệ. Dựa vào các công trình này và vào các số liệu quan sát của thiên văn mà Keple (1571 - 1630) đã phát hiện ra ba định luật nổi tiếng của chuyển động các hành tinh, đó là cơ sở cho Niutơn tìm ra định luật hấp dẫn vũ trụ nổi tiếng.

Các khảo sát có tầm quan trọng đặc biệt, có ý nghĩa nền tảng cho sự phát triển cơ học là các công trình của nhà bác học thiên tài người Italia, Galilê (1564 – 1642). Trước Galilê, cơ học được phát triển chủ yếu là **phần tĩnh học**. Chính Galilê đã đề cập đến các định luật chuyển động dưới tác dụng của lực, tức **phần động lực học**, trong các nghiên cứu về sự rơi của vật hoặc sự ném của vật làm với đường nằm ngang một góc α, ... Định luật nổi tiếng của động lực học, một trong những phát minh vĩ đại nhất của con người, định luật quán tính, thuộc về Galilê. Ông cũng đặt những nền móng đầu tiên về lí thuyết độ bền của các công trình.

Các công trình của Niutơn (1643 - 1727) đã hoàn tất thời kì đầu của khoa học tự nhiên, Niutơn đã thống nhất, mở rộng và xây dựng cơ sở cho các thành tựu hiện thời của cơ học nhờ một hệ thống các định luật mà ngày nay chúng có tên là hệ tiên đề động lực học mang tên Niutơn.

Tiếp theo công trình được xây dựng một cách hệ thống hoàn chỉnh và chặt chẽ của Niutơn, cơ học lí thuyết trải qua một giai đoạn phát triển hết sức sôi động và phong phú từ thế kỉ thứ XVIII - XIX và cả thế kỉ XX.

Quá trình phát triển này đã dẫn đến việc xuất hiện lí thuyết tương đối của Anhxtanh.

Đóng góp vào sự phát triển cơ học trong thời kì này có các nhà bác học như Đalămbe (1717 – 1783) mà tên tuổi gắn liền với nguyên lí nổi tiếng mang tên ông, nguyên lí Đalămbe, như Ơle (1707 – 1783), Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Nga, người đã có nhiều công trong việc sử dụng các phương pháp giải tích để nghiên cứu các bài toán động lực học vật rắn. Ole là người đầu tiên viết giáo trình cơ học theo hướng giải tích hóa có nhan đề "Động lực học" (Meliamica sive môtus scientia, Petecbua 1736),...

Hướng giải tích hóa cơ học mà ngày nay được gọi là cơ học giải tích được trình bày trong tác phẩm sáng lập ngành "Cơ học giải tích" (Mecanique analytique, 1788) của nhà bác học lớn người Pháp Lagrăng, trong đó cơ học đã được trình bày nhờ phương pháp giải tích dựa vào một nguyên lí chung, không có một hình vẽ nào. Giai đoạn phát triển phong phú này của cơ học gắn liền với tên tuổi của nhiều nhà bác học, mà các công trình nghiên cứu gắn liền với tên tuổi của họ như Hamintơn (1805 – 1865), Jacôbi (1804 – 1851), Gaoxơ(1777 – 1805) ...

Ngày nay sự phát triển của cơ học lí thuyết gắn liền với các vấn đề của vật lí và kĩ thuật hiện đại như cơ học vũ trụ, điều khiển tự động, kĩ thuật rô bốt,...

Phần một

TĨNH HỌC

MỞ ĐẦU

Tĩnh học là phần nghiên cứu trạng thái cân bằng của vật rắn (vật rắn tuyệt đối) dưới tác dụng của các lực.

Hai vấn đề chính được nghiên cứu trong tĩnh học là:

1. Thu gọn hệ lực, tức là biến đổi hệ lực đã cho thành một hệ lực khác tương đương với nó, nhưng đơn giản hơn. Thu gọn hệ lực về dạng đơn giản nhất, được gọi là dạng tối giản của hệ lực. Tập hợp các dạng tối giản khác nhau của các hệ lực được gọi là các dạng chuẩn của hệ lực.

2. Thiết lập các điều kiện đối với hệ lực mà dưới tác dụng của nó vật rắn cân bằng, được gọi tắt là các điều kiện cân bằng của hệ lực.

Để giải quyết hai vấn đề nêu trên, trong tĩnh học sử dụng phương pháp tiên đề, là phương pháp dựa trên các khái niệm cơ bản và hệ tiên đề, nhờ các suy diễn lôgic để tìm các quy luật của đối tượng được nghiên cứu.

Các khái niệm cơ bản là những khái niệm nền tảng đầu tiên để xây dựng nội dung môn học, còn các tiên đề là những mệnh đề công nhận các tính chất của các khái niệm cơ bản.

CHƯƠNG 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong tĩnh học có ba khái niệm cơ bản sau đây: vật rắn tuyệt đối, cân bằng và lực.

1.1.1 VẬT RẮN TUYỆT ĐỐI

Vật rắn tuyệt đối là một tập hợp vô hạn các chất điểm mà khoảng cách giữa hai chất điểm bất kì luôn luôn không đổi.

Vật rắn tuyệt đối chỉ là mô hình của các vật thể khi các biến dạng của nó bỏ qua được do quá bé hoặc không đóng vai trò quan trọng trong quá trình khảo sát. Trong những trường hợp khi các biến dạng tuy bé nhưng đóng vai trò quan trọng, thậm chí quyết định, tức không thể bỏ qua được, thì cần thiết phải bổ sung những giả thiết, tức xây dựng mô hình gần đúng hơn. Vấn đề này sẽ được xem xét đến trong giáo trình sức bền vật liệu.

Để đơn giản, vật rắn tuyệt đối thường được gọi vắn tắt là vật rắn.

1.1.2. CÂN BẰNG

Vật rắn được gọi là cân bằng khi vị trí của nó không thay đổi so với vị trí của một vật nào đó được chọn làm chuẩn gọi là hệ quy chiếu. Trong tĩnh học hệ quy chiếu được chọn là hệ quy chiếu trong đó tiên đề quán tính được thỏa mãn, nó được gọi là hệ quy chiếu quán tính. Vấn đề này sẽ được trình bày chi tiết trong phần Động lực học. Cân bằng đối với hệ quy chiếu quán tính được gọi là cân bằng tuyệt đối.

Vật lí học hiện đại đã chứng minh rằng không tồn tại hệ quy chiếu quán tính. Do vậy, chỉ có thể chọn các hệ quy chiếu gần đúng hệ quy chiếu quán tính. Trong kĩ thuật, hệ quy chiếu quán tính gần đúng được chọn là quả đất. Chú ý rằng trong tính toán người ta chọn hệ trục tọa độ gắn với hệ quy chiếu, được gọi là hệ trục tọa độ quy chiếu. Với một hệ quy chiếu có thể gắn với nhiều hệ trục tọa độ quy chiếu khác nhau.

1.1.3. LỰC

Từ những quan sát trong đời sống cùng với những kinh nghiệm và thực nghiệm người ta đi đến nhận xét rằng: nguyên nhân gây ra sự biến đổi của trạng thái chuyển động cơ học, tức sự dời chỗ của các vật thể (bao gồm cả biến dạng) trong đó cân bằng chỉ là trường hợp riêng, chính là tác dụng tương hỗ giữa các vật thể. Tác dụng tương hỗ giữa các vật mà kết quả của nó gây nên các biến dạng hoặc sự thay đổi vận tốc của chúng được gọi là những tác dụng cơ học (phân biệt với các tác dụng tương hỗ khác như hóa, nhiệt, điện,...)

Tác dụng tương hỗ cơ học được gọi là lực.

Khái niệm lực được cảm nhận trong đời sống hàng ngày như khi xách hoặc đẩy một vật nào đó qua sự căng của các cơ bắp.

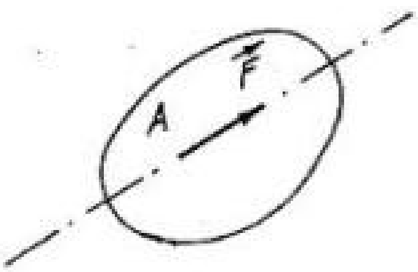
Thực nghiệm chứng minh rằng lực được đặc trưng bởi các yếu tố sau:

– Điểm đặt của lực là điểm mà vật được truyền tác dụng tương hỗ cơ học từ vật khác.

– Phương chiều của lực là phương chiều chuyển động từ trạng thái yên nghỉ của chất điểm (vật có kích thước bé) chịu tác dụng của lực.

– Cường độ của lực là số đo tác dụng mạnh yếu của lực so với lực được chọn làm chuẩn gọi là đơn vị lực. Đơn vị lực là Niutơn, được kí hiệu N.

Định nghĩa về đơn vị lực sẽ được trình bày trong phần động lực học.



Hình 1-1

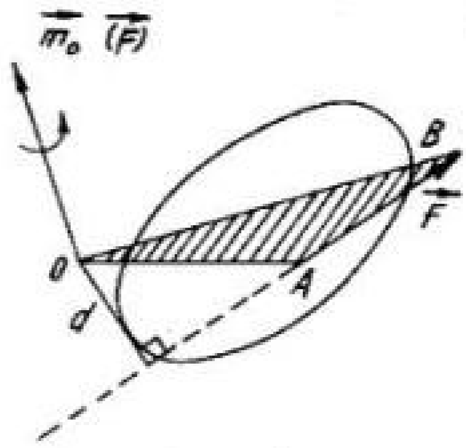
Do đó có thể dùng vectơ biểu diễn các đặc trưng lực, gọi là vectơ lực, chẳng hạn, $\vec{F}$, $\vec{Q}$,..

Điểm đặt của vectơ là điểm đặt của lực, phương chiều của vectơ biểu diễn phương chiều của lực, môđun của vectơ biểu diễn cường độ của lực. Giá mang vectơ lực được gọi là đường tác dụng của lực (H. 1– 1).

1.1.4. CÁC ĐỊNH NGHĨA KHÁC

1. Mô men của lực đối với một điểm và mô men của lực đối với một trục .

a) Mô men của lực đối với một điểm : Mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O, kí hiệu $\vec{m}_o(\vec{F})$ là một vectơ vuông góc với mặt phẳng chứa điểm O và lực $\vec{F}$ sao cho khi nhìn từ đầu mút của nó nhìn xuống thấy lực $\vec{F}$ vòng quanh O theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, có môđun bằng F.d, ở đó d là khoảng cách vuông góc từ tâm mô men O đến đường tác dụng của lực, được gọi là tay đòn của lực $\vec{F}$ đối với tâm mô men O (H. 1–2).



Hình 1-2

Rõ ràng $\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{0}$ khi $\vec{F} = \vec{0}$ hoặc khi đường tác dụng của lực $\vec{F}$ qua tâm mô men O.

Ngoài ra: $|\vec{m}_o(\vec{F})| = 2dt \overset{\Delta}{OAB}$

Dễ dàng chỉ ra rằng:

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} \qquad (1-1)$$

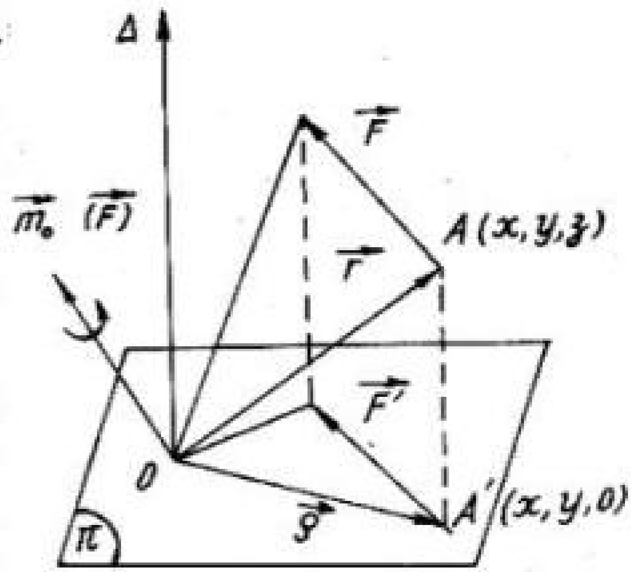
Trong đó $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ là vectơ định vị của điểm A; x, y, z là tọa độ điểm A; F_x, F_y, F_z là các hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên các trục của hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ. Từ công thức (1 – 1) tính được các hình chiếu lên ba trục tọa độ của vectơ $\vec{m}_o(\vec{F})$, đó là:

$$\overline{m}_{ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y ; \overline{m}_{oy}(\vec{F}) = zF_x - xF_z ; \overline{m}_{oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_x \quad (1-2)$$

Khi các lực cùng nằm trong một mặt phẳng với điểm O thì các vectơ mô men của các lực đối với điểm O sẽ song song với nhau. Trong trường hợp đó người ta đưa ra khái niệm mô men đại số của lực $\vec{F}$ đối với điểm O, kí hiệu $\overline{m}_O(\vec{F})$, là lượng đại số ± F.d, có dấu dương khi lực $\vec{F}$ vòng quanh O theo chiều ngược chiều kim đồng hồ và có dấu âm trong trường hợp ngược lại.

b) Mô men của lực đối với một trục

Mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ, kí hiệu $\overline{m}_\Delta(\vec{F})$ là mô men đại số của lực $\vec{F}'$ đối với điểm O, ở đó $\vec{F}'$ là hình chiếu của lực $\vec{F}$ lên mặt phẳng π vuông góc với trục Δ, còn O là giao điểm giữa trục Δ và mặt phẳng π, (H. 1– 3) tức là:



Hình 1-3

$$\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = \overline{m}_O(\vec{F}') \qquad (1-3)$$

Rõ ràng là $\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = 0$ khi $\vec{F} = \vec{0}$, hoặc khi $\vec{F}$ song song hoặc cắt trục Δ, tức là lực và trục đồng phẳng.

c) Định lí liên hệ giữa mô men của lực đối với một điểm và mô men của lực đối với một trục.

Định lí. *Mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ bằng hình chiếu lên trục ấy của vectơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O nằm trên trục.*

$$\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = hch_\Delta[\vec{m}_O(\vec{F})] \qquad (1-4)$$

Chứng minh. Chọn trục z trùng với trục Δ và mặt phẳng tọa độ Oxy trùng với mặt phẳng π (H. 1–3).

Gọi A' là hình chiếu của điểm đặt A của lực $\vec{F}$ trên mặt phẳng Oxy. Nếu A có các tọa độ là x, y, z thì A' có các tọa độ là x, y, 0.

Từ định nghĩa mô men của lực đối với một trục, ta có:

$$\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = \overline{m}_o(\vec{F}') = hch_{oz}[\vec{m}_o(\vec{F}')] \quad (a)$$

Dựa vào biểu thức vectơ của mô men của lực đối với một điểm ta viết:

$$\vec{m}_o(\vec{F'}) = \vec{\rho} \wedge \vec{F'} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{bmatrix}$$

ở đó: $\vec{\rho} = \overrightarrow{OA'}$

Từ đó ta dễ dàng tính được:

$$hch_{oz}[\vec{m}_o(F')] = xF_y - yF_x$$

Khi so sánh biểu thức này với công thức (1 – 2), ta có:

$$hch_{oz}[\vec{m}_o(\vec{F'})] = hch_{oz}[\vec{m}_o(\vec{F})] \qquad (b)$$

Từ (a) và (b), ta rút ra:

$$\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = hch_{oz}[\vec{m}_o(\vec{F'})] = hch_{oz}[\vec{m}_o(\vec{F})]$$

Đó là điều cần chứng minh.

Kí hiệu mô men của lực $\vec{F}$ đối với các trục tọa độ là $\overline{m}_x(\vec{F})$, $\overline{m}_y(\vec{F})$, $\overline{m}_z(\vec{F})$. Áp dụng định lí vừa nêu trên, ta có :

$$\vec{m}_o(\vec{F}) \begin{cases} \overline{m}_{ox}(\vec{F}) = \overline{m}_x(\vec{F}) \\ \overline{m}_{oy}(\vec{F}) = \overline{m}_y(\vec{F}) \\ \overline{m}_{oz}(\vec{F}) = \overline{m}_z(\vec{F}) \end{cases} \qquad (1-5)$$

Trong đó (xem công thức 1– 2); $\overline{m}_{ox}(\vec{F})$; $\overline{m}_{oy}(\vec{F})$; $\overline{m}_{oz}(\vec{F})$ là hình chiếu của vectơ $\vec{m}_o(\vec{F})$ tương ứng trên các trục tọa độ vuông góc Ox, Oy, và Oz.

2. Hệ lực

Hệ lực là tập hợp nhiều lực cùng tác dụng lên một vật rắn. Hệ lực gồm các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ được kí hiệu là $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$.

Dựa vào tác dụng cơ học của hệ lực ta có:

Hệ lực tương đương với hệ lực khác khi nó có tác dụng cơ học như hệ lực đó. Hai hệ lực tương đương $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ và $(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, ..., \vec{\phi}_n)$ sẽ được kí hiệu như sau :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv (\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, ..., \vec{\phi}_n)$$

Hợp lực của hệ lực là một lực duy nhất tương đương với hệ lực ấy. Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của hệ lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$), ta có :

$$\vec{R} \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$$

Hệ lực cân bằng là hệ lực nếu tác dụng lên vật rắn không làm thay đổi trạng thái chuyển động của vật có được khi không chịu tác dụng của hệ lực ấy. Trong trường hợp riêng, dưới tác dụng của hệ lực vật rắn cân bằng thì hệ lực được gọi là hệ lực cân bằng. Hệ lực cân bằng còn gọi là hệ lực tương đương với không và được kí hiệu :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv 0$$

Khi dựa vào sự phân bố của các đường tác dụng của các lực thuộc hệ lực ta có :

- Hệ lực không gian bất kì khi đường tác dụng nằm tùy ý trong không gian.

- Hệ lực phẳng bất kì khi đường tác dụng các lực nằm tùy ý trong cùng một mặt phẳng.

- Hệ lực song song (hệ lực song song phẳng và hệ lực song song không gian) khi đường tác dụng các lực song song với nhau.

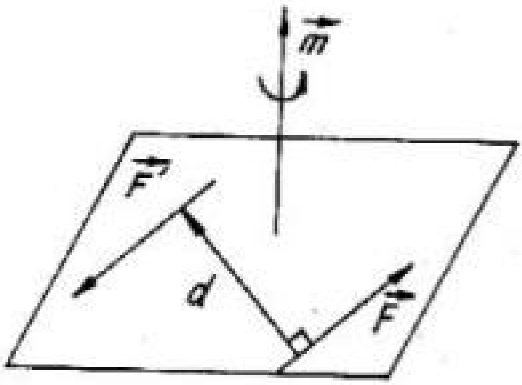
- Hệ lực đồng quy (hệ lực đồng quy phẳng và hệ lực đồng quy không gian) khi đường tác dụng các lực đi qua cùng một điểm.

- Hệ ngẫu lực (hệ ngẫu lực phẳng và hệ ngẫu lực không gian) khi hệ lực gồm các cặp lực (tức từng đôi một) song song ngược chiều và cùng cường độ.

3. Ngẫu lực

a) **Định nghĩa.** *Ngẫu lực là hệ lực gồm hai lực song song ngược chiều và cùng cường độ.*

b) Các đặc trưng của ngẫu lực. Ngẫu lực được đặc trưng bởi mặt phẳng tác dụng của nó (mặt phẳng chứa hai lực thành phần), chiều quay của ngẫu lực trong mặt phẳng và cường độ tác dụng của ngẫu lực. Cường độ tác dụng ngẫu lực phụ thuộc vào giá trị của các lực thành phần và tay đòn ngẫu lực (khoảng cách giữa hai đường tác dụng của hai lực thành phần). Người ta



Hình 1-4

dùng tích số F.d, được gọi là mô men của ngẫu lực, để đặc trưng cho cường độ tác dụng của ngẫu lực.

Để biểu diễn các đặc trưng của ngẫu lực người ta dùng vectơ mô men ngẫu lực, kí hiệu $\vec{m}$, có gốc tại mặt phẳng ngẫu lực, hướng vuông góc với mặt phẳng ngẫu lực sao cho khi nhìn từ đầu mút của vectơ ấy xuống mặt phẳng ngẫu lực thấy chiều quay của ngẫu lực ngược chiều quay kim đồng hồ và có môđun bằng mômen ngẫu lực, tức bằng F.d (H. 1 – 4).

c) Định lí liên hệ giữa vecto mô men ngẫu lực và mô men của lực đối với một điểm.

Định lý. *Mô men đối với một điểm bất kì của ngẫu lực bằng vecto mô men ngẫu lực.*

$$\vec{m}_o(\vec{F}) + \vec{m}_o(\vec{F'}) = \vec{M} \qquad (1-6)$$

Chứng minh : Theo định nghĩa mô men của lực đối với một điểm (H.1 – 5) ta có :

$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F}$; $\vec{m}_o(\vec{F'}) = \vec{r'} \wedge \vec{F'}$

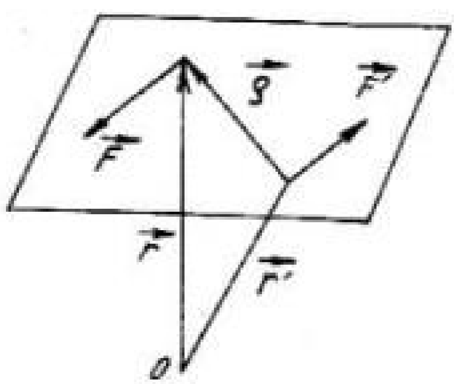
Vậy:

$\vec{m}_o(\vec{F}) + \vec{m}_o(\vec{F'}) =$

$= \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{r'} \wedge \vec{F'} =$

$= \vec{r} \wedge \vec{F} - \vec{r'} \wedge \vec{F} =$

$= (\vec{r} - \vec{r'}) \wedge \vec{F} = \vec{\rho} \wedge \vec{F} = \vec{M}$



Hình 1-5

Từ định lí trên ta rút ra:

Định lí. *Vecto mô men ngẫu lực bằng mô men của một lực thành phần đối với điểm nằm trên đường tác dụng của lực thành phần kia.*

4. Vật tự do và vật không tự do

Vật rắn có thể thực hiện mọi di chuyển vô cùng bé từ vị trí đang xét sang vị trí lân cận của nó, được gọi là vật tự do. Trái lại, nếu một số di chuyển của vật bị cản trở bởi những vật khác, thì vật đó được gọi là vật không tự do. Ví dụ, quả bóng được bơm căng bay lơ lửng là vật tự do, còn một vật đang nằm trên bàn là vật không tự do.

Những điều kiện cản trở di chuyển của vật khảo sát được gọi là những liên kết đặt lên vật ấy. Trong tĩnh học chỉ khảo sát loại liên kết được thực hiện bằng sự tiếp xúc hình học giữa vật thể được khảo sát với các vật thể khác, đó là những liên kết hình học. Vật không tự do còn được gọi là vật chịu liên kết, còn các vật khác cản trở vật được khảo sát gọi là vật gây liên kết.

5. Lực liên kết và lực hoạt động. Phản lực liên kết

Những lực đặc trưng cho tác dụng tương hỗ giữa các vật có liên kết với nhau qua chỗ tiếp xúc hình học được gọi là những lực liên kết. Các lực không phải là lực liên kết được gọi là lực hoạt động. Nói khác đi, lực hoạt động là những lực không bị biến mất cùng với liên kết, thí dụ, trọng lực thuộc loại lực hoạt động. Lực liên kết do các vật gây liên kết tác dụng lên vật chịu liên kết được gọi là các phản lực liên kết, còn các lực do vật chịu liên kết tác dụng lên các vật gây liên kết được gọi là áp lực.

1.2. HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

Tiên đề 1 : Tiên đề về hai lực cân bằng

Điều kiện cần và đủ để cho hệ hai lực cân bằng là chúng có cùng đường tác dụng, hướng ngược chiều nhau và có cùng cường độ.

Hai lực thỏa mãn tiên đề 1 được gọi là hai lực cân bằng (H. 1 – 6). Tiên đề 1 đưa ra một tiêu chuẩn về cân bằng. Nói khác đi, để biết một hệ lực đã cho có cân bằng hay không ta cần chứng minh rằng hệ lực ấy tương đương với hai lực cân bằng. Do đó, cần phải biến đổi hệ lực đã cho (biến đổi tương đương) về hai lực.

Hai tiên đề tiếp theo cho chúng ta hai phép biến đổi tương đương.

Tiên đề 2 : Tiên đề thêm bớt hai lực cân bằng

Tác dụng của một hệ lực không thay đổi nếu thêm hoặc bớt hai lực cân bằng.

Hình 1-6

Như vậy nếu $(\vec{F}, \vec{F'})$ là hai lực cân bằng thì:

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2,...,\vec{F}_n) \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3,...,\vec{F}_n, \vec{F}, \vec{F'})$, hoặc nếu hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3...,\vec{F}_n)$ có hai lực cân bằng $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ thì:

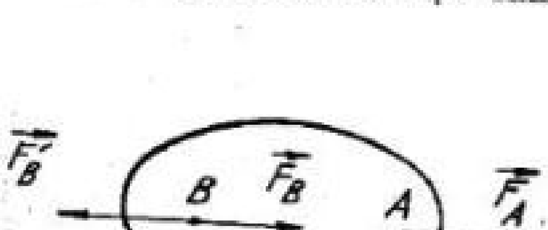
$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3,...,\vec{F}_n) \equiv (\vec{F}_3,...,\vec{F}_n)$

Hệ quả (Định lí trượt lực)

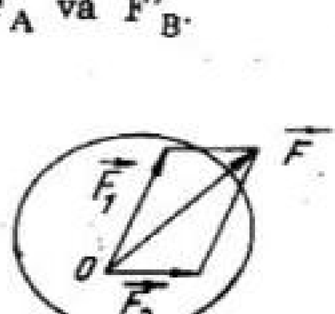
Tác dụng của lực không thay đổi khi trượt lực trên đường tác dụng của nó.

Thực vậy, giả sử lực $\vec{F}_A$ tác dụng lên vật rắn tại A, áp dụng tiên đề 2, thêm tại B hai lực cân bằng nhau (H. 1– 7) cùng đường tác dụng với lực $\vec{F}_A$ và $\vec{F}_B = -\vec{F'}_B = \vec{F}_A$ ta có:

$\vec{F}_A \equiv (\vec{F}_A, \vec{F'}_B, \vec{F}_B) \equiv \vec{F}_B$ ở đây một lần nữa ta áp dụng tiên đề 2 để bỏ đi hai lực cân bằng $\vec{F}_A$ và $\vec{F'}_B$.



Hình 1-7



Hình 1-8

Như vậy, lực tác dụng lên vật rắn được biểu diễn bằng vectơ trượt. Cần chú ý rằng tính chất nêu trên chỉ có đối với vật tuyệt đối rắn.

Tiên đề 3 : Tiên đề hình bình hành lực

Hệ hai lực cùng đặt tại một điểm tương đương với một lực đặt tại điểm đặt chung và có vectơ lực bằng vectơ chéo hình bình hành mà hai cạnh là hai vectơ biểu diễn hai lực thành phần (H. 1 – 8).

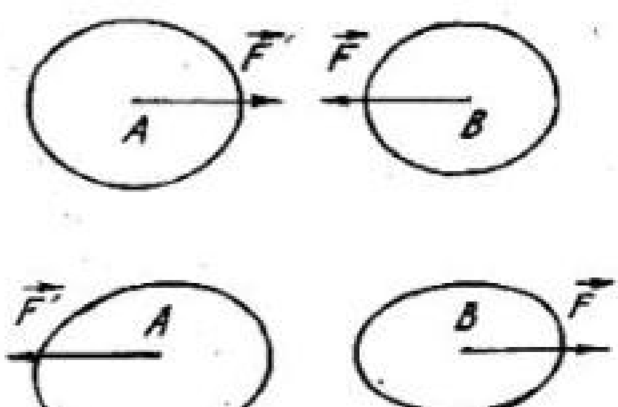
Nhờ hệ quả vừa nêu trên, điều kiện hai lực cùng đặt một điểm có thể thay thế bằng điều kiện hai đường tác dụng của hai lực gặp nhau.

Tiên đề 3 cho phép biến đổi tương đương về hợp hai lực đồng quy và phân tích một lực thành hai lực theo quy tắc hình bình hành lực. Nhờ tiên đề này đưa phép cộng vectơ vào phép tính lực. Tuy nhiên cần nhấn mạnh rằng hai phép tính đó không đồng nhất với nhau, vì phép cộng vectơ đúng cho trường hợp hai vectơ tự do, còn phép tính hợp lực theo quy tắc hình bình hành lực chỉ đúng cho trường hợp hai vectơ lực có đường tác dụng gặp nhau.

Tiên đề 4 : Tiên đề tác dụng và phản tác dụng

Lực tác dụng và lực phản tác dụng giữa hai vật có cùng đường tác dụng, hướng ngược chiều nhau và có cùng cường độ (H. 1–9).

Chú ý rằng lực tác dụng và phản tác dụng không phải là hai lực cân bằng vì chúng không tác dụng lên cùng một vật rắn. Tiên đề 4 là *cơ sở để mở rộng các kết quả khảo sát đối với một vật sang khảo sát hệ vật* và nó đúng cho hệ quy chiếu quán tính cũng như hệ quy chiếu không quán tính.

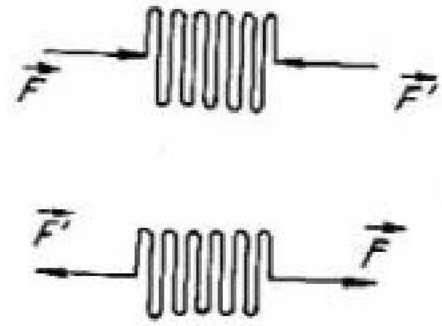


Hình 1-9

Tiên đề 5 : Tiên đề hóa rắn

Một vật biến dạng đã cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực thì khi hóa rắn lại nó vẫn cân bằng.

Nói khác đi, hệ lực tác dụng lên vật biến dạng đã cân bằng thỏa mãn những điều kiện khi nó tác dụng lên vật rắn cân bằng. *Vậy những điều kiện cân bằng của vật rắn cũng là những điều kiện cần* (nhưng không đủ) của vật biến dạng cân bằng. Để làm sáng tỏ điều này ta xét trường hợp lò xo (vật biến dạng). Giả sử lò xo cân bằng, khi đó lò xo ở trạng thái nén hoặc trạng thái kéo và hệ lực tác dụng lên lò xo ở trạng thái cân bằng kéo hoặc nén đều thỏa mãn tiên đề 1 như vật rắn cân bằng (H. 1-10).



Hình 1-10

Tuy nhiên nếu tác dụng lên lò xo cân bằng ở trạng thái nén hai lực cân bằng ở trạng thái kéo thì lò xo sẽ không cân bằng được mà sẽ bị giãn ra trong khi đó vật tuyệt đối rắn vẫn cân bằng dưới tác dụng của hai lực cân bằng như vậy.

Nhờ tiên đề 5 có thể sử dụng các kết quả đã nghiên cứu cho vật rắn cân bằng cho trường hợp vật biến dạng cân bằng. Tuy nhiên, các kết quả đó chưa đủ để giải quyết bài toán cân bằng của vật biến dạng mà cần phải thêm các giả thiết về biến dạng (ví dụ định luật Húc trong sức bền vật liệu).

Tiên đề 6 : Tiên đề giải phóng liên kết

Vật không tự do (tức vật chịu liên kết) cân bằng có thể được xem là vật tự do cân bằng nếu giải phóng các liên kết, thay thế tác dụng của các liên kết được giải phóng bằng các phản lực liên kết tương ứng.

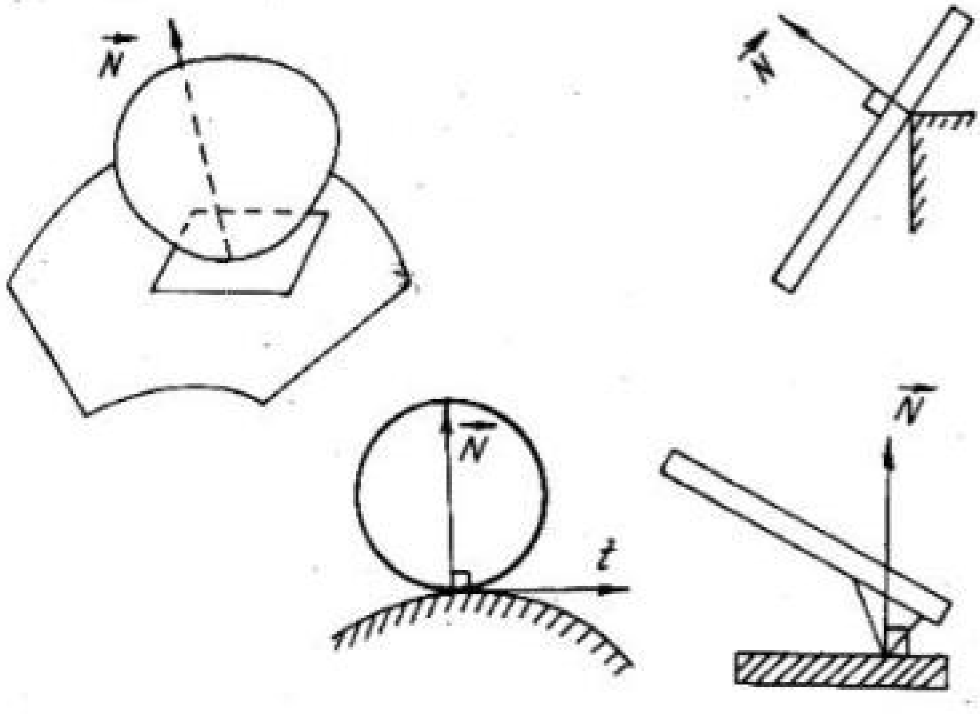
Nhờ tiên đề giải phóng liên kết, các tiên đề phát biểu cho vật rắn tự do vẫn đúng đối với vật rắn chịu liên kết, khi xem nó là vật tự do chịu tác dụng của hệ lực gồm các lực hoạt động tác dụng lên nó và các phản lực liên kết tương ứng với các liên kết được giải phóng.

Chú ý rằng tiên đề giải phóng liên kết đúng cả đối với bài toán động lực học.

Dưới đây sẽ trình bày một số quy tắc để tìm các đặc trưng của phản lực liên kết của một số liên kết thường gặp. Ta chỉ giới hạn đối với các liên kết không ma sát (nhẵn).

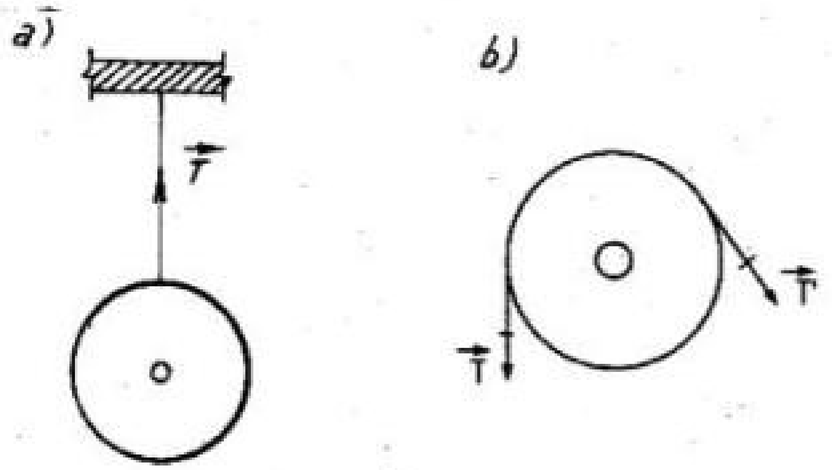
Đầu tiên cần nhấn mạnh rằng các phản lực liên kết có tính chất thụ động, chúng phụ thuộc vào các lực hoạt động tác dụng lên vật khảo sát. Do đó việc nghiên cứu cấu trúc của các liên kết không cho phép xác định các trị số của các phản lực liên kết mà chỉ cho biết các đặc trưng phương chiều của chúng.

Liên kết tựa : hai vật liên kết tựa khi chúng trực tiếp tựa lên nhau. Giả sử chỗ tiếp xúc giữa hai vật tựa lên nhau được thực hiện theo các bề mặt, hoặc theo các đường, hoặc theo mặt và đường, hoặc theo điểm và bề mặt hay điểm và đường, là hoàn toàn nhẵn thì phản lực tựa có phương vuông góc với mặt tựa (hoặc đường tựa) (H. 1–11).



Hình 1–11

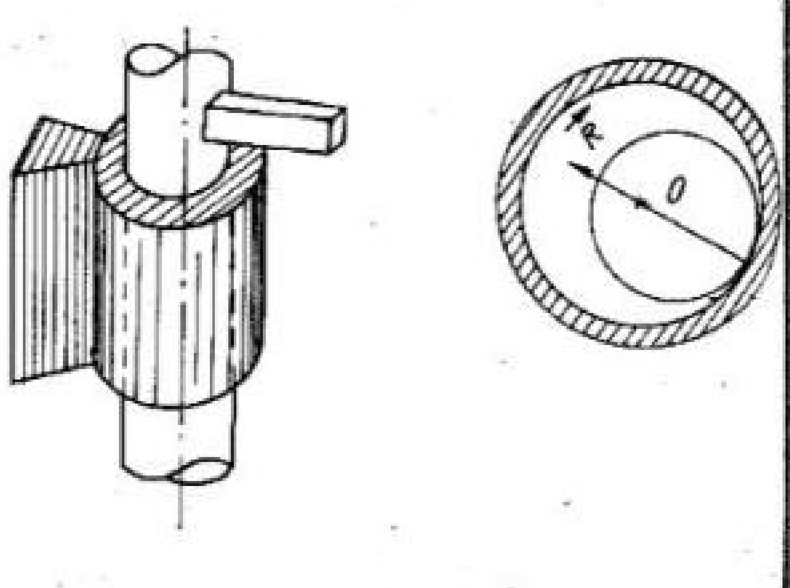
Liên kết dây mềm, thẳng : phản lực của dây tác dụng lên vật khảo sát bao giờ cũng đặt vào chỗ buộc dây và hướng vào dây. Phản lực của dây còn được gọi là sức căng của dây, kí hiệu là $\vec{T}$ (H. 1–12a). Trong trường hợp dây vòng qua vật thì phản lực dây hướng dọc dây và hướng ra đối với mặt cắt của dây (H. 1–12b).



Hình 1-12

Liên kết bản lề : hai vật có liên kết bản lề khi chúng có trục (chốt) chung. Trong trường hợp này hai vật tựa vào nhau theo đường nhưng điểm tựa chưa xác định.

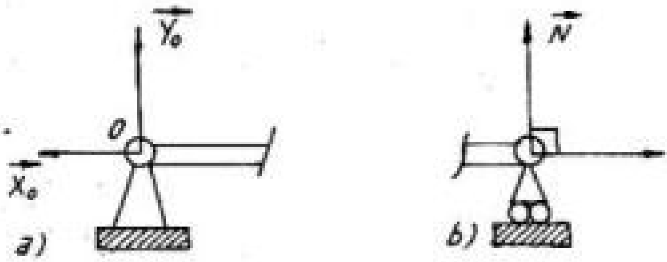
Phản lực liên kết $\vec{R}$ trong trường hợp này đi qua tâm của trục và có phương chiều chưa xác định (H. 1–13).



Hình 1-13

Vì vậy chúng thường được phân thành hai thành phần vuông góc với nhau $\vec{R}_x$ và $\vec{R}_y$, nằm trong mặt phẳng thẳng góc với đường trục tâm của bản lề.

Liên kết gối : để đỡ các dầm và khung... người ta dùng các liên kết, có dạng gối cố định (H. 1–14a) và gối con lăn (H. 1–14b). Phản lực liên kết của gối cố định được xác định như liên kết bản lề, còn phản lực liên kết của gối có con lăn được tìm theo quy tắc của phản lực liên kết tựa.

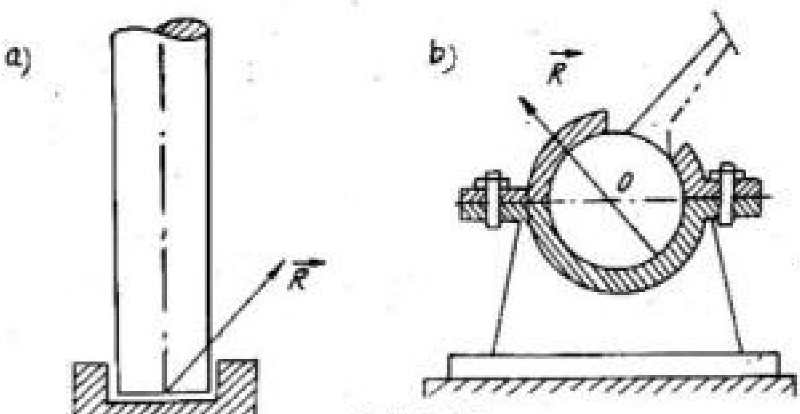


Hình 1-14

Liên kết gối cầu : Liên kết gối cầu có thể thực hiện nhờ quả cầu gắn vào vật chịu liên kết và được đặt trong một vỏ cầu gắn liền với vật gây liên kết. Phản lực gối cầu đi qua tâm O của vỏ cầu, có phương chiều chưa biết (H. 1–15a).

Thông thường phản lực gối cầu được phân thành ba thành phần vuông góc nhau.

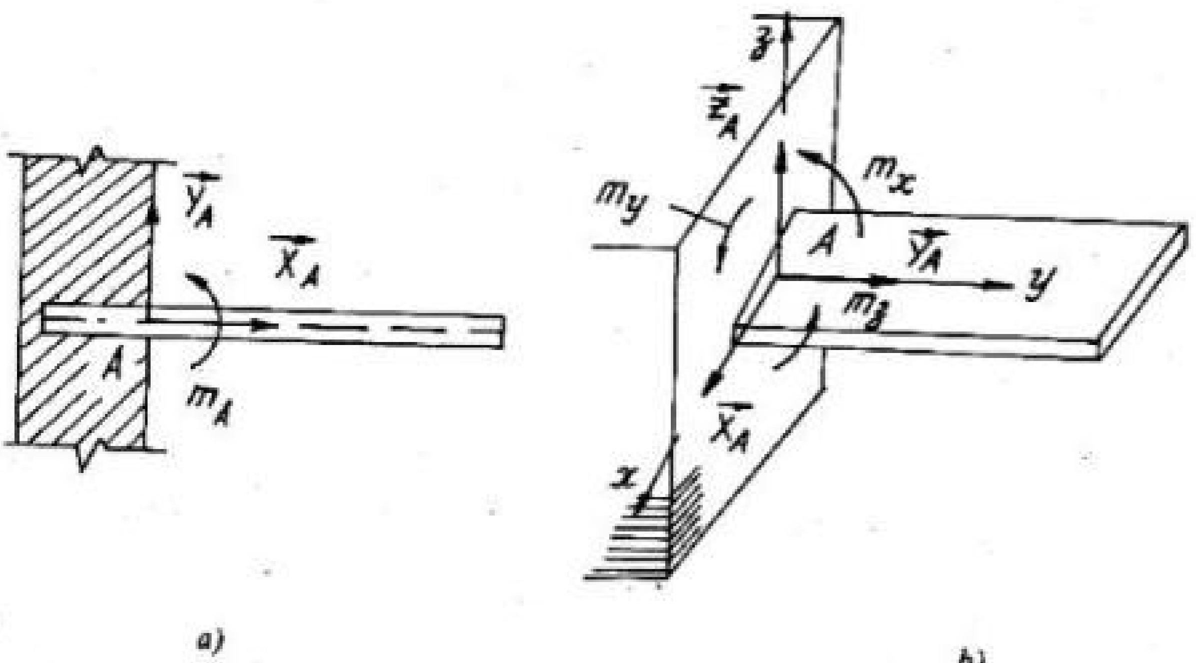
Trường hợp tương tự liên kết gối cầu là liên kết cối (H. 1– 15b).



Hình 1-15

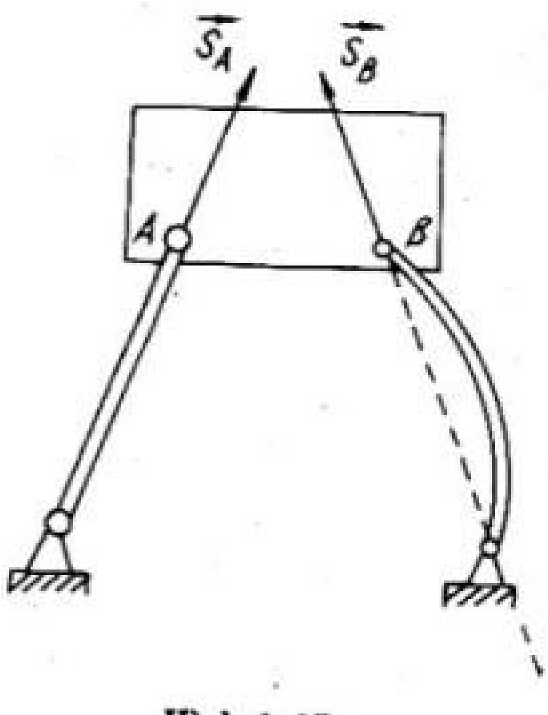
Liên kết ngàm : hai vật có liên kết ngàm khi vật chịu liên kết và vật gây liên kết nối cứng với nhau, ví dụ một trụ đứng được chôn chặt xuống nền.

Trong trường hợp ngàm phẳng (H. 1–16a) phản lực liên kết gồm hai lực thẳng góc với nhau và một ngẫu lực trong mặt phẳng của hai lực thành phần. Trong trường hợp ngàm không gian phản lực liên kết gồm ba thành phần lực thẳng góc nhau và ba thành phần ngẫu lực trong ba mặt phẳng tọa độ (H. 1–16b).



Hình 1-16

Liên kết thanh: Liên kết thanh được thực hiện nhờ các thanh thỏa mãn các điều kiện sau: Chỉ có lực tác dụng ở hai đầu, còn dọc thanh không có lực tác dụng và trọng lượng thanh không đáng kể. Những liên kết tại hai đầu thanh được thực hiện nhờ bản lề trụ, cầu,... Dựa theo tiên đề 1, phản lực liên kết thanh nằm dọc theo đường nối hai điểm đặt lực liên kết tại hai đầu thanh (H. 1–17).



Hình 1-17

Nói chung, liên kết có thể có kết cấu đa dạng. Để xác định phương chiều của phản lực liên kết trong trường hợp chung được hướng dẫn theo quy tắc sau: tương ứng với hướng di chuyển thẳng bị ngăn trở có phản lực ngược chiều, tương ứng với hướng di chuyển quay bị ngăn trở có ngẫu phản lực ngược chiều.

1.3. CÁC HỆ QUẢ

Từ hệ tiên đề ta suy ra các kết quả sau.

1.3.1. HỢP CÁC LỰC ĐỒNG QUY

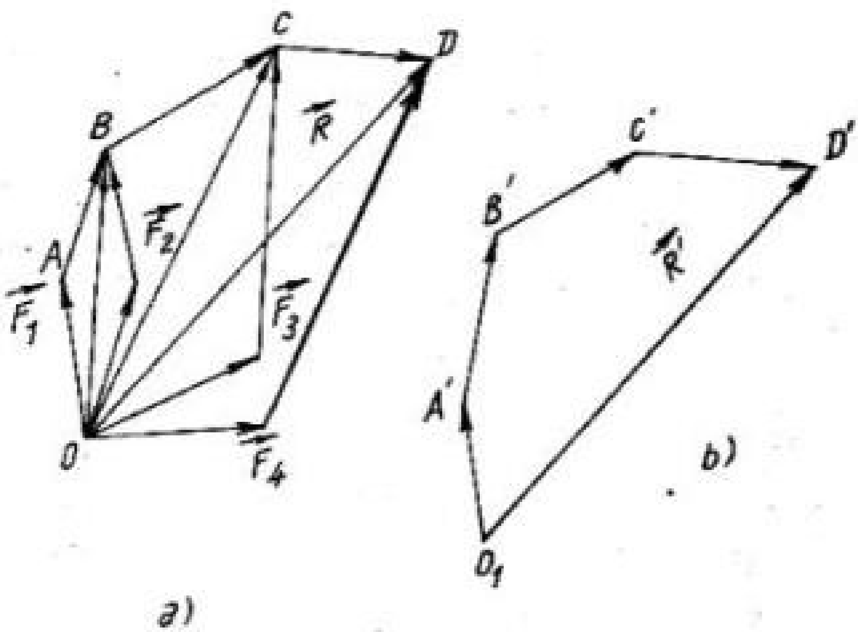
Giả sử có hệ lực đặt tại O (trường hợp hệ lực có các đường tác dụng đi qua O thì áp dụng hệ quả trượt lực có thể đưa về trường hợp này). Áp dụng trực tiếp tiên đề 3 ta tìm được hợp lực $\vec{R}$, nó đi qua điểm đồng quy và có dạng (H. 1–18a).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (1-7)$$

Để xác định phương chiều và giá trị của hợp lực $\vec{R}$ của hệ lực đồng quy có thể dùng phương pháp vẽ hoặc chiếu (tức tìm các hình chiếu của hợp lực trên ba trục tọa độ vuông góc).

1. Phương pháp vẽ

Như đã thấy trên hình 1–18a vectơ hợp lực $\vec{R}$ là vectơ khép kín của đa giác OABCD, các cạnh của nó là những vectơ song song, cùng chiều và có cùng trị số với các vectơ biểu diễn các lực thành phần. Đa giác OABCD được gọi là đa giác lực.



Hình 1–18

Chú ý rằng đa giác lực được vẽ xuất phát không bắt buộc từ điểm đồng quy O của hệ lực mà có thể từ điểm O_1 tùy ý (H. 1–18b). Vậy : *Hợp lực của hệ lực đồng quy được biểu diễn bằng vectơ khép kín của đa giác lực đặt tại điểm đồng quy.*

2. Phương pháp chiếu

Từ biểu thức (1–7), hình chiếu của hợp lực $\vec{R}$ trên ba trục tọa độ vuông góc có dạng:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \qquad (1-8)$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$$

Từ đó dễ dàng xác định được phương chiếu và giá trị của hợp lực :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad (1-9)$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} \; ; \cos\beta = \frac{R_y}{R} \; ; \cos\gamma = \frac{R_z}{R} \qquad (1-10)$$

trong đó α, β, γ là góc hợp bởi vectơ $\vec{R}$ với các trục Ox, Oy, Oz.

Vectơ $\vec{R}' = \sum \vec{F}_k$, vectơ khép kín của đa giác lực, được gọi là vectơ chính của hệ lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$..., $\vec{F}_n$)

Vậy : *Hợp lực của hệ lực đồng quy được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực đặt tại điểm đồng quy.*

1.3.2. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG NGẪU LỰC

Định lí 1. *Hai ngẫu lực có vectơ mô men bằng nhau thì tương đương với nhau.*

Sự đúng đắn của định lí vừa nêu được rút ra từ hai tính chất sau :

1. Hai ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng, có cùng chiều quay và cùng trị số mô men thì tương đương với nhau.

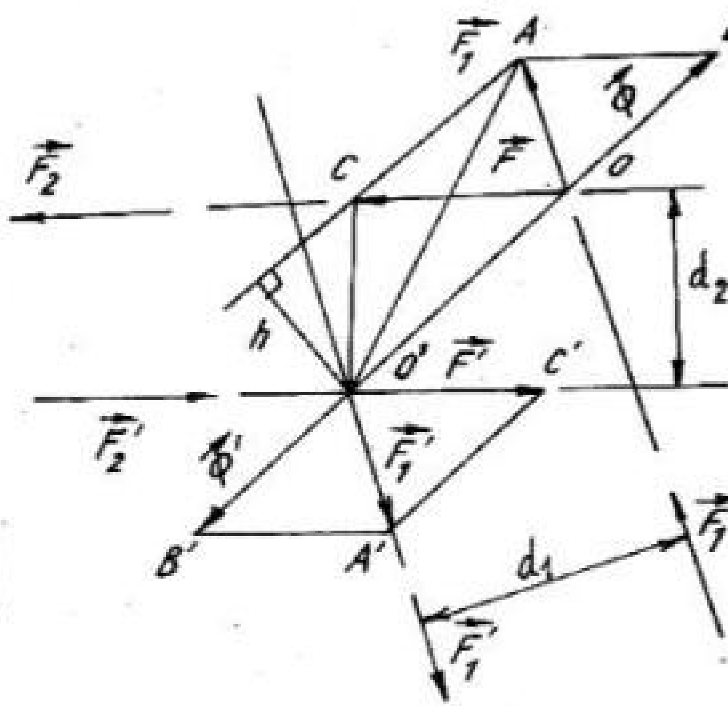
Xét hai ngẫu lực $(\vec{F_1}, \vec{F_1'})$ có mô men $\overline{M}_1 = + F_1d_1$ và ngẫu lực $(\vec{F_2}, \vec{F_2'})$ có mô men $\overline{M}_2 = + F_2d_2$.

Theo giả thiết:

$$F_1d_1 = F_2d_2$$

Giả sử đường tác dụng của các ngẫu lực giao nhau tại O và O' (H. 1-19).

Trượt lực $\vec{F_1}$ đến O và lực $\vec{F_1'}$ đến O', sau đó phân tích mỗi lực thành hai thành phần, một thành phần dọc OO', còn thành phần kia nằm trên đường tác dụng của ngẫu lực $(\vec{F_2}, \vec{F_2'})$.



Hình 1-19

Vì hai tam giác $\overset{\Delta}{OAB}$ và $\overset{\Delta}{O'A'B'}$ bằng nhau nên $\{(\vec{\phi}, \vec{\phi'})$ là hai lực cân bằng, còn $(\vec{F}, \vec{F'})$ tạo thành ngẫu lực, tức là :

$$(\vec{F_1}, \vec{F_1'}) \equiv (\vec{F}, \vec{F'}, \vec{\phi}, \vec{\phi'}) \equiv (\vec{F}, \vec{F'})$$

Do diện tích của hai tam giác $\overset{\Delta}{OO'C}$ và $\overset{\Delta}{OO'A}$ bằng nhau (có cùng đáy OO' và cùng chiều cao h vì CA song song với OO') nên hai ngẫu lực $(\vec{F_1}, \vec{F_1'})$ và $(\vec{F}, \vec{F'})$ có mô men bằng nhau và theo giả thiết, bằng mô men ngẫu lực $(\vec{F_2}, \vec{F_2'})$.

Vậy : $\quad F_1d_1 = F_2d_2 = F.d_2$

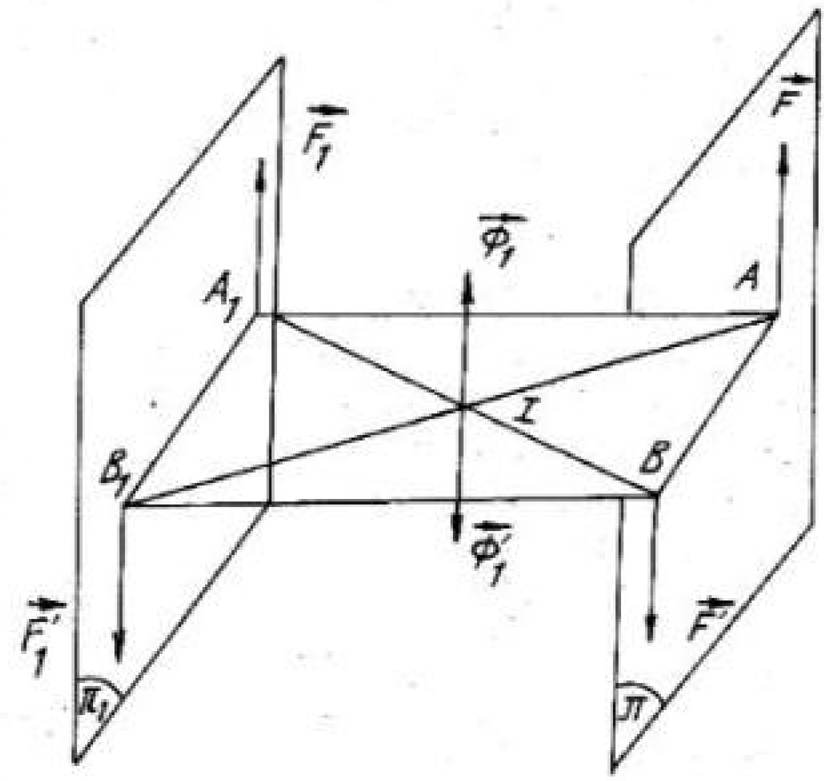
Từ đó : $\quad \vec{F} \equiv \vec{F_2}; \ \vec{F'} \equiv \vec{F_2'}$

Nghĩa là ta đã biến đổi ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$ thành ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}')$ tương đương với nó, mà ngẫu lực sau chính là ngẫu lực $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$.

Trong trường hợp đường tác dụng hai ngẫu lực không gặp nhau (tức song song với nhau) thì áp dụng tiên đề 2 thêm vào hai lực cân bằng, ta biến đổi một ngẫu lực thành ngẫu lực khác tương đương với nó và có đường tác dụng cắt đường tác dụng của ngẫu lực kia.

2. Tác dụng của ngẫu lực không thay đổi khi dời ngẫu lực đến những mặt phẳng song song.

Giả sử ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}')$ nằm trong mặt phẳng π. Lấy mặt phẳng π_1 song song với mặt phẳng π. Tại tâm I của hình chữ nhật ABA_1B_1 ta đặt thêm hai lực cân bằng $(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}'_1)$, trong đó lực $\vec{\phi}'_1$ song song cùng chiều với lực $\vec{F}'$ và có giá trị bằng giá trị lực $\vec{F}'$ (H. 1–20).



Hình 1–20

Như vậy

$$(\vec{F}, \vec{F}') \equiv (\vec{F}, \vec{\phi}'_1, \vec{F}', \vec{\phi}_1) \equiv (\vec{F}, \vec{\phi}'_1) \text{ và } (\vec{F}', \vec{\phi}_1)$$

Rõ ràng $(\vec{F}, \vec{\phi}'_1)$ và $(\vec{F}', \vec{\phi}_1)$ là hai ngẫu lực. Áp dụng tính chất 1, của định lí 1, ta dời các ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{\phi}'_1)$ và $(\vec{F}', \vec{\phi}_1)$ trong mặt phẳng tác dụng của chúng, chúng ta có hai ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{\phi}'_1)$ và $(\vec{F}'_1, \vec{\phi}_1)$ tương đương với hai ngẫu lực trên.

Khi chú ý rằng $(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_1')$ là hai lực cân bằng; ta có :

$$(\vec{F}, \vec{F}') \equiv (\vec{F}_1, \vec{\phi}_1') \text{ và } (\vec{F}_1', \vec{\phi}_1) \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{\phi}_1, \vec{\phi}_1') \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_1')$$

Ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ chính là ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}')$ dời đến mặt phẳng π_1.

Từ định lí trên ta đi đến các kết luận sau:

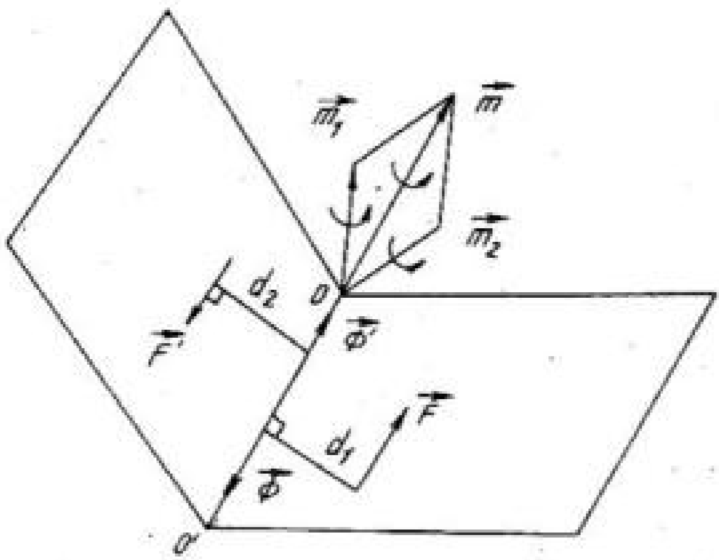
a) Vectơ mô men của ngẫu lực $\vec{m}$ là véctơ tự do

b) Tác dụng của ngẫu lực không thay đổi khi tác động lên nó các phép biến đổi không làm thay đổi vectơ mô men của nó (dời tùy ý ngẫu lực trong mặt phẳng tác dụng, dời đến các mặt phẳng song song, thay đổi cánh tay đòn và lực thành phần).

c) Tác dụng của ngẫu lực được đặc trưng hoàn toàn bằng vectơ mô men của nó.

Định lí 2. *Hợp hai ngẫu lực được một ngẫu lực có vectơ mô men bằng tổng các vectơ mô men của hai ngẫu lực đã cho.*

Chứng minh : Giả sử có hai ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ và $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ nằm trong hai mặt phẳng giao nhau theo giao tuyến OO' và có các vectơ mô men tương ứng là $\vec{M}_1$ và $\vec{M}_2$ đặt tại O (H. 1 – 21).



Hình 1-21

Biến đổi hai ngẫu lực trên thành hai ngẫu lực có các lực thành phần nằm trên giao tuyến OO', ngược chiều nhau và có cùng trị số :

$$|\vec{F}| = |\vec{\varphi}| = |\vec{\varphi}'| = \frac{|\vec{M}_1|}{d_1} = \frac{|\vec{M}_2|}{d_2}$$

Khi chú ý $(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}')$ là hai lực cân bằng, ta có :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_2, \vec{F}_2') \equiv (\vec{F}, \vec{F}', \vec{\varphi}, \vec{\varphi}') \equiv (\vec{F}, \vec{F}')$$

Vậy hợp hai ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ và $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ ta được ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}')$, vectơ mô men của nó kí hiệu là $\vec{M}$.

Theo định lí liên hệ giữa mô men ngẫu lực và mô men một lực đối với một điểm ta có :

$$\vec{M}_1 = \vec{m}_o(\vec{F});\ \vec{M}_2 = \vec{m}_o(\vec{F}');\ \vec{M} = \vec{m}_o(\vec{F}) + \vec{m}_o(\vec{F}')$$

Từ đó suy ra : $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$

Tổng quát : Hợp n ngẫu lực được một ngẫu lực có vectơ mômen bằng tổng các vectơ mô men của các ngẫu lực đã cho :

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k \qquad (1 - 11)$$

Chú ý : khi các ngẫu lực nằm trong một mặt phẳng, các vectơ mô men của các ngẫu lực đã cho có phương song song với nhau, nên công thức (1 – 11) được thay bằng :

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k \qquad (1 - 12)$$

Vậy : Hợp các ngẫu lực nằm trong một mặt phẳng được một ngẫu lực nằm trong cùng mặt phẳng, có mô men đại số bằng tổng đại số các mô men của các ngẫu lực đã cho.

CHƯƠNG 2

HỆ LỰC KHÔNG GIAN

Hệ lực không gian là hệ lực có đường tác dụng các lực nằm tùy ý trong không gian.

Hệ lực không gian là hệ lực tổng quát nhất. Vì vậy các kết quả nhận được khi khảo sát hệ lực không gian dễ dàng áp dụng cho các hệ lực đồng quy, hệ ngẫu lực, hệ lực song song, hệ lực phẳng, chúng được xem như là các trường hợp riêng.

Hai vấn đề chính được khảo sát trong hệ lực không gian.

– Thu gọn hệ lực không gian về dạng tối giản (dạng chuẩn).

– Tìm điều kiện cân bằng của hệ lực không gian.

Phương pháp khảo sát hệ lực không gian trong tĩnh học là phương pháp hình học, dựa trên hai đặc trưng hình học của nó là vectơ chính và mô men chính.

2.1. VECTƠ CHÍNH VÀ MÔ MEN CHÍNH CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

2.1.1. VECTƠ CHÍNH CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

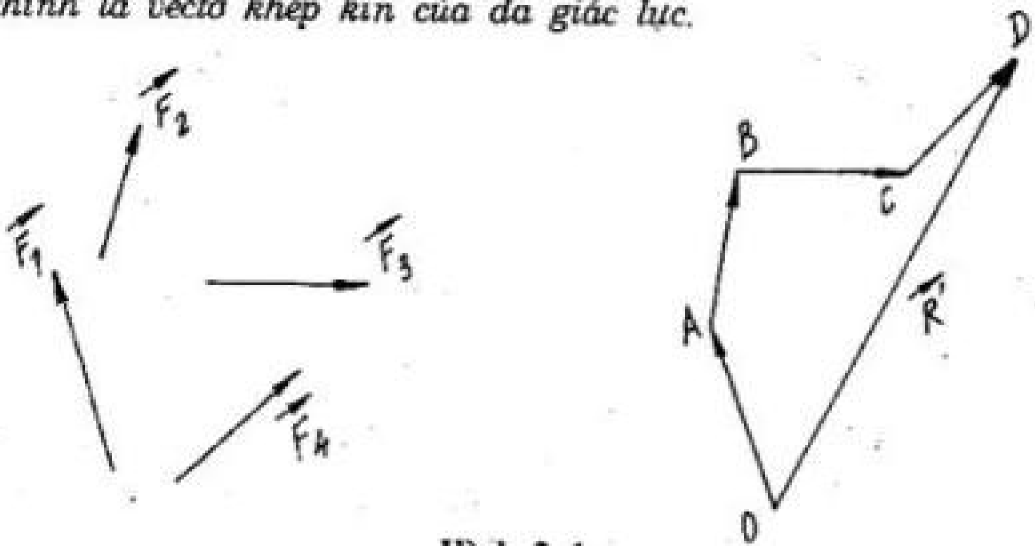
1. Định nghĩa

Vectơ chính của hệ lực không gian, kí hiệu $\vec{R}'$, là tổng hình học của các vectơ biểu diễn các lực của hệ lực.

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (2-1)$$

2. Phương pháp xác định vectơ chính

a) *Phương pháp vẽ:* để xác định vectơ chính có thể vẽ (trên hình vẽ xét hệ lực gồm bốn lực) đa giác lực. Muốn vậy, từ một điểm bất kì ta vẽ nối tiếp những vectơ song song cùng chiều và có trị số bằng các vectơ biểu diễn các lực của hệ lực. Đường gãy khúc nhận được gọi là đa giác lực. Vectơ $\overrightarrow{OD}$ được gọi là vectơ khép kín đa giác lực, (H. 2– 1). Vậy : *Vectơ chính của hệ lực chính là vectơ khép kín của đa giác lực.*



Hình 2-1

Trong trường hợp hệ lực phẳng, đa giác lực là đa giác phẳng, còn trong trường hợp hệ lực không gian, đa giác lực, nói chung là đa giác ghềnh.

b) Phương pháp chiếu

Dựa vào công thức (2 – 1), vectơ chính có thể được xác định qua các hình chiếu của nó theo các hình chiếu của các lực của hệ lực trên các trục tọa độ vuông góc Oxyz.

$$\vec{R}' \begin{cases} R'_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ R'_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ R'_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{cases} \qquad (2-1')$$

Từ đó mô đun và phương chiều của vectơ chính được xác định theo công thức :

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z} \qquad (2-2)$$

$$\cos\alpha = \frac{R'_x}{R'} \; ; \; \cos\beta = \frac{R'_y}{R'} \; ; \; \cos\gamma = \frac{R'_z}{R'} \qquad (2-3)$$

trong đó : α, β, γ là góc hợp bởi vectơ chính với các trục tọa độ.

Như vậy, vectơ chính là vectơ tự do.

2.1.2. MÔ MEN CHÍNH CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN ĐỐI VỚI MỘT TÂM

1. Định nghĩa

Mô men chính của hệ lực không gian đối với tâm O, kí hiệu $\vec{M}^o$ là một vectơ bằng tổng hình học các vectơ mô men của các lực thuộc hệ lực đối với tâm O:

$$\vec{M}^o = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}^o(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k \qquad (2-4)$$

2. Phương pháp xác định

a) Phương pháp vẽ: dựa vào công thức (2 – 4) ta thấy ngay rằng vectơ mô men chính của hệ lực đối với tâm O là vectơ khép kín của đa giác vectơ, có các cạnh là các vectơ song song cùng chiều và có trị số bằng các vectơ mô men của các lực đối với điểm O. Đa giác vectơ đó được gọi là đa giác vectơ mô men, được xây dựng tương tự đa giác lực, ở đó các lực được thay bằng mô men của nó đối với tâm O. Vậy : *Mô men chính của hệ lực đối với một tâm bằng vectơ khép kín của đa giác vectơ mô men.*

b) Phương pháp chiếu: gọi hình chiếu của vectơ mô men chính của hệ lực đối với tâm O trên hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz lần lượt là $\overline{M}^{Ox}$, $\overline{M}^{Oy}$, $\overline{M}^{Oz}$ và áp dụng định lí liên hệ giữa mô men của lực đối với một điểm và mô men của lực đối với một trục, ta có :

$$\vec{M}^O \begin{cases} \overline{M}^{Ox} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{Ox}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_x(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}) \\ \overline{M}^{Oy} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{Oy}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_y(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}) \\ \overline{M}^{Oz} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{Oz}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_z(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}) \end{cases}$$

trong đó : x_k, y_k, z_k là tọa độ của điểm đặt của lực $\vec{F}_k$; F_{kx}; F_{ky}; F_{kz} lần lượt là hình chiếu của lực $\vec{F}_k$ trên các trục Ox, Oy, Oz.

3. Định lí biến thiên mô men chính

Vectơ mô men chính của hệ lực đối với tâm O, thay đổi khi tâm O thay đổi. Ta có:

Định lí : *Biến thiên mô men chính của hệ lực khi tâm lấy mô men thay đổi từ O đến O'. bằng mô men của vectơ chính đặt tại O lấy đối với điểm O':*

$$\vec{M}^{O'} - \vec{M}^{O} = \vec{m}_{O'}(\vec{R}'_O) \qquad (2-5)$$

Chứng minh: theo định nghĩa mô men chính của hệ lực đối với một tâm [xem công thức (2 – 4), ta có (H. 2 – 2)] :

$$\vec{M}^{O'} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_{O'}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r'}_k \wedge \vec{F}_k$$

$$\vec{M}^{O} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_{O}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k$$

Vậy :

$$\vec{M}^{O'} - \vec{M}^{O} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r'}_k \wedge \vec{F}_k) - \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \wedge \vec{F}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\vec{r'}_k - \vec{r}_k) \wedge \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}_k =$$

$$= \overrightarrow{O'O} \wedge \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R'} = \vec{m}_{O'}(\vec{R}'_O)$$

Đó là điều cần chứng minh.

Trong trường hợp hệ lực phẳng, khi sử dụng công thức (2 – 4) để tính mô men chính của hệ lực đối với tâm O nằm trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực, ta có :

$$\overline{M}^{O} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (2-6)$$

Vậy : *Mô men chính của hệ lực phẳng đối với tâm O là lượng đại số bằng tổng đại số các mô men của các lực của hệ lực đối với tâm O.*

2.2. THU GỌN HỆ LỰC KHÔNG GIAN

2.2.1. THU GỌN HỆ LỰC KHÔNG GIAN VỀ TÂM O

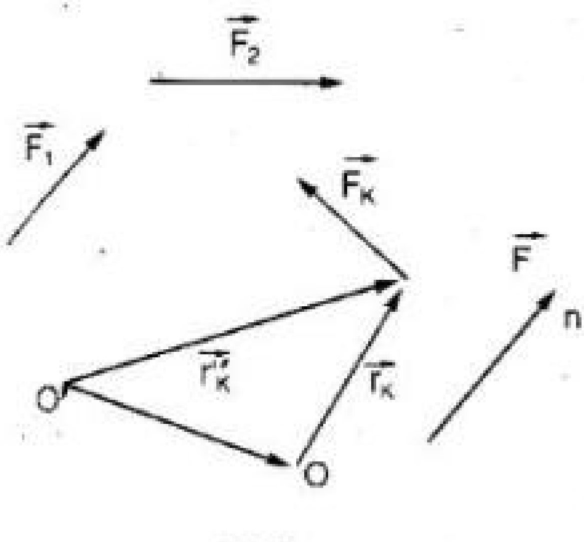
1. Định lí dời lực song song

Lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với lực $\vec{F'}$ song song cùng chiều, cùng cường độ với lực $\vec{F}$ nhưng đặt tại O và một ngẫu lực có mô men bằng mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O.

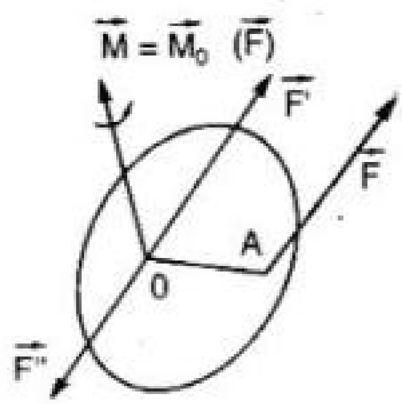
Chứng minh. Áp dụng tiên đề 2, đặt tại O hai lực cân bằng $(\vec{F'}, \vec{F''})$, trong đó lực $\vec{F'}$ có cùng phương chiều và cường độ với lực $\vec{F}$. Ta có:

$$\vec{F} \equiv (\vec{F'}, \vec{F}, \vec{F''}) \equiv \vec{F'} \text{ và } (\vec{F}, \vec{F''})$$

Lực $\vec{F'}$ chính là lực $\vec{F}$ dời song song đến O, còn hệ gồm hai lực $(\vec{F}, \vec{F''})$ là ngẫu lực, có vectơ mô men $\vec{M} = \vec{m}_O(\vec{F})$, (H. 2 – 3). Đó là điều cần chứng minh.



Hình 2-2



Hình 2-3

Nhận xét : Vectơ mô men ngẫu lực $\vec{M} = \vec{m}_O(\vec{F})$ vuông góc với lực $\vec{F}$, tức lực $\vec{F}$ nằm trong mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực. Vậy hệ lực gồm một lực $\vec{F}$ và ngẫu lực có vectơ mô men $\vec{M}$ vuông góc với $\vec{F}$ (tức ngẫu lực và lực cùng nằm trong một mặt phẳng) sẽ tương đương với một lực, tức có hợp lực $\vec{R} = \vec{F}$ và $\vec{m}_O(\vec{R}) = \vec{M}$.

2. Thu gọn hệ lực không gian về một tâm

Giả sử có hệ lực không gian ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$). Để thu gọn hệ lực này về tâm O ta lần lượt thu gọn từng lực về tâm O nhờ áp dụng định lí dời lực song song.

Cụ thể, (H. 2 – 4) :

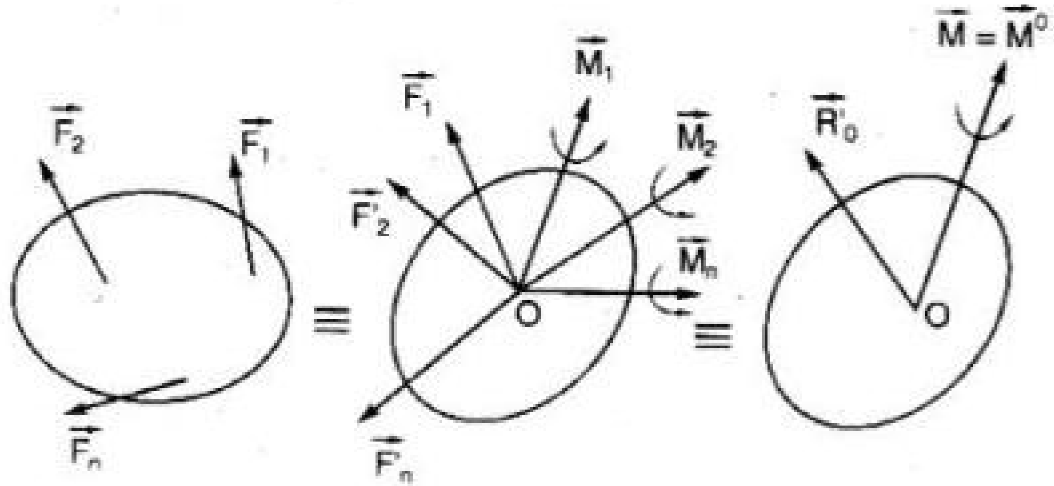
$\vec{F}_1 = \vec{F}'_1$ và ngẫu lực $\vec{M}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)$

$\vec{F}_2 = \vec{F}'_2$ và ngẫu lực $\vec{M}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)$

......

$\vec{F}_n = \vec{F}'_n$ và ngẫu lực $\vec{M}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n)$.

Vậy hệ lực đã cho ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$) tương đương với hệ lực đồng quy tại O ($\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \ldots, \vec{F}'_n$) và hệ ngẫu lực ($\vec{M}_1, \vec{M}_2, \ldots, \vec{M}_n$).



Hình 2–4

Như đã biết hệ lực đồng quy có hợp lực qua O, được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực đặt tại O.

Gọi $\vec{R}'_O$ là hợp lực của hệ lực đồng quy, ta có :

$$\vec{R}'_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}'_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{R}'.$$

khi dựa vào (2 – 1).

Hệ ngẫu lực $(\vec{M}_1, \vec{M}_2, ..., \vec{M}_n)$, như đã chứng minh, tương đương với một ngẫu lực, có vectơ mô men $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + ... + \vec{m}_O(\vec{F}_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \vec{M}^O$$

khi dựa vào (2 – 4).

Tâm O được gọi là tâm thu gọn. Ta có định lí sau :

Định lí : *Hệ lực không gian bất kì tương đương với một lực và một ngẫu lực đặt tại một điểm tùy ý, chúng được gọi là lực thu gọn và ngẫu lực thu gọn. Lực thu gọn được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực đặt tại tâm thu gọn, còn ngẫu lực thu gọn có vectơ mô men bằng mô men chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.*

3. Các bất biến của hệ lực không gian

Kết quả thu gọn của hệ lực không gian về một tâm được biểu diễn qua vectơ chính và mô men chính của hệ lực. Vectơ chính của hệ lực rõ ràng không biến đổi khi tâm thu gọn thay đổi. Vậy:

Vectơ chính là một đại lượng bất biến (bất biến thứ nhất) của hệ lực không gian.

Mô men chính của hệ lực phụ thuộc vào tâm thu gọn. Sự biến thiên của mô men chính khi tâm thu gọn thay đổi tuân theo công thức (2 – 5):

$$\vec{M}^{O'} - \vec{M}^{O} = \vec{m}_{O'}(\vec{R}_O)$$

Khi chú ý rằng vectơ chính là đại lượng bất biến (có phương chiều và mô đun không đổi) và vuông góc với $\vec{m}_{O'}(\vec{R'}_O)$, ta có:

$$\vec{M}^{O'}.\vec{R}_O - \vec{M}^{O}.\vec{R}_O = \vec{m}_{O'}(\vec{R}_O).\vec{R}_O = 0 \quad \text{tức là :}$$

$$\vec{M}^{O'}.\vec{R}_{O'} = \vec{M}^{O}.\vec{R}_O = \text{hằng} \qquad (2-7)$$

là đại lượng bất biến (bất biến thứ hai) của hệ lực không gian, tức tích vô hướng của vectơ chính và mô men chính là đại lượng bất biến.

Bất biến thứ hai của hệ lực không gian biểu diễn tính chất sau :

Hình chiếu của vectơ mô men chính lên phương vectơ chính là đại lượng không đổi.

Cần chú ý rằng bất biến thứ hai có ý nghĩa chỉ khi bất biến thứ nhất khác không. Trong trường hợp bất biến thứ nhất bằng không thì mô men chính của hệ lực là đại lượng bất biến. Điều này rút ra trực tiếp từ định lí biến thiên mô men chính.

2.2.2. CÁC TRƯỜNG HỢP XẢY RA

Khi thu gọn hệ lực không gian về một tâm O cho trước có thể gặp các trường hợp sau:

1) $\vec{R'_O} = \vec{0}$; $\vec{M}^O = \vec{0}$, tức khi thu gọn hệ lực không gian về O, lực thu gọn và ngẫu lực thu gọn đều bằng không. Khi đó ta nói rằng hệ lực không gian tương đương không tại O, tức hệ lực không gian cân bằng.

2). $\vec{R'_O} = \vec{0}$; $\vec{M}^O \neq \vec{0}$; tức hệ lực không gian đã cho tương đương với một ngẫu lực tại O, có vectơ mô men bằng mô men chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

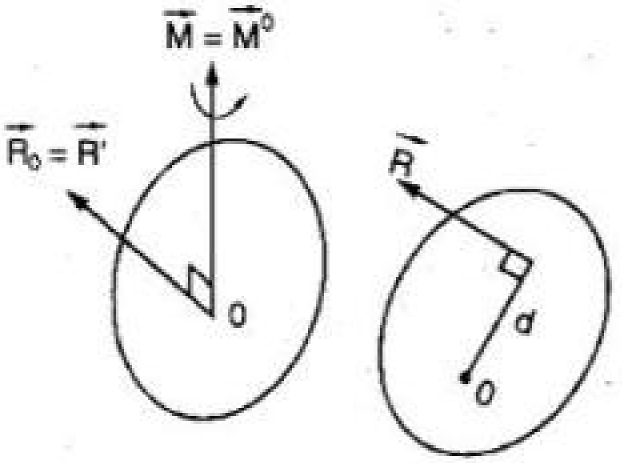
3). $\vec{R'_O} \neq \vec{0}$; $\vec{M}^O = \vec{0}$, trong trường hợp này hệ lực không gian tương đương với một lực tại O, tức hệ lực không gian có hợp lực được biểu diễn bằng vectơ chính đặt tại O.

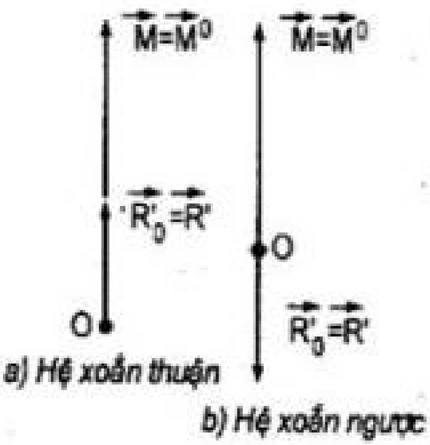
4). $\vec{R'_O} \neq \vec{0}$, $\vec{M}^O \neq \vec{0}$, tức lực thu gọn và ngẫu lực thu gọn tại tâm thu gọn đều khác không.

Trong trường hợp này tùy thuộc quan hệ giữa lực thu gọn và ngẫu lực thu gọn (mặt phẳng của ngẫu lực thu gọn) ta sẽ có các kết quả khác nhau. Cụ thể:

a). $\vec{R'_O} \perp \vec{M}^O$, tức lực thu gọn nằm trong mặt phẳng của ngẫu lực thu gọn. Như đã biết, hệ lực như vậy có hợp lực $\vec{R}$, phương, chiều và cường độ của nó được biểu diễn bằng phương chiều và giá trị của vectơ chính và nằm cách tâm thu gọn O một khoảng cách d (H. 2 – 5) :

$$d = \frac{|\vec{M}^O|}{R'}$$





Hình 2-5 **Hình 2-6**

b) $\vec{R}'_O \parallel \vec{M}^O$, trong trường hợp này lực thu gọn có phương vuông góc với mặt phẳng ngẫu lực. Hệ lực như vậy được gọi là hệ xoắn (H. 2–6), hệ xoắn thuận nếu vectơ lực thu gọn và vectơ mô men ngẫu lực thu gọn song song cùng chiều (H. 2–6a) và hệ xoắn ngược trong trường hợp hai vectơ đó song song ngược chiều (H. 2– 6b). Dễ dàng chỉ ra rằng hệ xoắn tương đương với hai lực chéo nhau. Trục có phương song song với vectơ chính đi qua O được gọi là trục xoắn (H. 2–6).

c) $\angle(\vec{R}'_O, \vec{M}^O) = \alpha \neq k\frac{\pi}{2}$; k = 0, 1, 2... Trường hợp này lực thu gọn và vectơ mô men của ngẫu lực thu gọn hợp với nhau bởi góc nhọn hoặc góc tù, tức lực thu gọn không nằm trong mặt phẳng hoặc không vuông góc với mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực thu gọn. Hệ lực đã cho trong trường hợp này tương đương với một hệ xoắn, nhưng trục xoắn không qua tâm thu gọn.

Để chứng minh điều này ta phân ngẫu lực $\vec{M}^O$ thành hai ngẫu lực $\vec{M}_1^O$ và $\vec{M}_2^O$, trong đó $\vec{M}_1^O$ theo phương vectơ chính còn $\vec{M}_2^O$ vuông góc với phương vectơ chính. Như vậy, lực thu gọn $\vec{R}'_O$ nằm trong mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực $\vec{M}_2^O$ nên hệ lực gồm $\vec{R}'_O$ và $\vec{M}_2^O$ tương đương với một lực có cùng phương, chiều và cường độ với lực thu gọn $\vec{R}'_O$ nhưng đặt tại điểm O_1 cách đường tác dụng của lực thu gọn $\vec{R}'_O$ một đoạn:

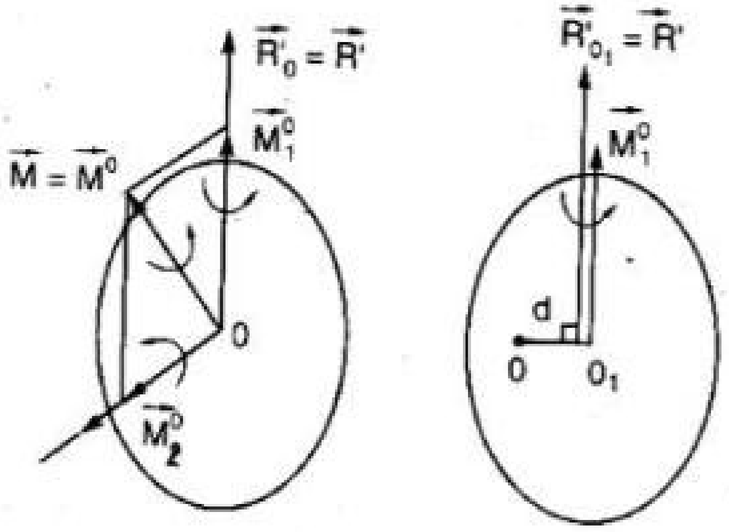
$$d = \frac{|\vec{M}_2^O|}{R'}$$

Như vậy hợp lực của hệ $(\vec{R}'_O, \vec{M}_2^O)$ được biểu diễn bằng vectơ chính đặt tại O_1. Do đó :

$$(\vec{M}^O, \vec{R}'_O) \equiv (\vec{M}_1^O, \vec{M}_2^O, \vec{R}'_O) \equiv (\vec{M}_1^O, \vec{R}'_{O_1})$$

Chú ý rằng vectơ mô men ngẫu lực là vectơ tự do, nên hệ $(\vec{M}_1^O, \vec{R}'_{O_1})$ là hệ xoắn có trục xoắn qua điểm O_1 (H. 2 – 7).

Đó là điều cần chứng minh.



Hình 2-7

2.2.3. CÁC DẠNG CHUẨN CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

Dựa vào kết quả thu gọn hệ lực về một tâm và các bất biến của hệ lực không gian, ta nhận được các tiêu chuẩn về các dạng chuẩn của hệ lực không gian :

1). $\vec{R}' = \vec{0}$, $\vec{M}^O = \vec{0}$, hệ lực không gian cân bằng.

2) $\vec{R}' = \vec{0}, \vec{M}^O \neq \vec{0}$, hệ lực không gian tương đương với một ngẫu lực (không phụ thuộc tâm thu gọn).

3) $\vec{R}' \neq \vec{0}, \vec{M}^O.\vec{R}' = 0$, hệ lực không gian tương đương với một lực, tức hệ lực không gian có hợp lực.

4) $\vec{R}' \neq \vec{0}, \vec{M}^O\vec{R}' \neq 0$, hệ lực không gian tương đương với một hệ xoắn.

Đó là bốn dạng chuẩn (tối giản) của hệ lực không gian.

Trong trường hợp hệ lực không gian có hợp lực, ta có định lí sau:

Định lí Varinhông : *Trong trường hợp hệ lực không gian có hợp lực thì mô men của hợp lực đối với một tâm bất kì bằng tổng mô men của các lực thành phần đối với tâm ấy.*

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (2-8)$$

Chứng minh. Giả sử hệ lực có hợp lực, kí hiệu là $\vec{R}$, viết định lí biến thiên mô men chính cho tâm thu gọn O bất kì và tâm thu gọn O_1 nằm trên đường tác dụng của hợp lực $\vec{R}$, ta có :

$$\vec{M}^O - \vec{M}^{O_1} = \vec{m}_O(\vec{R}_{O_1})$$

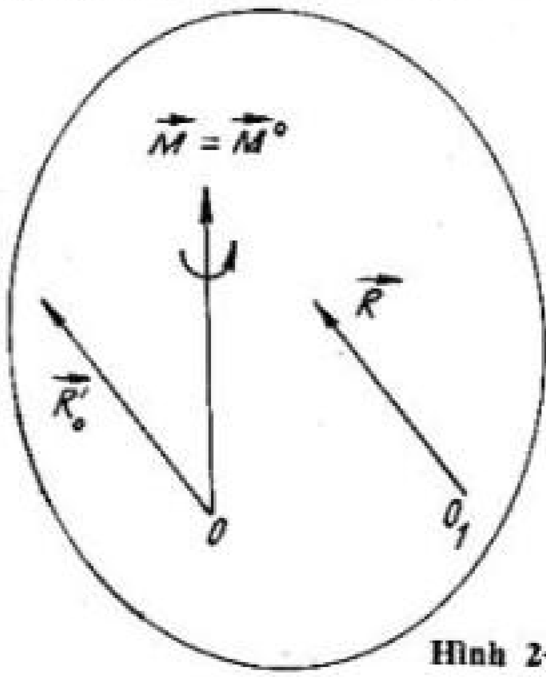
Chú ý rằng mô men chính của hệ lực đối với tâm thu gọn nằm trên đường tác dụng của hợp lực là bằng không theo định nghĩa của hợp lực, là lực duy nhất tương đương với hệ lực, tức $\vec{M}^{O_1} = \vec{0}$; còn $\vec{R}'_{O_1}$ chính là hợp lực $\vec{R}$, (H. 2–8).

$$\vec{M}^O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k)$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \vec{m}_O(\vec{R})$$

Đó là điều cần chứng minh.



Hình 2–8

2.2.4. CÁC DẠNG CHUẨN CỦA CÁC HỆ LỰC ĐẶC BIỆT

1. Hệ lực đồng quy tại O

Vì $\qquad \overrightarrow{M}^O = \sum \overrightarrow{m}_O(\overrightarrow{F}_k) = 0$, nên $\overrightarrow{M}^O \cdot \overrightarrow{R}' = 0$.

Vậy hệ lực đồng quy hoặc cân bằng hoặc có hợp lực.

2. Hệ ngẫu lực

Vectơ chính của hệ ngẫu lực luôn luôn bằng không

$$\overrightarrow{R}' = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F}_k = \overrightarrow{0}$$

Nên hệ ngẫu lực hoặc cân bằng hoặc tương đương với một ngẫu lực.

3. Hệ lực song song

Vectơ chính của hệ lực song song $\overrightarrow{R}' = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F}_k$ có phương song song với các lực thành phần.

Ngoài ra, $\overrightarrow{m}_O(\overrightarrow{F}_k)$ vuông góc với lực $\overrightarrow{F}_k$, tức vuông góc với phương của vectơ chính $\overrightarrow{R}'$. Do đó mô men chính của hệ lực :

$$\overrightarrow{M}^O = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_O(\overrightarrow{F}_k).$$

cũng vuông góc với phương của vectơ chính $\overrightarrow{R}'$.

Vậy : $$\overrightarrow{M}^O \cdot \overrightarrow{R}' = 0$$

Do đó các hệ lực song song có các dạng chuẩn là: cân bằng, ngẫu lực, hợp lực.

Trong trường hợp hệ lực song song cùng chiều, vectơ chính :

$$\overrightarrow{R}' = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F}_k \neq 0,$$

nên hệ lực chỉ có một dạng chuẩn, là hợp lực.

4. Hệ lực phẳng

Lấy tâm thu gọn nằm trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực, ta có $\overrightarrow{m}_O(\overrightarrow{F}_k)$ và do đó $\overrightarrow{M}^O = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_O(\overrightarrow{F}_k)$ vuông góc với mặt phẳng tác dụng của hệ lực. Vectơ chính của hệ lực $\vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ song song với mặt phẳng tác dụng của hệ lực.

Do đó $$\vec{M}^O . \vec{R}' = 0$$

Vậy hệ lực phẳng có các dạng chuẩn như sau: cân bằng, ngẫu lực và hợp lực.

Hệ lực phẳng cân bằng khi vectơ chính và mô men chính của hệ lực đối với một điểm đều bằng không, tức :

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{0}\ ; \quad \overline{M}^O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\vec{F}_k) = 0$$

Hệ lực phẳng tương đương với một ngẫu lực khi vectơ chính của hệ lực bằng không, còn mô men chính của hệ lực đối với một điểm khác không.

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{0}\ ; \quad \overline{M}^O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\vec{F}_k)) \neq 0$$

Ngẫu lực thu gọn có mô men (đại số) bằng tổng đại số các mô men của các lực thành phần đối với một điểm bất kì, tức không phụ thuộc vào điểm lấy mô men. Điều này được rút ra từ định lí biến thiên mô men chính.

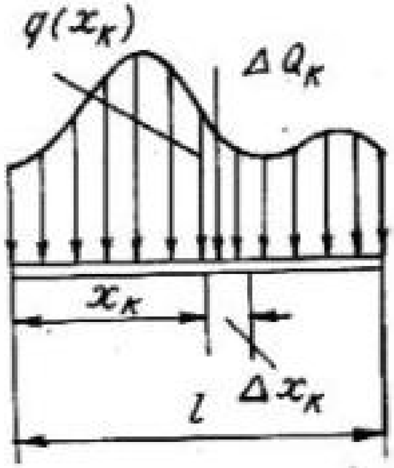
Hệ lực phẳng có hợp lực khi vectơ chính của hệ lực khác không. Hợp lực $\vec{R}$ của hệ lực được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực, nằm cách điểm O một đoạn d:

$$d = \frac{\left| \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\vec{F}_k) \right|}{R'}$$ sao cho

$$\overline{m}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\vec{F}_k)$$

5. Hệ lực phân bố

Xét một dầm thẳng chịu tác dụng của hệ lực song song phân bố theo quy luật (H. 2–9) :



Hình 2-9

$$q(x) = \lim \frac{\Delta q}{\Delta x}$$

được gọi là cường độ của phân bố lực trên dầm theo chiều dài. Để đơn giản ta chỉ xét trường hợp của cường độ phân bố lực có biểu đồ như hình 2-9.

Hệ lực phân bố có thể được xem là trường hợp giới hạn của hệ lực tập trung (hệ lực phẳng song song cùng chiều), với các lực tập trung $\vec{F}_k$:

$$F_k = \Delta Q_k = q(x'_k)\,\Delta x_k \text{ với } x_k < x'_k < x_{k+1}$$

Vectơ chính của hệ lực song song cùng chiều, cùng phương với các lực $\vec{F}_k$ và có giá trị :

$$R' = \sum F_k = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum q(x'_k)\,\Delta x_k = \int_0^l q(x)\,dx$$

Chú ý rằng tích phân trên biểu diễn diện tích của biểu đồ phân bố lực.

Mô men chính của hệ lực $(\vec{F}_k)$ đối với một điểm nào đó, chẳng hạn, đối với điểm đầu mút của dầm sẽ bằng :

$$\overline{M}^O = \sum \overline{m}_O\,(\vec{F}_k) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum q\,(x'_k)\,x_k\,\Delta x_k = \int_0^l q(x)\,x dx$$

Vậy hệ lực phân bố có hợp lực $\vec{R}$ hướng thẳng đứng xuống, có trị số :

$$R = \int_0^l q(x)\,dx \qquad (2-9)$$

và cách đầu mút của dầm một đoạn d

$$d = \frac{\int_0^l q(x)\,x dx}{\int_0^l q(x)\,dx} \qquad (2-10)$$

Xét hai trường hợp riêng sau:

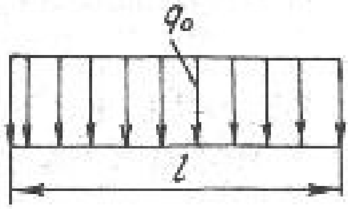
a) Cường độ phân bố lực đều, tức $q(x) = q_o$ = hằng (H. 2-10).

Trị số của hợp lực tính theo công thức (2 - 9) bằng :

$$R = \int_0^l q_o dx = q_o l$$

và hợp lực cách đầu mút dầm một đoạn d :

$$d = \frac{\int_0^l q_o x dx}{q_o l} = \frac{1}{2}$$



Hình 2-10

Vậy hợp lực đặt tại điểm giữa của dầm và có trị số bằng diện tích của hình chữ nhật phân bố lực.

b) Cường độ phân bố lực tuyến tính

Giả sử lực phân bố dọc dầm theo luật tam giác có đáy là q_o.

Rõ ràng:

$$q(x) = q_o \frac{x}{l}$$

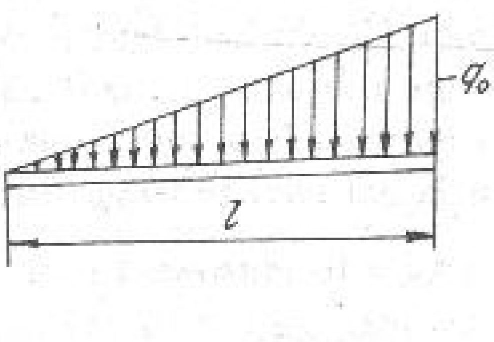
Công thức (2 - 9) cho ta trị số của hợp lực $\vec{R}$

$$R = \int_0^l q_o \frac{x}{l} dx = \frac{1}{2} q_o l$$

và hợp lực cách đầu mút dầm một đoạn d :

$$d = \frac{\int_0^l q_o \frac{x}{l} x dx}{\frac{1}{2} q_o l} = \frac{\frac{q_o l^2}{3}}{\frac{1}{2} q_o l} = \frac{2}{3} l$$

Vậy hệ lực phân bố tam giác có hợp lực có trị số bằng $R = \frac{1}{2} q_o l$ (diện tích của tam giác phân bố lực) và cách đỉnh của tam giác phân bố lực một đoạn bằng $\frac{2}{3} l$ (tức đi qua trọng tâm của tam giác phân bố lực).



Hình 2-11

Qua hai thí dụ về phân bố lực hằng và lực tuyến tính và từ công thức (2 – 9) và (2 – 10) có thể đi đến kết luận sau:

Hệ lực phân bố có phương chiều song song với phương chiều của các lực phân bố có giá trị bằng diện tích (với tỉ lệ xích nào đó) của biểu đồ phân bố lực và đi qua trọng tâm của biểu đồ.

2.3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

2.3.1. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là vectơ chính và mô men chính của hệ lực đối với một điểm bất kì phải đồng thời triệt tiêu :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv 0 \longleftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{0} \\ \\ \vec{M}^O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \vec{0} \end{cases} \qquad (2-11)$$

Chứng minh. Điều kiện cần được chứng minh nhờ dựa vào các dạng chuẩn của hệ lực không gian. Thực vậy, nếu điều kiện (2– 11) không được thỏa mãn thì hệ lực không gian hoặc tương đương với một ngẫu lực hoặc một hợp lực hoặc một hệ xoắn, tức không thỏa mãn tiên đề 1, vậy hệ lực đã cho không cân bằng.

Điều kiện đủ là hiển nhiên vì vectơ chính của hệ lực bằng không, khi thu gọn hệ lực về một điểm bất kì ta được một ngẫu lực thu gọn bằng mô men chính của hệ lực đối với điểm O (định lí biến thiên mô men chính) tức bằng không. Vậy ngẫu lực thu gọn là hai lực cân bằng, theo tiên đề 1, hệ lực đã cho cân bằng.

2.3.2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

Từ điều kiện (2 – 11) ta có : *điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là tổng các hình chiếu của các lực trên* *ba trục tọa độ vuông góc và tổng mô men của các lực đối với ba trục ấy đều triệt tiêu.*

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad (2\text{-}12)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_x(\vec{F}_k) = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_y(\vec{F}_k) = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_z(\vec{F}_k) = 0$$

Muốn chứng minh ta chỉ cần chứng minh đây là điều kiện cần và đủ để có điều kiện (2 – 11). Đó là điều rõ ràng.

Các phương trình (2 – 12) được gọi là những phương trình cân bằng của hệ lực không gian.

2.3.3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA CÁC HỆ LỰC ĐẶC BIỆT

1. Hệ lực đồng quy

Điều kiện cần và đủ để hệ lực đồng quy cân bằng là vectơ chính của hệ lực triệt tiêu :

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{0}$$

hoặc $$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad (2\text{-}13)$$

trong đó : F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} (k = 1, 2, ..., n) là hình chiếu của các lực trên ba trục tọa độ vuông góc nhau.

Các phương trình (2 – 13) được gọi là những phương trình cân bằng của hệ lực đồng quy không gian.

Trong trường hợp hệ lực đồng quy phẳng, số phương trình cân bằng còn hai.

2. Hệ ngẫu lực

Điều kiện cần và đủ để hệ ngẫu lực ($\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$,..., $\vec{M}_n$) *cân bằng là ngẫu lực tổng cộng của nó triệt tiêu,* tức :

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = \vec{0}$$

Hoặc

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{M}_{kx} = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_{ky} = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_{kz} = 0 \ ; \qquad (2\text{-}14)$$

Các phương trình (2 – 14) được gọi là những phương trình cân bằng của hệ ngẫu lực.

Trong trường hợp hệ ngẫu lực phẳng, số phương trình cân bằng còn một..

3. Hệ lực song song

Trong trường hợp hệ lực song song, phương của vectơ chính của hệ lực đã được xác định (song song với các lực thành phần) còn mô men chính của hệ lực là vectơ nằm trong mặt phẳng xác định (mặt phẳng thẳng góc với phương các lực thành phần). Do đó:

Điều kiện cần và đủ để hệ lực song song cân bằng là tổng hình chiếu của các lực trên trục z song song với các lực thành phần và tổng mô men của các lực đối với hai trục vuông góc với nhau x, y (và vuông góc với trục z) triệt tiêu :

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{kz} = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_x(\overrightarrow{F_k}) = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_y(\overrightarrow{F_k}) = 0 \qquad (2\text{-}15)$$

Các phương trình (2 – 15) được gọi là những phương trình cân bằng của hệ lực song song không gian.

Đối với trường hợp hệ lực song song phẳng số phương trình cân bằng còn hai.

4. Hệ lực phẳng

Khi áp dụng điều kiện cân bằng (2 – 12) của hệ lực không gian cho hệ lực phẳng ta có:

Dạng 1 : *Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng hình chiếu của các lực trên hai trục tọa độ vuông góc và tổng mô men của các lực đối với điểm O bất kì bằng không :*

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{kx} = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{ky} = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overrightarrow{F_k}) = 0 \ . \qquad (2\text{-}16)$$

Chứng minh. Chọn hệ trục Oxyz có mặt phẳng Oxy là mặt phẳng tác dụng của các lực, tức trục Oz thẳng góc với mặt phẳng lực.

Rõ ràng là các phương trình :

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{kz} = 0 \; ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_x(\vec{F}_k) = 0 \; ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_y(\vec{F}_k) = 0$$

sẽ tự thỏa mãn, và vì trục Oz vuông góc với mặt phẳng chứa lực nên:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_z(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\vec{F}_k) = 0$$

Vậy hệ phương trình cân bằng của hệ lực phẳng là :

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{kx} = 0 \; ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{ky} = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\vec{F}_k) = 0$$

với điều kiện là các trục x, y vuông góc với nhau.

Các phương trình (2 – 16) được gọi là các phương trình cân bằng của hệ lực phẳng (dạng 1).

Dạng 2 : *Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mô men của các lực đối với hai điểm A, B và tổng các hình chiếu của các lực trên trục không vuông góc với đoạn AB bằng không :*

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_A(\vec{F}_k) = 0 \; ; \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \; ; \; \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \; ; \qquad (2\text{–}17)$$

với điều kiện trục x không vuông góc với đoạn AB.

Chứng minh : Điều kiện cần được chứng minh tương tự như trường hợp hệ lực không gian, nhờ dựa vào các dạng chuẩn của hệ lực. Nếu các điều kiện không được thỏa mãn thì hệ lực phẳng hoặc tương đương với một ngẫu lực hoặc có hợp lực, tức không thỏa mãn tiên đề 1, nghĩa là hệ lực không cân bằng.

Để chứng minh điều kiện đủ ta lí luận như sau :

Từ điều kiện tổng hình chiếu các lực trên trục x triệt tiêu rút ra hình chiếu của vectơ chính của hệ lực trên trục x triệt tiêu. Có hai khả năng xảy ra :

a) $\vec{R}' \neq \vec{0}$, khi đó vectơ chính $\vec{R}'$ phải vuông góc với trục chiếu x và vì trục chiếu không vuông góc với đường chứa đoạn AB nên phương vectơ chính không song song với đường thẳng chứa đoạn AB. Tuy nhiên vì :

$\vec{R}' \neq \vec{0}$, $\overline{M}^A = \sum \overline{m}_A(\vec{F}_k) = 0$; $\overline{M}^B = \sum \overline{m}_B(\vec{F}_k) = 0$ nên hệ lực có hợp lực, đường tác dụng của nó qua 2 điểm A và B, tức phương vectơ chính phải song song với đường chứa đoạn AB, điều này mâu thuẫn với trên.

Do đó: $\vec{R} = \vec{0}$.

b) $\vec{R}' = \vec{0}$, khi thu gọn hệ lực phẳng về một điểm O nào đó ta nhận được ngẫu lực thu gọn có mô men thu gọn :

$$\overline{M}^O = \overline{M}^A = \sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0$$

Vậy ngẫu lực thu gọn nhận được là hai lực cân bằng, theo tiên đề 1, hệ lực phẳng đã cho cân bằng.

Dạng 3 : *Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng các mô men của các lực đối với ba điểm A, B, C không thẳng hàng triệt tiêu.*

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_A(\vec{F}_k) = 0 \; ; \; \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \; ; \; \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_C(\vec{F}_k) = 0 \qquad (2-18)$$

Chứng minh: Trước khi chứng minh ta nhận xét rằng các ngẫu lực thu gọn tại A, B, C là $\overline{M}^A$, $\overline{M}^B$, và $\overline{M}^C$ sẽ là:

$$\overline{M}^A = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_A(\vec{F}_k) \; ; \; \overline{M}^B = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_B(\vec{F}_k) \; ; \; \overline{M}^C = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_C(\vec{F}_k)$$

Điều kiện cần là hiển nhiên vì nếu trong các điều kiện (2–18) không được thỏa mãn, thí dụ :

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_A(\vec{F}_k) \neq 0$$

thì ngẫu lực thu gọn $\overline{M}^A$ tại A cũng khác không, nghĩa là hệ lực đã cho không thỏa mãn tiên đề 1, tức hệ lực không cân bằng.

Để chứng minh điều kiện đủ, ta chú ý rằng nếu các điều kiện (2 – 18) được thỏa mãn thì các ngẫu lực thu gọn tại A, B và C đều bằng không. Vậy nếu hệ lực có hợp lực thì ba điểm A, B, C phải nằm trên đường tác dụng của hợp lực. Nói khác đi đường tác dụng của hợp lực phải đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Đó là điều vô lý. Vậy hệ lực không có hợp lực và dựa vào dạng chuẩn của hệ lực ta đi đến kết luận là vectơ chính của hệ lực phải bằng không.

Do $\vec{R}' = \vec{0}$, nên khi tiến hành thu gọn hệ lực về một điểm tùy ý O thì ngẫu lực thu gọn $\overline{M}^O$, theo định lí biến thiên mô men chính, bằng ngẫu lực thu gọn tại A, tức $\overline{M}^O = \overline{M}^A = 0$.

Vậy ngẫu lực thu gọn $\overline{M}^O$ là hai lực cân bằng, theo tiên đề 1, hệ lực đã cho cân bằng.

Áp dụng trực tiếp các dạng phương trình cân bằng trên cho hệ lực song song phẳng ta có :

Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng song song cân bằng là tổng các hình chiếu của các lực trên một trục không vuông góc với đường tác dụng các lực và tổng mô men của các lực đối với một điểm đồng thời triệt tiêu :

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \; ; \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \tag{2-19}$$

với điều kiện trục chiếu y không vuông góc với đường tác dụng của các lực.

Hoặc :

Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng song song cân bằng là tổng mô men của các lực đối với hai điểm A, B không cùng nằm trên một đường song song với các lực đều triệt tiêu, tức :

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_A(\vec{F}_k) = 0 \; ; \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \tag{2-20}$$

với điều kiện $\overrightarrow{AB}$ không song song với các lực.

Thí dụ 2 – 1. Dầm AB có chiều dài 4a được đặt trên hai gối như hình 2-12. Dầm chịu tác dụng của hai lực tập trung theo phương đứng hướng xuống tại C và D (C là điểm giữa của dầm, còn D cách đầu mút A của dầm một đoạn a) và một lực $\vec{F}$ theo phương ngang cách đường trục của dầm một khoảng d.

Xác định các phản lực tại gối đỡ (lấy $d = \frac{1}{10}a$)

Bài giải

Khảo sát dầm AB cân bằng dưới tác dụng hệ lực phẳng gồm các lực hoạt động $\vec{P}$, $\vec{Q}$ và $\vec{F}$ và hai phản lực liên kết của gối đỡ A và B (phản lực tại A gồm thành phần thẳng đứng và nằm ngang $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, còn phản lực tại B theo phương thẳng đứng $\vec{N}_B$) (H. 2 – 12).

Vì dầm cân bằng nên

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B) \equiv \vec{0}$$

Viết các phương trình cân bằng của hệ lực phẳng (dạng 1) cho hệ lực trên, ta có:

$$\sum F_x = F - X_A = 0$$

$$\sum F_y = Y_A + N_B - P - Q = 0$$

$$\sum \overline{m}_A(\vec{F}) = \frac{1}{10}Fa + Qa + 2Pa - 4N_Ba = 0$$

Khi giải hệ phương trình trên ta nhận được :

$$X_A = F; \quad Y_A = \frac{1}{2}P + \frac{3}{4}Q - \frac{1}{40}F;$$

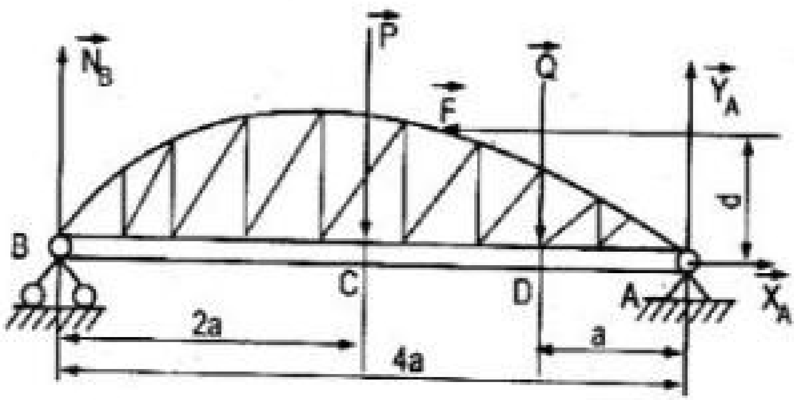
$$N_B = \frac{1}{4}Q + \frac{1}{2}P + \frac{1}{40}F$$

Các phản lực $\vec{X}_A$, $\vec{N}_B$ nhận được giá trị dương, còn thành phần phản lực thẳng đứng $\vec{Y}_A$ sẽ có giá trị dương hoặc âm tùy thuộc biểu thức:

$$\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q - \frac{1}{40}F$$

có giá trị dương hay âm.

Để làm rõ vấn đề này, ta lưu ý rằng trong trường hợp tổng quát không biết trước chiều của các phản lực liên kết, vì chúng phụ thuộc vào các lực hoạt động tác dụng lên vật rắn. Do đó, khi giải phóng liên kết, các phản lực liên kết được giả thiết có chiều nào đó. Vậy chiều được chọn trước như vậy có thể đúng, cũng có thể không đúng.



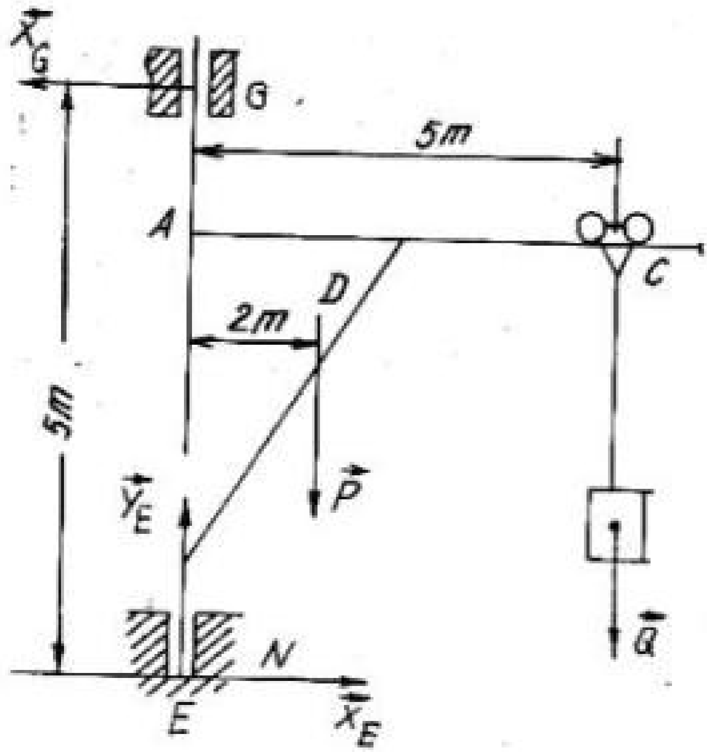
Hình 2-12

Vì các phản lực liên kết được đưa vào trong các phương trình cân bằng với danh nghĩa là môđun của các phản lực liên kết, được thêm dấu dương hay dấu âm là tùy thuộc chiều chọn cùng hoặc ngược chiều với hướng dương của trục chiếu, nên chúng phải là các đại lượng chỉ lấy các giá trị dương. Với lí do đó, các phản lực được tìm từ các phương trình cân bằng bắt buộc phải dương. Khi giải các phương trình cân bằng, có phản lực nào đó nhận được giá trị âm thì điều đó không thể chấp nhận được. Vậy cần phải chọn lại chiều của phản lực liên kết sao cho từ các phương trình cân bằng các phản lực đều nhận được giá trị dương, nghĩa là phải tiến hành giải lại bài toán. Tuy nhiên nếu có một phản lực nào đó được giả thiết chiều không đúng thì chiều đúng là chiều ngược lại. Từ đó không cần thiết phải tiến hành giải lại bài toán mà chỉ cần đổi lại chiều của phản lực có giá trị âm.

Thí dụ 2 – 2. Cấu trục ABC có trục quay thẳng đứng GE với GE = AC = 5m (H. 2 – 13). Trọng lượng bản thân của cấu trục là P = 19,62 kN đặt tại điểm D cách trục quay 2m. Vật được cấu có trọng lượng Q = 19,43 kN đặt tại điểm C. Xác định phản lực tại các ổ đỡ G và E. Bỏ qua ma sát.

Bài giải

Khảo sát cần trục ABC cân bằng dưới tác dụng của hệ lực gồm các lực hoạt động $\vec{P}$ và $\vec{Q}$ đặt tại D và C và các phản lực liên kết tại G và E. Vì các lực hoạt động tác dụng trong mặt phẳng cầu trục nên các phản lực tại G và E cùng nằm trong mặt phẳng cầu trục. Do đó, các phản lực tại G và E được biểu diễn như trên hình vẽ.



Hình 2-13

Vậy cầu trục nằm cân bằng dưới tác dụng của hệ lực phẳng :

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_E, \vec{Y}_E, \vec{X}_G) \equiv \vec{0}$$

Các phương trình cân bằng của hệ lực này được viết như sau :

$$\sum F_{ky} = Y_E - P - Q = 0$$

$$\sum \overline{m}_E (\vec{F}) = 5X_G - 2P - 5Q = 0$$

$$\sum \overline{m}_G (\vec{F}) = 5X_E - 2P - 5Q = 0$$

Từ hệ phương trình này, ta có:

$$Y_E = P + Q = 39{,}05 \text{ kN}$$

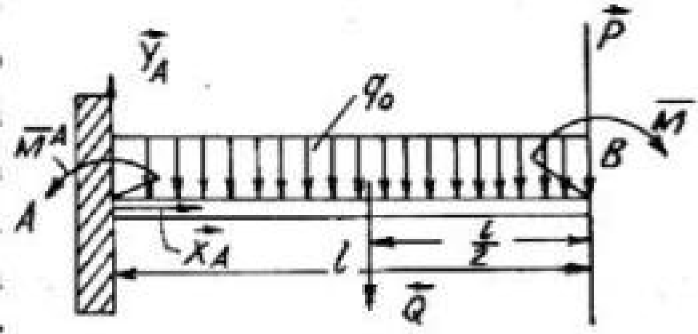
$$X_G = \frac{2}{5} P + Q = 27{,}278 \text{ kN}$$

$$X_E = \frac{2}{5} P + Q = 27{,}278 \text{ kN}$$

Các phản lực đều có giá trị dương.

Do đó các phản lực có chiều đúng chiều đã chọn như trên hình vẽ.

Thí dụ 2 – 3. Dầm AB có chiều dài l được gắn vào tường nhờ liên kết ngàm tại A. Tại đầu mút B tự do dầm chịu tác dụng lực $\vec{P}$ và ngẫu lực $\overline{M}$ và suốt chiều dài dầm chịu tác dụng của hệ lực phân bố đều có cường độ q_o. Xác định phản lực tại ngàm. Bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm (H. 2–14).



Hình 2–14

Bài giải

Khảo sát dầm cân bằng dưới tác dụng của hệ lực gồm các lực hoạt động $\vec{P}$, ngẫu lực $\overline{M}$ và hệ lực phân bố đều có hợp lực $Q = q_o l$ và các lực liên kết tại ngàm $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ và ngẫu lực $\overline{M}^A$.

Ta có hệ lực phẳng cân bằng sau :

($\vec{P}$, $\vec{Q}$, ngẫu lực $\overline{M}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, ngẫu lực $\overline{M}^A$) ≡ 0

Phương trình cân bằng của hệ lực này có dạng :

$$\sum F_x = X_A = 0$$
$$\sum F_y = Y_A - P - Q = 0$$
$$\sum m_A(\vec{F}) = M^A - P.l - Q\frac{l}{2} - M = 0$$

Khi giải hệ phương trình này với chú ý $Q = q_o l$, ta được

$$X_A = 0\ ;\ Y_A = P + Q\ ;\ M^A = Pl + q_o\frac{l^2}{2} + M$$

Các phản lực đều có giá trị dương, nên có chiều như trên hình vẽ.

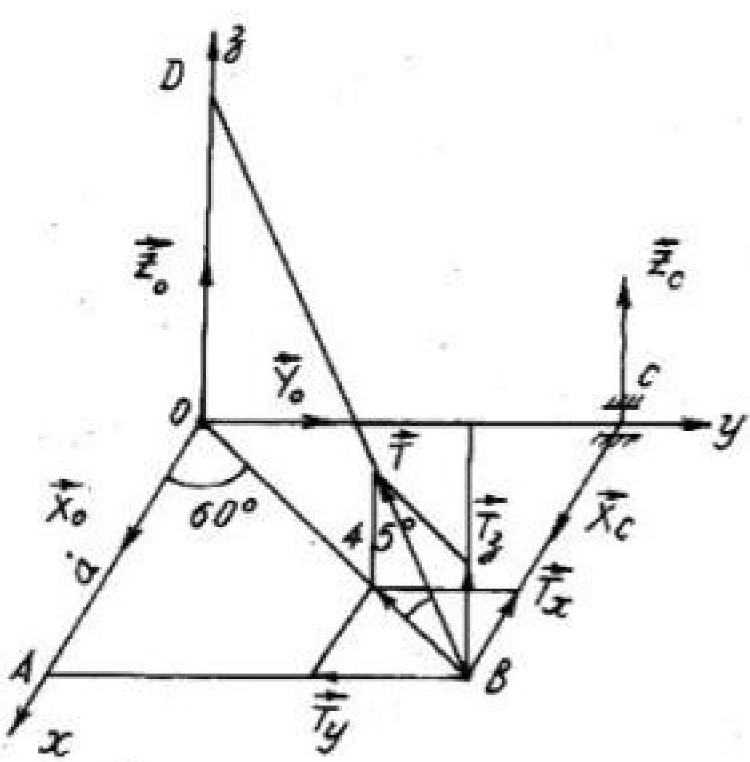
Thí dụ 2 – 4. Cánh cửa OABC hình chữ nhật đồng chất có trọng lượng P được giữ cân bằng ở vị trí nằm ngang nhờ gối cầu O, bản lề C và dây BD. Biết đường chéo OB nghiêng 60^o với cạnh OA, dây BD nằm trong mặt phẳng thẳng đứng qua OB và nghiêng góc 45^o với OB. Tìm các phản lực tại O, C và sức căng của dây.

Bài giải

Khảo sát cánh cửa cân bằng dưới tác dụng của hệ lực không gian gồm lực hoạt động $\vec{P}$ và các phản lực liên kết $\vec{X}_o$, $\vec{Y}_o$, $\vec{Z}_o$

của gối cầu O; $\vec{X}_C$, $\vec{Z}_C$ của bản lề C và sức căng $\vec{T}$ của dây. Ta có hệ lực cân bằng sau :

$(\vec{P}, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o, \vec{X}_C, \vec{Z}_C, \vec{T}C) \equiv \vec{0}$



Hình 2-15

Để đơn giản cho việc lập các phương trình cân bằng ta phân tích sức căng $\vec{T}$ thành ba lực nằm dọc ba trục tọa độ vuông góc, đó là :

$$T_x = T\cos45^o\cos60^o = \frac{T\sqrt{2}}{4}$$

$$T_y = T\cos45^o\sin60^o = \frac{T\sqrt{6}}{4}$$

$$T_z = T\sin45^o = \frac{T\sqrt{2}}{2}$$

Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian sẽ là :

$$\sum F_x = X_o + X_c - \frac{T\sqrt{2}}{4} = 0$$

$$\sum F_Y = Y_o - P - \frac{T\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_z = Z_o + Z_c + \frac{T\sqrt{2}}{2} - P = 0$$

$$\sum \overline{m_x(\vec{F})} = -\frac{Pa\sqrt{3}}{2} + Z_c a\sqrt{3} + \frac{T\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{3} = 0$$

$$\sum \overline{m_y(\vec{F})} = P\frac{a}{2} - \frac{T\sqrt{2}}{2} \cdot a = 0$$

$$\sum \overline{m_z(\vec{F})} = -X_c a\sqrt{3} = 0$$

Giải hệ phương trình trên ta nhận được

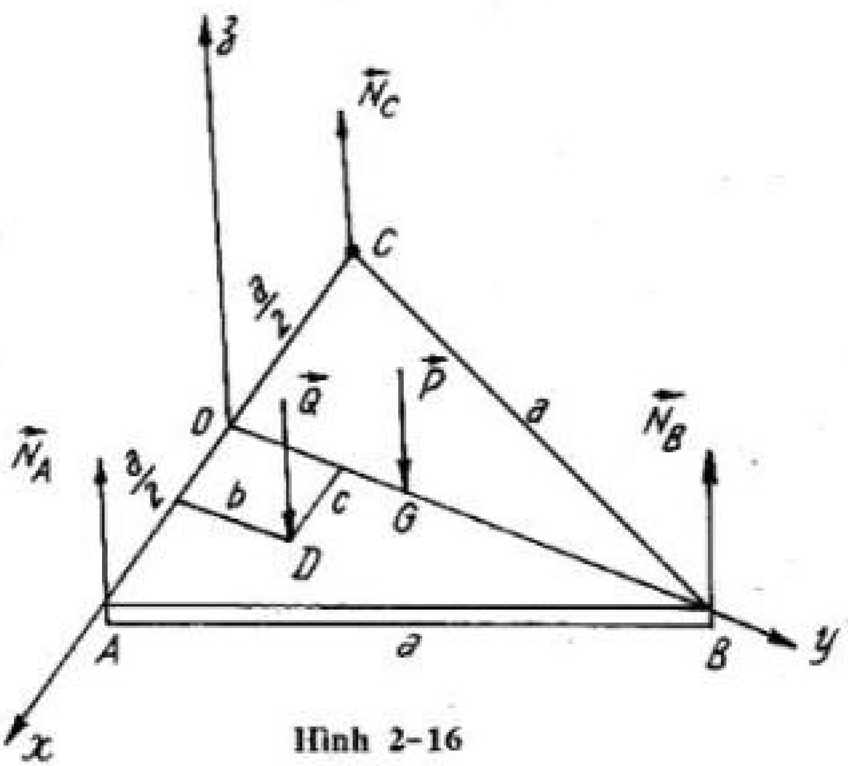
$$X_C = 0;\ T = \frac{P\sqrt{2}}{2};\ X_o = \frac{P}{4};\ Y_o = \frac{P\sqrt{3}}{2};\ Z_C = 0;\ Z_o = \frac{P}{2}$$

Các phản lực đều có giá trị dương nên chúng có chiều như trên hình vẽ

Thí dụ 2 - 5. Một xe ba bánh được mô hình bằng tấm tam giác đều ABC đồng chất, các cạnh có chiều dài a, nằm cân bằng trên mặt ngang và tiếp xúc với mặt đường nằm ngang qua ba điểm tiếp xúc của bánh với mặt đứng tại A, B và C. Trọng lượng của xe là P đặt tại trọng tâm G của tấm, còn vật nặng xe chở có trọng lượng Q đặt tại điểm D. Tìm các phản lực tại A, B và C.

Bài giải

Khảo sát tấm ABC nằm cân bằng dưới tác dụng của hệ lực gồm các lực hoạt động P, Q và các phản lực liên kết $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$, $\vec{N}_C$ có phương thẳng góc với mặt phẳng của tấm, tức phương thẳng đứng. Ta có hệ lực không gian song song cân bằng (H. 2-16).



Hình 2-16

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{N}_C) \equiv 0$$

Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ các phương trình cân bằng có dạng:

$$\sum F_z = N_A + N_B + N_C - P - Q = 0$$
$$\sum \overline{M_c} \sum(\vec{F}) = -Pa\sqrt{3}/6 - Qb + N_B a\sqrt{3}/2 = 0$$
$$\sum \overline{M_y}(F) = Q.C + N_C\frac{a}{2} - N_A\frac{a}{2} = 0$$

Khi giải hệ phương trình này, ta được

$$N_A = \frac{P}{3} + Q\left(\frac{1}{2} + \frac{c}{a} - \frac{b\sqrt{3}}{3a}\right)$$

$$N_B = \frac{P}{3} + \frac{2Qb\sqrt{3}}{3a}$$

$$N_C = \frac{P}{3} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{c}{a} + \frac{b\sqrt{3}}{3a}\right)\right].Q$$

Rõ ràng phản lực N_B có giá trị dương, tức có chiều như trên hình vẽ.

Phản lực N_A cũng có giá trị dương, nếu chú ý rằng b có giá trị lớn nhất chỉ bằng chiều cao của tam giác, tức là :

$$b \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy

$$N_A^{min} = \frac{P}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{a} - \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{a}\right).Q = \frac{P}{3} + \left(\frac{c}{a} - 1\right).Q > 0$$

phản lực $\vec{N}_C$ có giá trị dương hoặc âm tùy biểu thức :

$$\frac{P}{3} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]Q$$

có giá trị dương hay âm.

Trong trường hợp $\vec{N}_C$ có giá trị không hoặc âm, tức liên kết giữa mặt đường và xe không có, xe sẽ bị lật quanh AB, vì liên kết C bị mất.

Vậy điều kiện để xe không bị lật quanh AB sẽ là:

$$\frac{P}{3} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]Q > 0$$

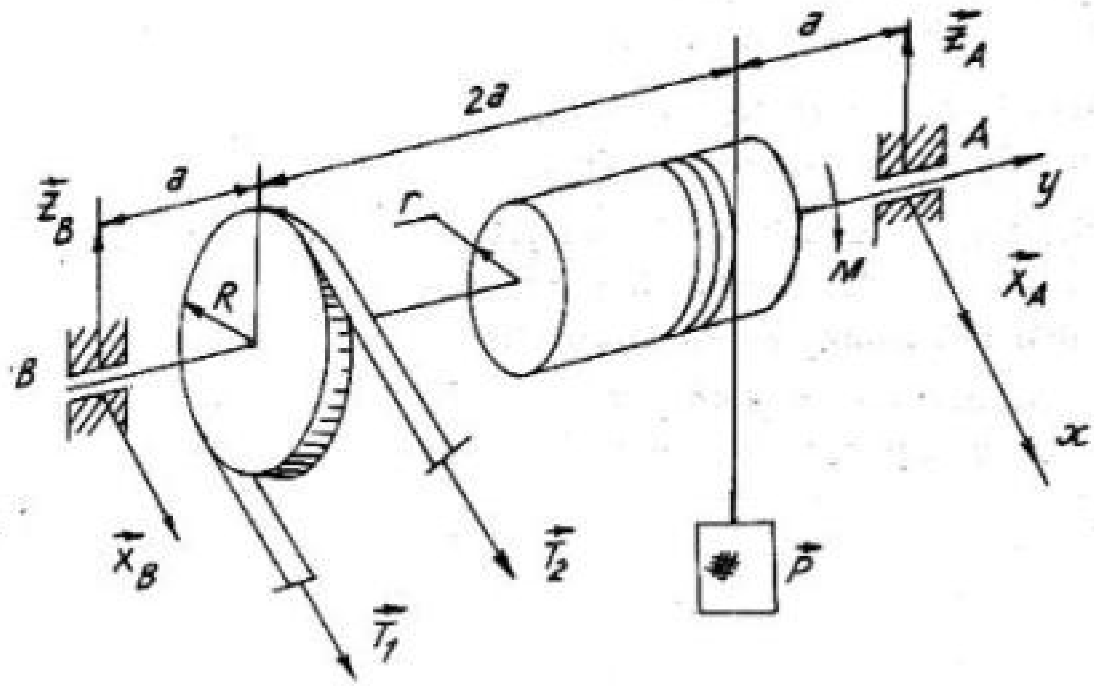
Bài toán vật lật sẽ được trình bày chi tiết ở phần tiếp sau.

Thí dụ 2-6. Một trục kéo AB có đường trục nằm ngang và được đỡ trên hai ổ trục (bản lề trụ) A và B. Hai nhánh đai tác dụng lên trục tời qua puli có đường kính D = 0,60m các lực kéo T_1 = 5kN và T_2 = 2kN. Vật được kéo có trọng lượng P = 5kN nhờ tang tời có đường kính d = 0,30m. Trục tời còn chịu tác dụng ngẫu lực cản có mômen M.

Xác định ngẫu lực cản M cần thiết để trục kéo cân bằng và các phản lực tại ổ trục A và B. Các kích thước cho trên hình vẽ. Bỏ qua ma sát.

Bài giải

Khảo sát trục kéo cân bằng dưới tác dụng của hệ lực gồm các lực hoạt động $\vec{P}$, ngẫu lực $\vec{M}$ và các phản lực liên kết $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$, $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ trong đó các sức căng $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$ đã cho, ngẫu lực cản có vectơ mômen $\vec{M}$ hướng song song với trục quay, các phản lực $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay nên có thể phân tích chúng thành hai thành phần nằm dọc theo hai trục x, y trong hệ tọa độ Oxyz, có trục z trùng với trục tâm của trục quay, (H.2-17).



Hình 2-17

Ta có hệ lực không gian cân bằng sau:

$$(\vec{P}, \text{ ngẫu lực } \overline{M}, \vec{T_1}, \vec{T_2}, \vec{X_A}, \vec{Y_A}, \vec{X_B}, \vec{Y_B}) \equiv 0$$

Khi viết các phương trình cân bằng cho hệ lực này, ta có:

$$\sum F_x = T_1 + T_2 + X_A + X_B = 0$$

$$\sum P_z = - P + Z_A + Z_B = 0$$

$$\sum \overline{M}_x(\vec{F}) = aP - 4aZ_B = 0$$

$$\sum \overline{M}_y(\vec{F}) = T_1\frac{D}{2} - T_2\frac{D}{2} - P\frac{d}{2} - M = 0$$

$$\sum \overline{M}_z(\vec{F}) = 3aT_1 + 3aT_2 + 4aX_B = 0$$

Thay các giá trị bằng số vào hệ phương trình trên và giải ta được :

$$X_A = - 1{,}75\text{kN}, \ Z_A = 3{,}75\text{kN};$$

$$X_B = - 5{,}25\text{kN}; \ Z_B = 1{,}25\text{kN}; \ M = 0{,}15\text{kN}$$

Ở đây thành phần X_A của phản lực tại A và X_B có chiều ngược so với chiều trên hình vẽ.

2.3.4. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ VẬT RẮN

Đối với hệ vật rắn cần phân biệt ngoại lực và nội lực.

Ngoại lực, có kí hiệu $\vec{F^e}$, là các lực do các vật không thuộc hệ tác dụng lên các vật thuộc hệ.

Nội lực, có kí hiệu $\vec{F^i}$, là các lực tác dụng tương hỗ giữa các vật thuộc hệ, mà trường hợp riêng là những lực liên kết của các liên kết trong, tức là những liên kết giữa các vật thuộc hệ.

Theo tiên đề tác dụng và phản tác dụng, các nội lực xuất hiện từng cặp trực đối, nhưng đó không phải là hai lực cân bằng, vì không đặt lên cùng một vật. Hệ nội lực có tính chất quan trọng sau: vectơ chính và mômen chính của hệ nội lực luôn luôn triệt tiêu.

$$\vec{R^i} = \vec{0}; \qquad \vec{M^{oi}} = \vec{0} \qquad (2\text{-}21)$$

Cần chú ý rằng các ngoại lực cũng như các nội lực bao gồm trong bản thân chúng cả lực hoạt động và lực liên kết.

Bây giờ khảo sát hệ vật rắn gồm N vật nằm cân bằng dưới tác dụng của hệ ngoại lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$ được gọi vắn tắt là hệ lực (S).

Vì hệ vật rắn cân bằng nên từng vật rắn phải cân bằng. Áp dụng tiên đề giải phóng liên kết ta lập được điều kiện cân bằng (các phương trình cân bằng) cho các hệ lực tác dụng lên từng vật. Gọi các hệ lực đó là (S_k); k = 1,2, ..., N, ta có:

$$\vec{R'}(S_k) = \vec{0}; \qquad \vec{M}^O(S_k) = \vec{0}; \qquad k = 1,2 \ldots N \qquad (2\text{-}22)$$

Mặt khác, áp dụng tiên đề hóa rắn, coi hệ như một vật rắn nằm cân bằng dưới tác dụng của hệ lực (S). Vậy

$$\vec{R'}(S) = \vec{0}; \qquad \vec{M}^O(S) = \vec{0}; \qquad (2\text{-}23)$$

Để tìm mối quan hệ giữa các điều kiện (2-22) và (2-23), ta xét hệ lực $(\bar{S})$ gồm tất cả các lực thuộc các hệ lực $(S_1)(S_2),\ldots(S_k)$. Ta có ngay :

$$\vec{R'}(\bar{S}) = \sum_{k=1}^{N} \vec{R'}(S_k); \qquad \vec{M}^O(\bar{S}) = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}^O(S_k)$$

Vì các hệ lực $(\bar{S})$ và (S) chỉ khác nhau bằng các cặp lực trực đối, nên :

$$\vec{R'}(\bar{S}) = \vec{R'}(S); \qquad \vec{M}^O(\bar{S}) = \vec{M}^O(S)$$

Từ đó :

$$\vec{R'}(S) = \sum_{k=1}^{N} \vec{R'}(S_k); \qquad \vec{M}^O(S) = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}^O(S_k)$$

Vậy điều kiện (2-23) là hệ quả của các điều kiện (2-22).

Để giải bài toán cân bằng các hệ vật rắn ta có thể sử dụng điều kiện (2 - 22), tức thiết lập N điều kiện cân bằng của N vật rắn thuộc hệ, hoặc sử dụng điều kiện (2 - 23), tức điều kiện cân bằng của hệ vật được hóa rắn và một số trong các điều kiện (2 - 22), sao cho chúng tập hợp thành một hệ phương trình đầy đủ (số ẩn bằng số phương trình) để giải bài toán. Phương trình đầu được gọi là phương pháp tách vật, còn phương trình thứ hai mang tên là phương pháp hóa rắn.

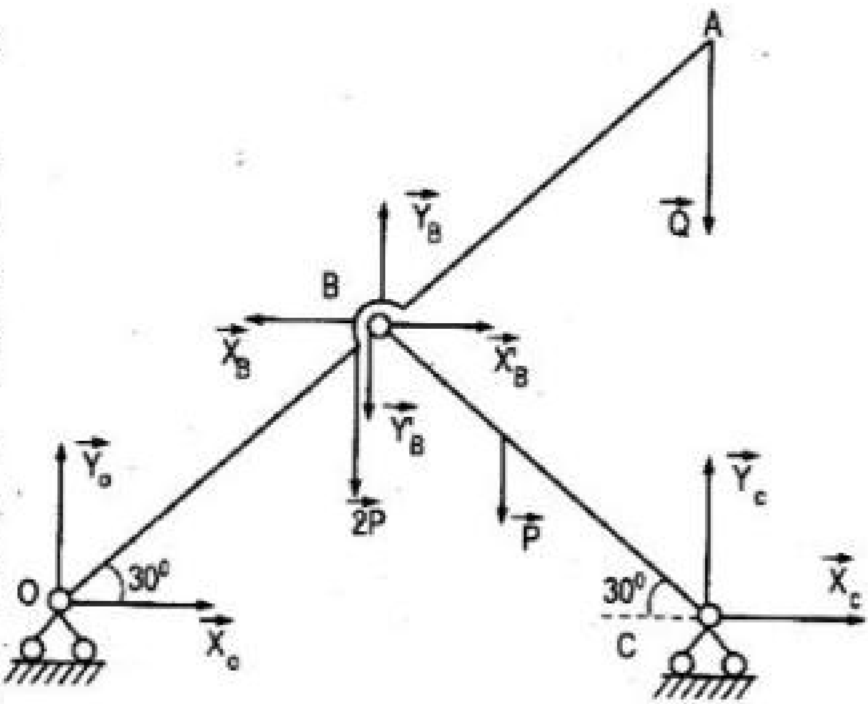
Thí dụ 2-7. Hai thanh đồng chất OA = 4a; BC = 2a có trọng lượng tương ứng 2P và P, nối với nhau bằng bản lề B và với nền nhờ bản lề O và C. Tại A treo một vật nặng có trọng lượng Q. Tìm các phản lực liên kết tại O, C và lực liên kết tại B. Các thanh làm với đường nằm ngang góc 30°.

Bài giải

Đây là bài toán cân bằng của hệ vật. Ta có thể dùng hoặc phương pháp tách vật hoặc phương pháp hóa rắn.

Phương pháp tách vật :

Khảo sát sự cân bằng của thanh OA dưới tác dụng của hệ lực gồm các lực hoạt động $\vec{Q}$ và $\vec{P'}$ (ngoại lực) và các lực liên kết $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ tại O (ngoại lực) và $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ tại B (nội lực), chúng được giả thiết có chiều như hình vẽ ($\vec{P'}$ có trị số bằng 2P).



Hình 2-18

Ta có hệ lực phẳng cân bằng :

$$(\vec{Q}, \vec{P'}, \vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{X}_B, \vec{Y}_B) \equiv 0.$$

Các phương trình cân bằng của hệ lực phẳng (dạng 1) cho :

$$\sum F_x = X_O - X_B = 0$$

$$\sum F_y = Y_O + Y_B - 2P - Q = 0$$

$$\sum \overline{m}_O(\vec{F}) = -2a\sqrt{3}\,P - 2a\sqrt{3}\,Q + a\sqrt{3}\,Y_B + aX_B = 0$$

Bây giờ ta xét sự cân bằng của thanh CB chịu tác dụng của hệ lực gồm lực hoạt động $\vec{P}$ (ngoại lực) và các liên kết $\vec{X}_c$, $\vec{Y}_c$ tại C (ngoại lực) có chiều được giả thiết như hình vẽ và $\vec{X'}_B$, $\vec{Y'}_B$ là các lực do thanh AO tác dụng lên thanh CB (nội lực), theo tiên đề tác dụng và phản tác dụng, ta có :

$$\vec{X'}_B = -\vec{X}_B \; ; \qquad \vec{Y'}_B = -\vec{Y}_B$$

Như vậy $\vec{X'}_B$ và $\vec{X}_B$, có cùng mô đun, gọi chúng là X_B, còn mô đun của các lực $\vec{Y}_B$ và $\vec{Y'}_B$ kí hiệu là Y_B.

Vậy thanh BC cân bằng dưới tác dụng của hệ lực :

$$(\vec{P}, \vec{X}_c, \vec{Y}_c, \vec{X'}_B, \vec{Y'}_B) \equiv \vec{0}$$

Viết phương trình cân bằng (dạng 1) cho hệ lực này, ta có :

$$\sum F_x = X_c + X_B = 0$$
$$\sum F_y = Y_c - P - Y_B = 0$$
$$\sum \overline{m}_c(\vec{F}) = a\sqrt{3}\frac{P}{2} + a\sqrt{3}\,Y_B - aX_B = 0$$

Khi giải hệ sáu phương trình vừa lập, ta tìm được :

$$X_O = \left(\frac{5}{4}P - Q\right)\sqrt{3}; \quad X_B = \left(\frac{5}{4}P - 2Q\right)\sqrt{3}; \quad X_c = \left(Q - \frac{5}{4}P\right)\sqrt{3}$$
$$Y_O = \left(2Q + \frac{5}{4}P\right) \; ; \quad Y_B = \frac{3}{4}P - Q; \quad Y_c = \frac{7}{4}P - Q$$

Các phản lực có chiều đúng như hình vẽ nếu chúng có giá trị dương và ngược chiều nếu có giá trị âm.

Phương pháp hóa rắn :

Đầu tiên xem hệ là một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hệ lực gồm các lực hoạt động $\vec{Q}$, $\vec{P'}$, $\vec{P}$ và các lực liên kết $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$, $\vec{X}_c$, $\vec{Y}_c$. Các lực liên kết tại B là các nội lực, nên khi xem hệ là một vật rắn cân bằng, có thể bớt chúng đi theo tiên đề 2.

Vậy ta có hệ lực phẳng cân bằng sau :

$$(\vec{Q}, \vec{P}, \vec{P'}, \vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{X}_c, \vec{Y}_c) \equiv \vec{0}$$

Khi viết các phương trình cân bằng của hệ lực phẳng (dạng 2) cho hệ lực trên, ta có :

$$\Sigma F_x = X_O + X_c = 0$$

$$\sum \overline{m}_O(\vec{F}) = 2a\sqrt{3}\,Y_c - 2a\sqrt{3}\,Q - 3a\sqrt{3}\,P/2 - 2a\sqrt{3}\,P = 0$$

$$\sum \overline{m}_c(\vec{F}) = -2a\sqrt{3}\,Y_O + 2a\sqrt{3}\,P + \frac{a\sqrt{3}}{2}P = 0$$

Vậy ta nhận được ba phương trình chứa bốn ẩn X_O, Y_O, X_c, Y_c. Để có thêm một phương trình chứa cùng bốn ẩn trên ta xét thanh BC cân bằng và viết phương trình cân bằng cho hệ lực :

$$(\vec{X}'_B, \vec{Y}'_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{P}) \equiv \vec{0}$$

trong đó không chứa phản lực tại B. Đó là phương trình mô men của các lực đối với điểm B :

$$\sum \overline{m}_B(\vec{F}) = a\sqrt{3}\,Y_C - \frac{a\sqrt{3}}{2}P + aX_C = 0$$

Từ hệ bốn phương trình vừa lập trên ta tính được X_O, Y_O, X_c, Y_c. Lẽ tất nhiên nếu phải tính các phản lực tại B thì cần viết hai phương trình còn lại cho hệ lực tác dụng lên thanh CB.

2.4. BÀI TOÁN ĐÒN VÀ VẬT LẬT

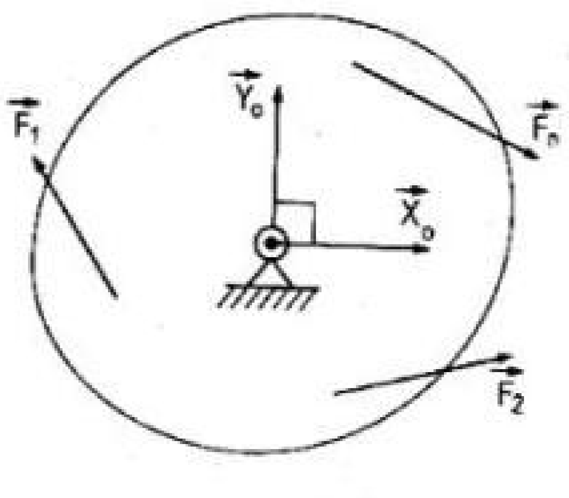
2.4.1. BÀI TOÁN ĐÒN

Đòn là một vật rắn quay được quanh một trục cố định và chịu tác dụng của hệ lực hoạt động nằm trong một mặt phẳng vuông góc với trục quay của đòn (H.2 – 19).

Bài toán của đòn là tìm điều kiện đối với hệ lực hoạt động để đòn cân bằng.

Hệ lực tác dụng lên đòn gồm các lực hoạt động $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_n$ và các phản lực liên kết tại trục quay $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$. Nếu đòn cân bằng thì hệ lực gồm các lực hoạt động và lực liên kết tại O là hệ lực cân bằng, tức :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_n, \vec{X}_O, \vec{Y}_O) \equiv \vec{0}$$



Hình 2-19

Viết các phương trình cân bằng cho hệ này, ta được :

$$\sum F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} + X_O = 0$$

$$\sum F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} + Y_O = 0$$

$$\sum \overline{m}_O(\vec{F}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\vec{F}_k) = 0$$

Hai phương trình đầu luôn được thỏa mãn nhờ trục O tạo các phản lực $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$. Vậy đòn có cân bằng hay không tùy thuộc hệ lực hoạt động ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$) tác dụng lên đòn có thỏa mãn phương trình thứ ba hay không. Do đó, ta có định lí : *Điều kiện cần và đủ để đòn cân bằng là tổng mô men của các lực hoạt động đối với trục quay của nó phải triệt tiêu.*

Thí dụ 2 - 8. Van an toàn A được nối vào đòn CD tại B, đòn này dài 50cm, đồng chất có trọng lượng 10N quay quanh trục C và có vị trí nằm ngang để giữ van an toàn nhờ đối trọng Q đặt tại D. Biết BC = 7cm, áp suất an toàn là p = 50N/cm^2; đường kính van d = 6cm. Tìm trọng lượng cần thiết Q cần treo ở D để khóa chặt van an toàn (H. 2–20).

Bài giải

Van an toàn chịu lực đẩy.

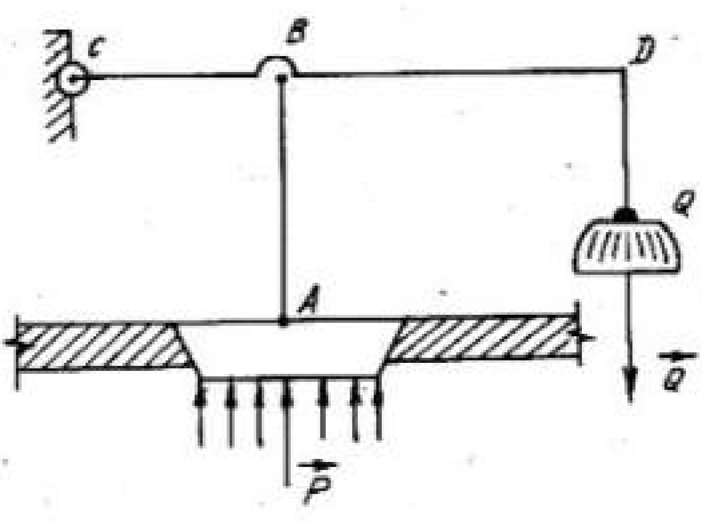
$$P = 50\,\frac{\pi 6^2}{4} = 1413 \text{ N}$$

Điều kiện cân bằng của đòn CD là :

$$\sum \overline{m}_C(\vec{F}) = 1413.7 - 50Q = 0$$

Từ đó tính được lực Q bé nhất để khóa chặt van an toàn.

$$Q_{min} = \frac{1413.7}{50} = 197 \text{ N}$$



Hình 2–20

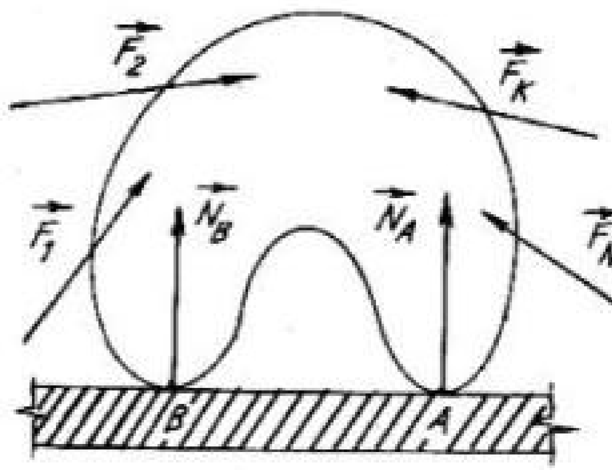
2.4.2. BÀI TOÁN VẬT LẬT

Khảo sát vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hệ lực hoạt động ($\vec{F}_1, \vec{F}_2 ... \vec{F}_n$). Để đơn giản, ta xét trường hợp hệ lực phẳng. Vật có liên kết tựa tại hai điểm A và B trong trường hợp riêng có thể chỉ có một liên kết tựa, còn liên kết kia là liên kết bản lề. Ta có hệ lực cân bằng :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n, \vec{R}_A, \vec{R}_B) \equiv \vec{0}$$

Với những điều kiện nào đó của hệ lực hoạt động có thể xảy ra sự mất liên kết tại một trong hai điểm A và B. Phản lực liên kết tại liên kết bị mất sẽ bằng không, khi đó vật mất cân bằng và trở thành một đòn (H.2 – 21a).

Bài toán vật lật là tìm điều kiện đối với hệ lực hoạt động để không xảy ra mất liên kết tại B (không lật quanh A) hoặc tại A (không lật quanh B).



Hình 2–21a

Ta hãy tìm điều kiện để vật không bị lật, giả sử quanh A.

Các lực hoạt động được phân thành hai nhóm. Nhóm thứ nhất gồm các lực gây lật là các lực có mô men đối với A theo chiều vật bị lật. Tổng mô men của chúng đối với điểm A được gọi là mô men lật, có kí hiệu $M^A_{lật}$. Nhóm thứ hai gồm các lực còn lại là các lực chống lật, có mô men đối với A ngược chiều vật bị lật. Tổng mô men của các lực này đối với A được gọi là mô men chống lật, có kí hiệu $M^A_{chống}$

Chú ý rằng mô men lật và mô men chống lật ngược chiều nhau, còn mô men của phản lực tại B đối với A có cùng chiều với mô men gây lật.

Điều kiện cần và đủ để vật không bị lật quanh A là nó còn cân bằng và liên kết tại B vẫn còn hoạt động, tức là :

$$\sum m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{N}_B) + M^A_{lật} - M^A_{chống} = 0$$

$$m_A(\vec{N}_B) \geq 0$$

Từ đó ta có : $M^A_{lật} \leq M^A_{chống}$

Định lí : *Điều kiện cần và đủ để vật không bị lật là mô men lật không lớn hơn mô men chống lật :*

$$M_{lật} \leq M_{chống}$$

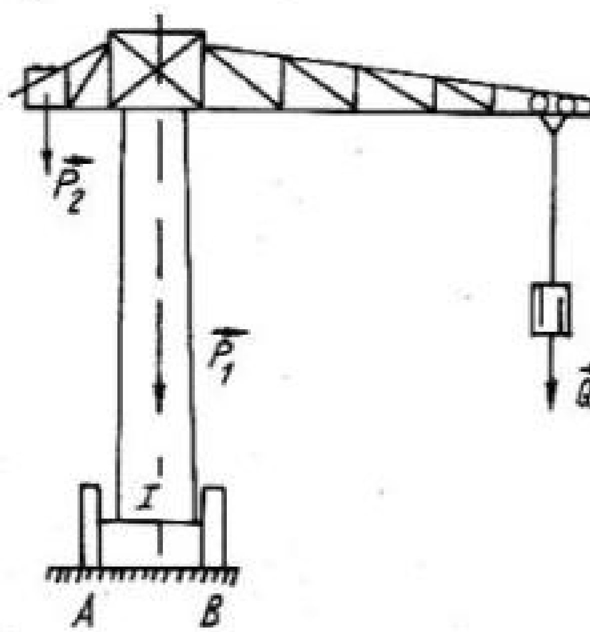
Thí dụ 2 – 9. Cần trục di động được nhờ hai bánh xe cách nhau 1m. Trọng lượng của cần trục là $P_1 = 20kN$ đi qua điểm giữa I của đoạn AB. Đối trọng là $P_2 = 10kN$ nằm cách điểm I một đoạn bằng 1m. Tìm trọng lượng lớn nhất Q mà cần trục mang được, biết rằng nó nằm cách I một đoạn bằng 2m (H.2–21b).

Bài giải

Rõ ràng cần trục không thể bị lật quanh *A* vì :

$M_{lật} = m_A(\vec{P}_2) = 10.0,5 =$ $= 5kNm$, trong khi đó mô men chống lật trong trường hợp nguy hiểm nhất là không có lực Q bằng :

$M_{chống} = m_A(\vec{P}_1) =$ $= 20.0,5 = 10$ kNm $> M_{lật}$.



Hình 2-21b

Bây giờ xét khả năng cần trục bị lật quanh B. Lực $\vec{Q}$ thuộc nhóm lực gây lật, còn trọng lực $\vec{P}_1$ và đối trọng $\vec{P}_2$ thuộc nhóm lực chống lật. Do đó :

$$M^B_{lật} = m_B(\vec{Q}) = 1,5Q;$$

$$M^B_{chống} = m_B(P_1) + m_B(P_2) = 20.0,5 + 10.1,5 = 25 \text{ kNm}$$

Điều kiện để cần trục không bị lật quanh B là :

$$1,5\ Q \leq 25$$

Từ đó :

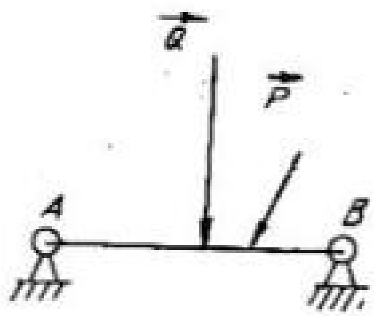
$$Q \leq \frac{25}{1,5} = 16,6\ kN$$

Vậy : $$Q_{max} = 16,6\ kN$$

2.5. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH

Nhờ các phương trình cân bằng ta giải được các bài toán cân bằng của một vật hoặc một hệ vật : xác định các phản lực liên kết hoặc tìm các vị trí cân bằng. Nếu số phương trình lập được bằng số ẩn của bài toán, ta có bài toán xác định tĩnh, còn nếu số phương trình không đủ để giải bài toán thì bài toán được gọi là siêu tĩnh.

Một thí dụ về bài toán siêu tĩnh là bài toán xác định phản lực hai gối cố định đỡ một thanh cân bằng dưới tác dụng của hệ lực hoạt động là hệ lực phẳng (H 2–22).



Hình 2–22

Đối với bài toán này lập được ba phương trình cân bằng chứa bốn thành phần phản lực. Một trong các nguyên nhân gây nên bài toán siêu tĩnh là biến dạng, nên kết quả tìm được đối với mô hình vật rắn tuyệt đối chưa đủ để giải quyết các bài toán không thể bỏ qua biến dạng được. Dựa trên kết quả của tĩnh học vật rắn và bổ sung về quan hệ giữa lực và biến dạng trong các giáo trình cơ học của vật biến dạng người ta giải quyết được các loại bài toán siêu tĩnh đó.

CHƯƠNG 3

MA SÁT

Ở những chương trước khi xét liên kết tựa ta xem các vật tiếp xúc với nhau tại một điểm và các mặt tựa tiếp xúc là hoàn toàn nhẵn. Khi đó phản lực liên kết nằm, theo phương pháp tuyến của mặt tựa. Trên thực tế sự tiếp xúc xảy ra trên một diện tích nhỏ và các mặt tựa của các vật tiếp xúc với nhau là không nhẵn. Do đó, ngoài phản lực nằm theo phương pháp tuyến nói trên còn xuất hiện những lực và ngẫu lực cản được gọi là lực và ngẫu lực ma sát.

3.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẠI MA SÁT

Xét hai vật rắn có liên kết tựa với nhau

Ma sát là hiện tượng xuất hiện những lực và ngẫu lực có tác dụng cản trở các chuyển động hoặc các xu hướng chuyển động tương đối của hai vật trên bề mặt của nhau.

Thường người ta phân làm ba loại ma sát.

1. Ma sát tĩnh và ma sát động. Ma sát được gọi là tĩnh khi giữa hai vật mới chỉ có xu hướng chuyển động tương đối nhưng vẫn ở trạng thái cân bằng tương đối và được gọi là động nếu chúng đã chuyển động tương đối với nhau.

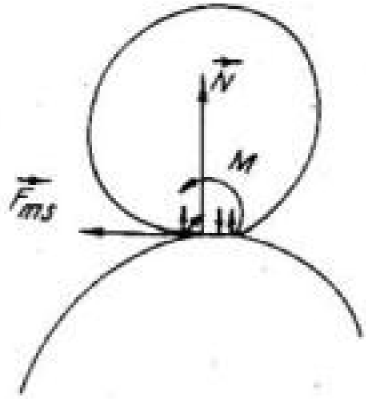
2. Ma sát trượt và ma sát lăn. Nếu xu hướng chuyển động hoặc chuyển động xảy ra giữa hai vật là trượt, ta có ma sát trượt, trường hợp xu hướng hoặc chuyển động xảy ra là lăn, ta có ma sát lăn.

3. Ma sát khô và ma sát nhớt. Ma sát được gọi là khô khi hai vật tiếp xúc trực tiếp với nhau và được gọi là ma sát nhớt khi chúng tiếp xúc với nhau qua một màng dầu.

Ta xét một số thí dụ sau

Một khối hộp trên mặt nghiêng chịu ma sát trượt tĩnh khi khối hộp còn cân bằng và chịu ma sát trượt động khi đã xảy ra chuyển động trượt. Một bánh xe trên mặt nghiêng đồng thời chịu ma sát trượt tĩnh và ma sát lăn tĩnh khi bánh xe còn cân bằng và khi nó lăn không trượt thì có ma sát lăn động cùng với ma sát trượt tĩnh. Dây cu - roa truyền động giữa hai bánh xe chịu ma sát trượt tĩnh khi nó bám chặt và cùng chuyển động với vành bánh xe và sẽ chịu ma sát trượt động khi dây cu - roa bị trượt trên vành.

Bản chất vật lí của hiện tượng ma sát rất phức tạp. Lí thuyết thu gọn hệ lực có thể giúp chúng ta giải thích sự xuất hiện các lực và ngẫu lực ma sát. Do hai vật tiếp xúc với nhau không phải tại một điểm mà là trên một diện tích nào đó nên không phải xuất hiện một phản lực liên kết mà là một hệ phản lực liên kết. Nếu xem đó là một hệ lực phẳng kết quả thu gọn cho một phản lực $\vec{R}$ và một ngẫu lực $\overline{M}$. Phân tích phản lực $\vec{R}$ ra hai thành phần pháp tuyến và tiếp tuyến chúng ta được phản lực pháp $\vec{N}$ và lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ vuông góc với nhau. Còn ngẫu lực $\overline{M}$ chính là ngẫu lực ma sát lăn (H 3–1).



Hình 3–1

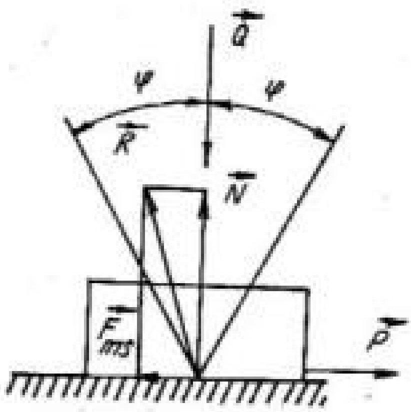
Dưới đây chúng ta khảo sát ma sát trượt và ma sát lăn chỉ trong trường hợp tĩnh và khô.

3.2. ĐỊNH LUẬT MA SÁT TRƯỢT

Để thiết lập định luật ma sát trượt chúng ta hãy quan sát hiện tượng xảy ra đối với một vật rắn trên mặt nằm ngang, chịu lực ép (kể cả trọng lực) $\vec{Q}$ thẳng góc với mặt bàn và chịu lực kéo $\vec{P}$ theo mặt bàn (H 3–2). Ta thấy vật vẫn cân bằng khi trị số của lực $\vec{P}$ không vượt quá giá trị P_o, tức : $P \leq P_o$. Từ thực nghiệm cho biết giá trị P_o tỉ lệ với lực ép Q với hệ số tỉ lệ f, nghĩa là :

$$P_o = f\,Q$$

Hệ số tỉ lệ f phụ thuộc vào vật liệu tạo nên vật và mặt bàn và vào trạng thái bề mặt tiếp xúc (thô, ráp) giữa vật rắn và mặt bàn.



Hình 3–2

Từ đó suy ra :

– Ngoài phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ cân bằng với lực ép $\vec{Q}$ còn có lực cân bằng với lực kéo $\vec{P}$ gọi là lực ma sát, kí hiệu $\vec{F}_{ms}$. Lực ma sát ngược chiều với lực kéo $\vec{P}$ nghĩa là ngược chiều với xu hướng trượt.

– Giá trị lực ma sát trượt không thể lớn tùy ý mà bị hạn chế, giá trị cực đại của nó tỉ lệ với giá trị của lực ép $\vec{Q}$, nghĩa là tỉ lệ với giá trị của phản lực pháp tuyến $\vec{N}$.

Do đó, có thể phát biểu định luật ma sát trượt :

Lực ma sát trượt xuất hiện khi có xu hướng trượt tương đối, nằm theo tiếp tuyến của mặt tựa tiếp xúc, ngược hướng trượt và có giá trị bị chặn trên :

$$F_{ms} \leq fN$$

trong đó : N là giá trị của phản lực pháp tuyến ; f – hệ số hằng số gọi là hệ số ma sát trượt tĩnh, khô.

Có thể phát biểu định luật trên dưới dạng hình học. Gọi góc ma sát, kí hiệu φ, là góc xác định bởi hệ thức :

$$\operatorname{tg}\varphi = f \text{ hay } \varphi = \operatorname{arctg} f$$

và hình nón ma sát là phần giới hạn bởi hai nửa đường thẳng xuất phát từ điểm tiếp xúc của hai vật và nghiêng với pháp tuyến một góc bằng góc ma sát (nếu $f = \operatorname{tg}\varphi$ có cùng giá trị theo mọi hướng trượt thì trong không gian có nón ma sát tròn xoay).

Kí hiệu α là góc nghiêng giữa phản lực toàn phần $\vec{R}$ với pháp tuyến của mặt tựa tại điểm tiếp xúc. Dễ dàng thấy :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{ms}}{N} \leq f = \operatorname{tg}\varphi$$

Từ đó : $\alpha \leq \varphi$

Vì vậy ta có :

Điều kiện để vật cân bằng là phản lực toàn phần của các liên kết tựa có ma sát trượt nằm trong nón ma sát.

Từ đó ta rút ra : Trong trường hợp chỉ có một liên kết tựa, điều kiện để vật cân bằng là hợp lực của các lực hoạt động, tác dụng lên vật rắn có đường tác dụng cắt nón ma sát.

Sử dụng định luật về ma sát trượt nêu trên ta giải được bài toán cân bằng của vật rắn trong trường hợp có ma sát trượt. Cần chú ý rằng đối với vật rắn cân bằng có ma sát trượt, không phải chỉ tồn tại một vị trí cân bằng mà là một miền cân bằng. Do đó các thông số xác định trạng thái cân bằng của vật có thể lấy một miền giá trị chứ không phải có giá trị duy nhất như bài toán cân bằng của vật rắn không có ma sát đã gặp trước đây.

Thí dụ 3-1. Một vật rắn nằm trên mặt phẳng không nhẵn có hệ số ma sát trượt f, nghiêng với mặt phẳng ngang một góc α.

1. Xác định góc α để vật rắn cân bằng dưới tác dụng của lực $\vec{P}$ hướng thẳng đứng xuống dưới và có giá trị lớn tùy ý.

2. Giả sử lực $\vec{P}$ cho trước và vật chịu tác dụng lực $\vec{Q}$ nằm ngang. Xác định góc α để vật có thể trượt lên.

Bài giải

Khảo sát vật rắn cân bằng khi chỉ có lực hoạt động $\vec{P}$. Vật rắn có xu hướng trượt xuống theo mặt phẳng nghiêng nên ngoài phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, còn có lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$ nằm dọc mặt phẳng nghiêng và hướng lên trên (H 3-3). Như vậy vật rắn nằm cân bằng dưới tác dụng của hệ ba lực đồng quy.

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}) \equiv \vec{0}$$

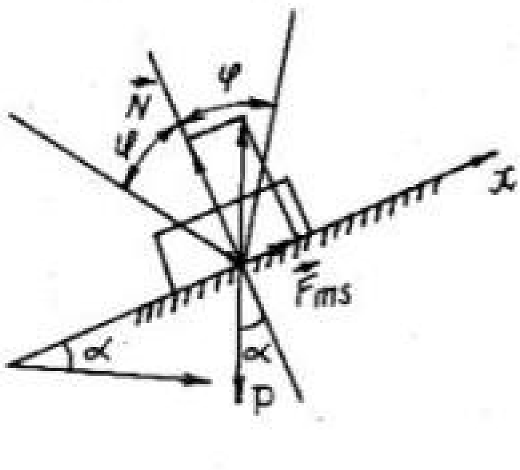
Các phương trình cân bằng có dạng :

$$\sum F_x = F_{ms} - P\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = N - P\cos\alpha = 0$$

Ngoài ra, nhờ định luật về ma sát trượt, ta có :

$$F_{ms} \leq fN$$



Hình 3-3

Từ các phương trình cân bằng, ta tìm được

$$F_{ms} = P\sin\alpha;\ N = P\cos\alpha$$

Khi thay các giá trị vào bất đẳng thức trên, ta có :

$$\sin\alpha \leq f\cos\alpha$$

hay : $$tg\alpha \leq f$$

Ta sẽ nhận được dấu đẳng thức khi vật sắp sửa trượt. Giả sử ứng với trường hợp này góc α lấy giá trị α^*, ta có :

$$f = tg\alpha^*$$

Bằng cách như vậy ta có một phương pháp đơn giản để đo hệ số ma sát trượt.

Nếu φ là góc ma sát ($tg\varphi = f$) thì điều kiện cân bằng của vật trên mặt phẳng nghiêng còn có thể viết như sau :

$$\alpha \leq \varphi$$

Bây giờ ta xét trường hợp ngoài lực $\vec{P}$ vật còn chịu tác dụng lực $\vec{Q}$ và vật có xu hướng trượt lên phía trên. Trong trường hợp này lực ma sát hướng dọc mặt phẳng nghiêng, hướng xuống phía dưới. Vật cân bằng dưới tác dụng của các lực hoạt động $\vec{P}$, $\vec{Q}$ và các lực liên kết gồm phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ và lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ (H 3–4). Ta có.

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}) \equiv \vec{0}$$

Các phương trình cân bằng sẽ là :

$$\sum F_x = Q\cos\alpha - P\sin\alpha - F_{ms} = 0$$
$$\sum F_y = N - Q\sin\alpha - P\cos\alpha = 0$$

Ta xét trường hợp vật sắp sửa trượt lên.

Từ định luật ma sát trượt, ta có :

$$F_{ms} = fN$$

Khi giải đồng thời các phương trình trên, ta nhận được

$$Q = P\frac{(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$$

Rõ ràng, cần thỏa mãn điều kiện Q > 0, tức

$$\cos\alpha - f\sin\alpha > 0$$

hay :

$$\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{f} = \operatorname{cotg}\varphi$$

Vậy :

$$\alpha < \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Giả sử điều kiện này được thỏa mãn, vật có khả năng trượt lên phía trên nếu

$$Q \geq Q^* = P\frac{(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$$

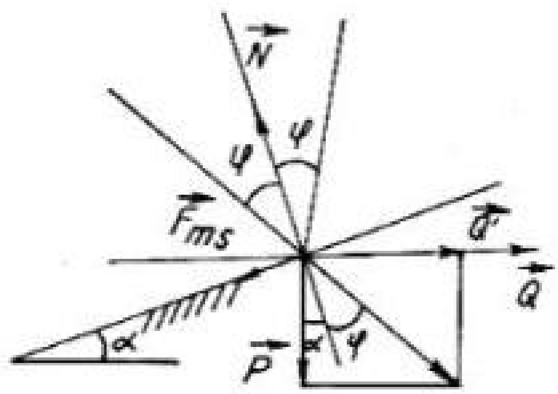
Có thể giải bài toán trên bằng phương pháp hình học.

Trong trường hợp đã cho có thể sử dụng điều kiện cân bằng về hình học đã nêu trên : để vật cân bằng hợp lực của các lực hoạt động có đường tác dụng cắt hình nón ma sát.

Trường hợp vật rắn chỉ chịu tác dụng lực hoạt động $\vec{P}$, từ hình 3 – 3 dễ dàng suy ra rằng :

$$\alpha \leq \varphi$$

Trường hợp khi có thêm lực đẩy $\vec{Q}$ để vật có thể trượt theo hướng lên trên mặt phẳng nghiêng, hợp lực của hai lực $\vec{P}$ và $\vec{Q}$ phải nằm trên đường sinh của nón ma sát, tức đường tác dụng của lực $\vec{Q}$, và do đó đường nằm ngang không cắt nón ma sát. Do đó, ta có (H.3–4).



Hình 3–4

$$\alpha + \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Từ đó :

$$\alpha < \frac{\pi}{2} - \varphi$$

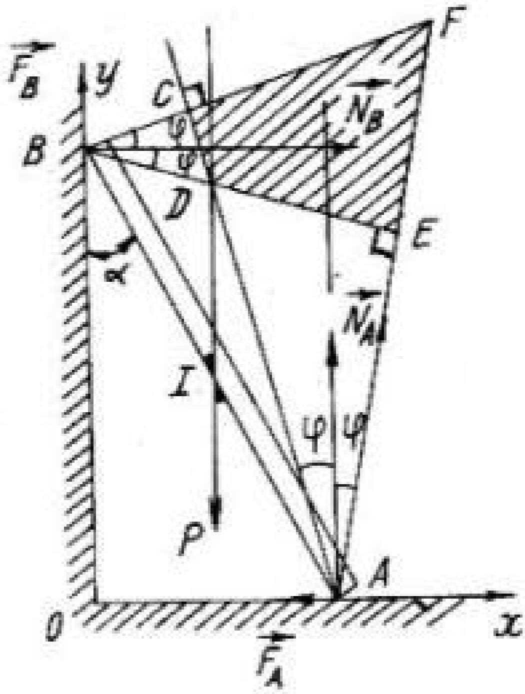
Thí dụ 3 – 2. Thang đồng chất AB có chiều dài $2l$ và trọng lượng P, tựa trên nền ngang Ox và tường thẳng đứng Oy đều không nhẵn và có cùng hệ số ma sát trượt f. Tìm góc nghiêng α của thang với tường để thang cân bằng (H. 3-5).

Bài giải

Khảo sát thang cân bằng ở trạng thái giới hạn (sắp sửa trượt).

Ta nhận thấy nếu góc α càng lớn thì thang càng dễ bị trượt. Do đó góc α, ứng với trạng thái cân bằng giới hạn của thang sẽ có giá trị cực đại.

Lực hoạt động tác dụng vào thang chỉ là trọng lực $\vec{P}$, các lực liên kết gồm các phản lực pháp tuyến $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$, lực ma sát $\vec{F}_A$ hướng theo phương ngang về bên trái và lực ma sát $\vec{F}_B$ hướng thẳng đứng lên phía trên. Vậy ta có hệ lực cân bằng :



Hình 3-5

$$(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{F}_A, \vec{F}_B) \equiv \vec{0}$$

Chọn hệ trục như hình vẽ. Ta có các phương trình cân bằng :

$$\sum F_x = N_B - F_A = 0$$
$$\sum F_y = N_A + F_B - P = 0$$
$$\sum m_0(\vec{F}) = 2N_A l\sin\alpha - 2N_B l\cos\alpha - Pl\sin\alpha = 0$$

Khi viết định luật ma sát trượt cho các liên kết tựa tại A và B ứng với trạng thái cân bằng giới hạn, ta có :

$$F_A = fN_A;\ F_B = fN_B$$

Từ các phương trình vừa được thiết lập trên, ta tìm được :

$$N_A = \frac{P}{1+f^2}\ ; \quad N_B = f\frac{P}{1+f^2}\ ;\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{2f}{1-f^2}$$

Khi chú ý đến góc ma sát φ ($\mathrm{tg}\varphi = f$), ta có :

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\varphi}{1-\mathrm{tg}^2\varphi} = \mathrm{tg}2\varphi$$

Vậy : $$\alpha = 2\varphi$$

Vì góc α tìm được ứng với trạng thái cân bằng giới hạn của thang, nên đó là giá trị cực đại của góc α.

Vậy điều kiện cân bằng của thang sẽ là :

$$\alpha \leq 2\varphi$$

Có thể giải bài toán trên khi thang chưa bị trượt, tức

$$F_A \leq fN_A; \; F_B \leq fN_B$$

Trong trường hợp này, ta đặt.

$$F_A = f_1N_A; \; F_B = f_2N_B \text{ với } f_1 \leq f; \; f_2 \leq f$$

Từ các phương trình cân bằng và hai phương trình này ta tìm được

$$tg\alpha = \frac{2f_2}{1-f_1f_2} \leq \frac{2f}{1-f^2} = tg2\varphi$$

Nếu theo phương pháp hình học, ta vẽ các nón ma sát tại A và B, chúng giao nhau theo một tứ giác CDEF.

Như đã biết, để thang cân bằng các phản lực toàn phần tại A và B phải nằm tương ứng trong các nón ma sát tại A và B. Do đó chúng phải giao nhau tại một điểm thuộc tứ giác CDEF và hợp lực của các lực hoạt động, tức trọng lực $\vec{P}$, cũng phải đi qua điểm đó, tức phải cắt tứ giác CDEF.

Giả sử C là đỉnh tận cùng bên trái của tứ giác CDEF và I là trọng tâm của thang AB. Để thực hiện điều kiện trên, tức đường tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ cắt tứ giác CDEF, ta thấy rằng chỉ cần thực hiện điều kiện

$$x_I \geq x_C$$

Từ hình 3-5, ta có :

$$x_I = l\sin\alpha; \; x_C = BC\cos\varphi = AB\sin(\alpha - \varphi)\cos\varphi = 2l\sin(\alpha - \varphi)\cos\varphi$$

Vậy điều kiện trên có thể được viết như sau :

$$l\sin\alpha \geq 2l\sin(\alpha - \varphi)\cos\varphi = 2l[\sin\alpha + \sin(\alpha - 2\varphi)]$$

Từ đó ta nhận được :

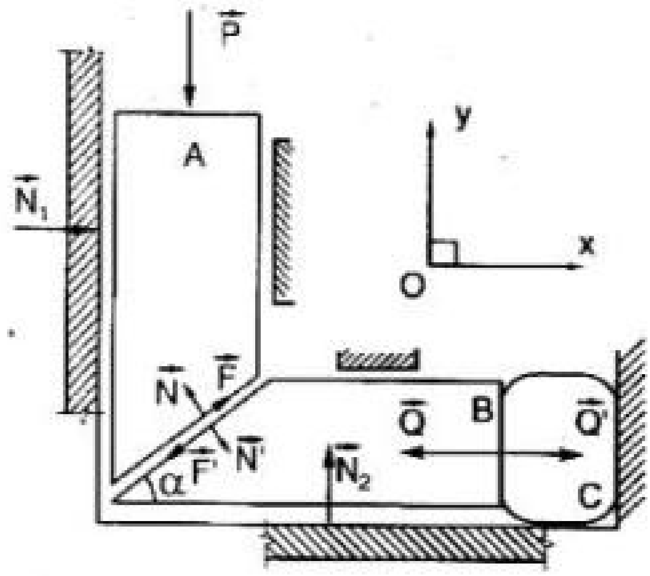
$$\sin(\alpha - 2\varphi) \leq 0$$

nghĩa là $$\alpha \leq 2\varphi$$

Chú ý rằng khi giải bài toán ứng với trạng thái cân bằng giới hạn ta sẽ đi đến kết quả nhanh hơn khi nhận xét rằng : tam giác $A\hat{B}C$ có góc vuông tại C và từ tam giác cân $A\hat{I}C$ rút ra ngay.

$$\alpha = 2\varphi$$

Thí dụ 3 – 3. Trên hình 3–6 là cơ cấu ép bằng nêm gồm : nêm A trượt được theo máng thẳng đứng, còn nêm B – theo phương ngang, mặt tựa giữa hai nêm nghiêng với mặt ngang góc α. Giả thiết hai máng trượt đứng và ngang đều nhẵn, còn mặt trượt nghiêng giữa hai nêm có hệ số ma sát f.



Hình 3–6a

1) Tìm quan hệ giữa lực $\vec{Q}$ do vật C tác dụng lên nêm B và lực $\vec{P}$ tác dụng lên nêm A.

2) Tìm điều kiện để nêm A bị tự hãm.

Bài giải

Đầu tiên xét trường hợp nêm A có xu hướng bị đẩy xuống do chịu lực nén $\vec{P}$ và nêm B chịu tác dụng của lực $\vec{Q}$ do vật ép C (vật biến dạng cân bằng) tác dụng lên. Vậy :

– Nêm A chịu tác dụng lực nén $\vec{P}$, phản lực $\vec{N}_1$ của máng trượt đứng, phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ và lực ma sát $\vec{F}$ tại mặt tựa do tác dụng của nêm B.

– Nêm B chịu tác dụng của phản lực pháp tuyến $\vec{N}'$ và lực ma sát $\vec{F}'$ từ nêm *A* đặt vào, phản lực pháp tuyến $\vec{N}_2$ của máng ngang và lực $\vec{Q}$ do tác dụng của vật C.

Chú ý rằng so với nêm B, nêm A trượt xuống nên lực ma sát đặt vào nêm A hướng lên, còn lực ma sát đặt vào nêm B hướng xuống. Ngoài ra, $\vec{N} = -\vec{N'}$, $\vec{Q} = -\vec{Q'}$.

Ta giải bài toán ứng với trạng thái cân bằng giới hạn, tức trạng thái sắp trượt (H. 3-6a).

Khi lập phương trình hình chiếu của các lực tác dụng lên nêm A trên trục thẳng đứng và của các lực lên nêm B trên trục ngang, ta được :

$$\sum F_y = N\cos\alpha + F\sin\alpha - P = 0$$
$$\sum F_x = N\sin\alpha - F\cos\alpha - Q = 0$$

Ngoài ra định luật ma sát trượt cho ta : $F \leq fN$

Đặt : $F = f'N$; $f' < f$

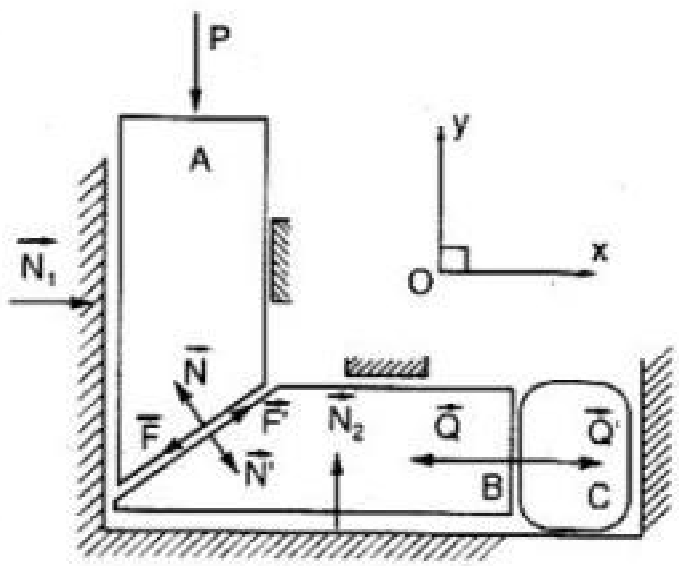
Từ các phương trình trên, ta tìm được :

$$Q = P\,\frac{\sin\alpha - f'\cos\alpha}{\cos\alpha + f'\sin\alpha} \geq P\,\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha}$$

Khi thay $f = \mathrm{tg}\varphi$ (φ là góc ma sát) vào biểu thức trên, ta được

$$Q \geq P\mathrm{tg}(\alpha - \varphi)$$

Xét trường hợp do tác dụng của lực $\vec{Q}$ (do tính đàn hồi của vật biến dạng C) nên B có xu hướng đẩy nêm A trượt lên. Các lực tác dụng lên hai nêm trong trường hợp này được biểu diễn trên hình 3-6b. Tương tự trường hợp trước ta có :



Hình 3-6b

$$\sum F_y = -F\sin\alpha + N\cos\alpha - P = 0$$
$$\sum F_x = F\cos\alpha + N\sin\alpha - Q = 0$$

Ngoài ra : $F \leq fN$

Đặt : $F = f'N$ ($f' \leq f$)

Giải các phương trình trên ta nhận được :

$$Q = P\frac{\sin\alpha + f'\cos\alpha}{\cos\alpha - f'\sin\alpha} \leqslant P\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$$

Khi thay $f = tg\varphi$ vào biểu thức này ta có thể viết :

$Q \leqslant Ptg(\alpha + \varphi)$

Vậy để có hệ cân bằng cần : $Ptg(\alpha - \varphi) \leqslant Q \leqslant Ptg(\alpha + \varphi)$

Để nêm A tự hãm, tức nêm A vẫn cân bằng khi $P \leqslant 0$ với mọi giá trị của $\vec{Q}$ cần phải có điều kiện :

$tg(\alpha + \varphi) < 0$

tức : $\alpha > \frac{\pi}{2} - \varphi$

Điều kiện tự hãm rất cần đối với máy ép bằng nêm vì sau khi tạo lực ép $\vec{Q}'(\vec{Q}' = -\vec{Q})$ thì lực $\vec{P}$ không còn nữa nhưng do tính đàn hồi của vật biến dạng C nêm B sẽ bị đẩy sang trái và nêm A bị đẩy lên và do đó lực ép lên vật C không còn nữa.

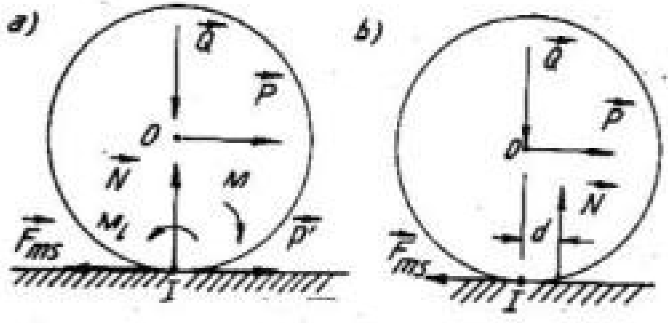
Chú ý : Cần kiểm tra điều kiện không tự hãm của nêm B vì nếu nêm B bị tự hãm thì với giá trị rất lớn của $\vec{P}$ mà lực $\vec{Q}$ vẫn bằng không, tức không tạo nên được $\vec{Q}'$ (tức $\vec{Q}'$ có giá trị bằng không). Dễ dàng tìm được điều kiện tự hãm của nêm B là : $\alpha \leqslant \varphi$

Vậy để nêm B không bị tự hãm cần thực hiện điều kiện $\alpha > \varphi$.

Tuy nhiên dễ dàng nhận biết rằng nếu φ bé thì khi $\alpha > \frac{\pi}{2} - \varphi$ (tức nêm A bị tự hãm) thì điều kiện $\alpha > \varphi$ chắc chắn sẽ được thỏa mãn (tức nêm B không bị tự hãm).

3.3. ĐỊNH LUẬT MA SÁT LĂN

Để thiết lập định luật ma sát lăn ta hãy quan sát hiện tượng xảy ra đối với bánh xe có bán kính R đặt trên mặt nằm ngang, chịu lực nén thẳng đứng $\vec{Q}$ và chịu lực kéo nằm ngang $\vec{P}$ cùng đặt tại tâm O bánh xe (H. 3-7).



Hình 3-7

Theo quy tắc dời lực song song, có thể thay lực $\vec{P}$ bằng lực $\vec{P'}$ song song cùng chiều cùng trị số với lực $\vec{P}$ nhưng đặt tại tiếp điểm I và ngẫu lực cùng chiều quay của $\vec{P}$ quanh I và có mômen $M = PR$. Lực $\vec{P'}$ gây trượt và ngẫu lực M gây lăn. Để bánh xe không bị trượt $\vec{P'}$ có giá trị không vượt quá giá trị cực đại có thể đạt được của lực ma sát trượt, nghĩa là :

$$P \leqslant fN = fQ$$

Hiện tượng lăn không xuất hiện nếu :

$$M < M_O$$

Từ thực nghiệm người ta thấy giá trị M_O tỉ lệ với giá trị của lực nén $\vec{Q}$, tức tỉ lệ với giá trị của phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ với hệ số tỉ lệ k, tức :

$$M_O = kN$$

Hệ số k được gọi là hệ số ma sát lăn, có thứ nguyên độ dài, phụ thuộc vào vật liệu tạo thành của hai vật tiếp xúc và trạng thái bề mặt tiếp xúc... Thường hệ số ma sát lăn bé hơn nhiều lần hệ số ma sát trượt.

Như vậy định luật ma sát lăn có thể được phát biểu như sau :

Ngẫu lực ma sát lăn xuất hiện khi có xu hướng lăn tương đối, có chiều ngược với chiều của xu hướng lăn và có giá trị :

$$M_l \leqslant kN$$

Vì hệ số ma sát lăn bé hơn nhiều lần so với hệ số ma sát trượt nên trong nhiều trường hợp ma sát lăn được bỏ qua.

Có thể diễn tả khả năng chống lăn bằng cách dời song song phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ về phía bánh xe có xu hướng lăn đến một đoạn $d = M_l / N$. (H.3–7).

Chúng ta có :

$$d = \frac{M_l}{N} \leq \frac{kN}{N} = k$$

Vậy khi có ma sát lăn, phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ nằm ở phía vật có xu hướng lăn đến và cách pháp tuyến một đoạn :

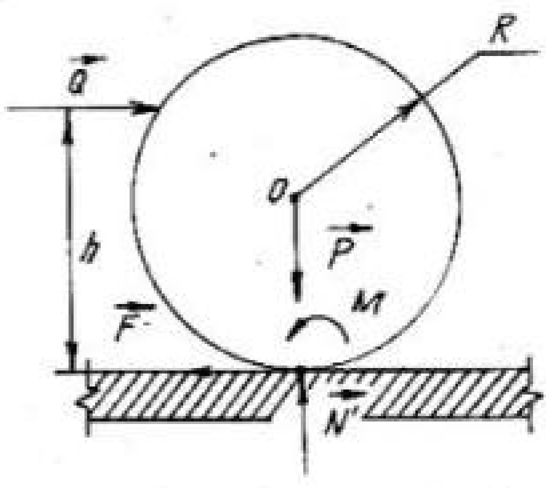
$$d \leq k$$

Thí dụ 3 – 4. Trên đường nằm ngang có con lăn đồng chất bán kính R, trọng lượng P chịu lực đẩy $\vec{Q}$ theo phương ngang và cách mặt đường một đoạn h. Biết hệ số ma sát trượt f, hệ số ma sát lăn k. Tìm giá trị của lực $\vec{Q}$ để con lăn cân bằng (H.3–8).

Bài giải

Khảo sát con lăn đang cân bằng, tức không trượt và không lăn.

Hệ lực tác dụng lên con lăn gồm các lực hoạt động $\vec{Q}$ và $\vec{P}$, các lực liên kết : phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, lực ma sát trượt $\vec{F}$, ngẫu lực ma sát lăn $\overline{M}$. Ta có hệ lực cân bằng.



Hình 3-8

$$(\vec{Q}, \vec{P}, \vec{N}, \vec{F}, \overline{M}) \equiv 0$$

Khi viết các phương trình cân bằng và các bất đẳng thức ma sát lăn và ma sát trượt ta có :

$$\sum F_x = Q - F = 0$$
$$\sum F_y = N - P = 0$$
$$\sum m(\vec{F}) = M - Qh = 0$$
$$F \leq fN; \; M \leq kN$$

Từ các phương trình cân bằng ta nhận được :

$$F = Q;\ N = P;\ M = Qh$$

Vậy điều kiện để con lăn không bị trượt sẽ là

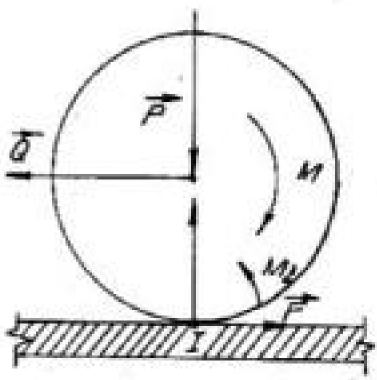
$$Q \leq fP$$

Còn điều kiện để con lăn không bị lăn sẽ có dạng :

$$Q \leq \frac{k}{h}P$$

Thông thường $\frac{k}{h} << f$ nên điều kiện không lăn thường bị vi phạm trước, nghĩa là thông thường con lăn lăn trước khi trượt. Tuy nhiên với h quá bé có thể xảy ra trượt trước khi lăn.

Thí dụ 3 – 5. Trên mặt nằm ngang có bánh xe đồng chất tâm O bán kính R, trọng lượng P chịu tác dụng ngẫu lực $\overline{M}$ và lực $\vec{Q}$ như hình vẽ. Biết hệ số ma sát trượt f, và hệ số ma sát lăn k. Xác định trị số của mô men $\overline{M}$ và của lực $\vec{Q}$ để bánh xe có thể lăn không trượt.



Hình 3-9

Bài giải

Khảo sát con lăn đang cân bằng và sắp sửa lăn.

Hệ lực tác dụng lên con lăn gồm ngẫu lực $\overline{M}$, trọng lực $\vec{P}$ và lực $\vec{Q}$, phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, lực ma sát trượt $\vec{F}$, ngẫu lực ma sát lăn $\overline{M}_1$ (H. 3–9).

Vì con lăn đang cân bằng, nên ta có :

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \overline{M}, \vec{N}, \vec{F}, \overline{M}_1) \equiv 0$$

Các phương trình cân bằng sẽ là :

$$\sum F_x = F - Q = 0$$
$$\sum F_y = N - P = 0$$
$$\sum m_I(\vec{F}) = QR + M_1 - M = 0$$

Từ hệ phương trình này, ta nhận được :

$$F = Q;\ N = P;\ M_l = M - QR$$

Như đã biết, điều kiện để con lăn lăn được không trượt sẽ là :

$$M_l = kN;\ F < fN$$

Vậy

$$M - QR = kP;\ Q < fP$$

Từ đó

$$M = QR + kP \qquad \text{(a)}$$

$$Q < fP \qquad \text{(b)}$$

Khi so sánh (a) và (b), ta có :

$$Q = \frac{1}{R}(M - kP) < fP$$

nó cho ta :

$$M < P(fR + k) \qquad \text{(c)}$$

Kết hợp (a) và (c) chúng ta tìm được điều kiện để con lăn lăn không trượt :

$$QR + kP \leq M \leq P(fR + k)$$
$$Q < fP$$

CHƯƠNG 4

TRỌNG TÂM

4.1. TÂM CỦA HỆ LỰC SONG SONG

Cho hệ lực song song bất kỳ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ với $\sum\limits_{k=1}^{n} \vec{F}_k \neq \vec{0}$, đặt tại điểm $M_1, M_2, \ldots M_n$

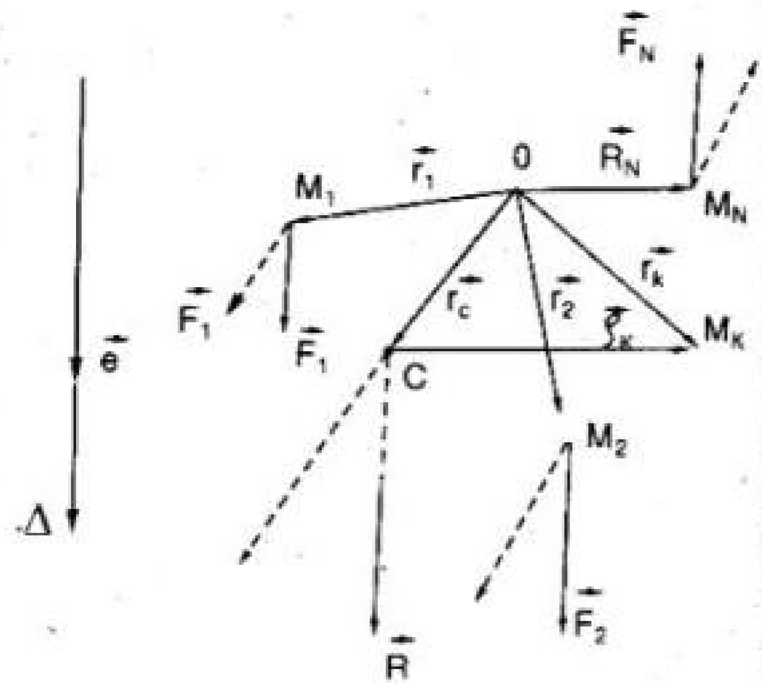
Kí hiệu vectơ định vị của điểm M_k qua $\vec{r}_k = \overrightarrow{OM}_k$

Định nghĩa : *Điểm hình học C gọi là tâm của hệ lực song song được xác định bởi công thức :*

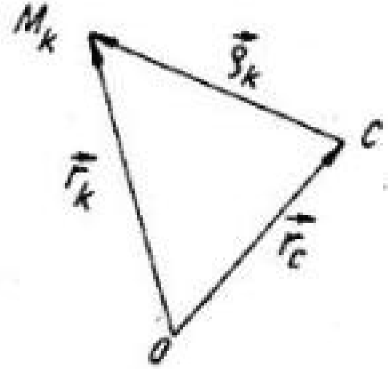
$$\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{F}_k \vec{r}_k}{\sum \bar{F}_k} \qquad (4\text{-}1)$$

trong đó : $\overline{F}_k$ là hình chiếu của lực $\vec{F}_k$ trên trục Δ song song với các lực.

Chúng ta sẽ chứng minh tính chất quan trọng sau đây : Hợp lực của hệ lực song song đi qua điểm C và nếu quay các lực thành phần quanh các điểm đặt của chúng một góc α trong điều kiện giữ nguyên điểm đặt và giá trị của các lực thành phần thì hợp lực của chúng cũng quay tâm C một góc α.



Hình 4-1



Hình 4-2

Vì rằng $\sum \vec{F}_k \neq \vec{0}$ nên hệ lực song song có hợp lực $\vec{R}$ song song với các lực thành phần. Từ công thức (4–1) ta thấy rằng vị trí của tâm C không phụ thuộc vào phương của các lực. mà chỉ phụ thuộc vào giá trị và vị trí của các điểm đặt của các lực. Do đó ta chỉ cần chứng minh rằng hợp lực $\vec{R}$ đi qua C, tức :

$$\vec{m}_c(\vec{R}) = \vec{0}$$

Kí hiệu $\vec{e}$ là vectơ đơn vị trên trục Δ có chiều phù hợp với chiều dương của trục Δ. Rõ ràng ta có :

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k; \ \vec{R} = \overline{R}.\vec{e}; \ \vec{F}_k = \overline{F}_k\vec{e}\ ; \ \overline{R} = \sum \overline{F}_k \qquad \text{(a)}$$

Vì $\vec{R}$ là hợp lực của hệ lực, nên theo định lí Varinhông

$$\vec{m}_c(\vec{R}) = \sum \vec{m}_c(\vec{F}_k) \qquad \text{(b)}$$

Từ hình 4-2 ta có :

$$\sum \vec{M}_c(\vec{F}_k) = \sum \vec{\rho}_k \wedge \vec{F}_k = \sum(\vec{r}_k - \vec{r}_c) \wedge \vec{F}_k =$$

$$= \sum \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k - \vec{r}_c \wedge \sum \vec{F}_k$$

Dựa vào (4-1) và (a) ta nhận được :

$$\vec{r}_c \wedge \sum \vec{F}_k = \frac{\sum \overline{F}_k \vec{r}_k}{\sum \overline{F}_k} \wedge \sum \overline{F}_k \vec{e} = \sum \vec{r}_k \wedge \overline{F}_k \vec{e} =$$

$$= \sum \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k$$

Do đó từ (b) ta có :

$$\vec{m}_c(\vec{R}) = \sum \vec{m}_c(\vec{F}_k) = \sum \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k - \sum \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k = \vec{0}$$

Đó là điều cần chứng minh.

4.2. TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

4.2.1 ĐỊNH NGHĨA VÀ CÔNG THỨC XÁC ĐỊNH TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

Khảo sát vật rắn nằm gần quả đất. Chia vật rắn thành nhiều phần tử nhỏ. Mỗi phần tử chịu lực hút của quả đất, gọi là trọng lực hướng về tâm quả đất. Vì rằng các phần tử nằm gần quả đất nên khoảng cách từ chúng đến mặt đất bé hơn rất nhiều lần bán kính quả đất, nên hệ các trọng lực được xem là hệ lực song song cùng chiều. Giá trị của trọng lực được gọi là trọng lượng của phần tử.

Kí hiệu M_k là một điểm nào đó thuộc phần tử thứ k, nó có trọng lượng là ΔP_k và $\vec{r}_k$ là vectơ định vị của điểm M_k. Dựa vào công thức (4-1), tâm của hệ trọng lực được xác định nhờ biểu thức :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \Delta P_k \vec{r}_k}{\sum \Delta P_k}$$

Khi số phần tử được chia tăng lên vô cùng còn kích thước của các phần tử là những đại lượng vô cùng bé, thì $P = \lim \sum \Delta P_k$ được gọi là trọng lượng của vật rắn, còn điểm giới hạn của C được gọi là trọng tâm G của vật rắn. Vậy trọng tâm của vật rắn được xác định nhờ công thức sau :

$$\vec{r}_G = \frac{\lim \sum \Delta P_k \vec{r}_k}{P} \qquad (4-2)$$

Từ đó ta nhận được công thức xác định các tọa độ của trọng tâm vật rắn

$$x_G = \frac{\lim \sum \Delta P_k x_k}{P} \; ; \; y_G = \frac{\lim \sum \Delta P_k y_k}{P} \; ; \; z_G = \frac{\lim \sum \Delta P_k z_k}{P} \qquad (4-3)$$

Như đã biết :

$$\lim \sum \Delta P_k \vec{r}_k = \int_{(V)} \vec{r}\, dP$$

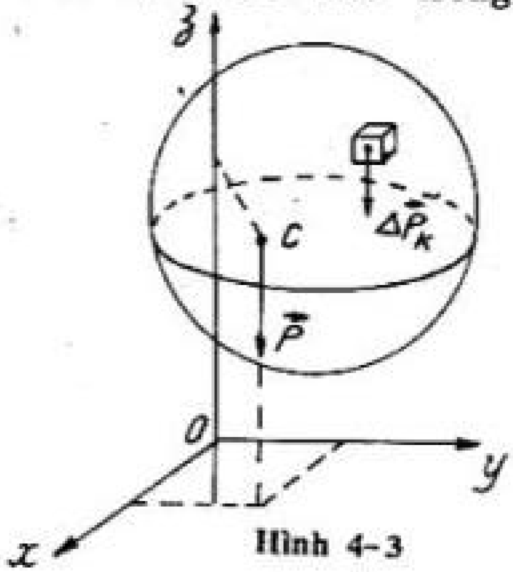
Nên các công thức (4–2) và (4–3) có thể viết trong dạng :

$$\vec{r}_G = \frac{1}{P} \int_{(V)} \vec{r}\, dP$$

$$x_G = \frac{1}{P} \int_{(V)} x dP \; ;$$

$$y_G = \frac{1}{P} \int_{(V)} y dP \; ;$$

$$z_G = \frac{1}{P} \int_{(V)} z dP \qquad (4-4)$$



Hình 4-3

4.2.2. CÔNG THỨC XÁC ĐỊNH TRỌNG TÂM CỦA CÁC VẬT ĐỒNG CHẤT

1. Nếu vật là một khối đồng chất có thể tích V và trọng lượng riêng ρ thì $dP = \rho dV$, trong đó dV là thể tích của phần tử vô cùng bé. Dễ dàng nhận được :

$$\vec{r}_G = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} \vec{r}\, dV$$

$$x_G = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV \; ; \; y_G = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dV \; ; \; z_G = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV \qquad (4-5)$$

2. Nếu vật là một mặt đồng chất có diện tích S, tương tự trên ta có :

$$\vec{r}_G = \frac{1}{S} \iint_{(S)} \vec{r} dS$$

$$x_G = \frac{1}{S} \iint_{(S)} x dS; \quad y_G = \frac{1}{S} \iint_{(S)} y dS; \quad z_G = \frac{1}{S} \iint_{(S)} z dS \qquad (4-6)$$

Đặc biệt, khi mặt là một tấm phẳng đồng chất có tiết diện F thì :

$$x_G = \frac{1}{F} \iint_{(F)} x dF = \frac{S_y}{F}\ ; \quad y_G = \frac{1}{F} \iint_{(F)} y dF = \frac{S_x}{F} \qquad (4-7)$$

$$S_x = \iint_F y dF; \ S_y = \iint_F x dF \qquad (4-8)$$

được gọi là mô men tĩnh của tiết diện F đối với trục x và trục y tương ứng.

3. Nếu vật là một đường đồng chất, có chiều dài L, thì :

$$\vec{r}_G = \frac{1}{L} \int_{(L)} \vec{r} dL$$

hoặc

$$x_G = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dL\ ; \quad y_G = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dL\ ; \quad z_G = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dL \qquad (4-9)$$

4.2.3. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

Định lí 1. *Nếu vật rắn đồng chất có tâm (trục, mặt phẳng) đối xứng thì trọng tâm của nó nằm tại tâm (trục, mặt phẳng) đối xứng*

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp vật đồng chất có tâm đối xứng. Trường hợp vật đồng chất có trục và mặt phẳng đối xứng sẽ được chứng minh tương tự.

Nếu vật rắn đồng chất có một tâm đối xứng O thì ứng với phần tử M_k có trọng lượng ΔP_k và vectơ định vị $\vec{r}_k$ thì có phần tử M'_k có trọng lượng ΔP_k đối xứng qua tâm O, tức vectơ định vị của nó là $(-\vec{r}_k)$. Phân hoạch vật rắn thành từng cặp phần tử đối xứng qua tâm và tính tổng, ta có :

$$\vec{r}_G = \frac{\sum \Delta P_k \vec{r}_k - \sum \Delta P_k \vec{r}_k}{P} = \vec{0}$$

Đó là điều cần chứng minh.

Định lí 2. *Nếu vật rắn gồm các phần mà trọng tâm của các phần đó nằm trên một đường thẳng (mặt phẳng) thì trọng tâm của vật cũng nằm trên đường thẳng (mặt phẳng) đó.*

Chứng minh : Giả sử vật rắn gồm nhiều phần có trọng tâm nằm trên cùng một mặt phẳng, ví dụ mặt phẳng Oxy.

Để xác định, giả sử rằng vật gồm m phần có các trọng tâm là $G_1, G_2, ..., G_m$ và trọng lực là $P_1, P_2, ... P_m$. Kí hiệu tọa độ các trọng tâm G_i qua, x_i, y_i, z_i ($i = \overline{1, m}$). Rõ ràng :

$$z_i = 0 \ (i = \overline{1, m}) \qquad \text{(a)}$$

Áp dụng công thức tính trọng tâm (4–1) cho phần thứ i, ta có :

$$z_i = \frac{\sum\limits_{(i)} \Delta P_k z_k}{P_i} \ ; \quad (i = \overline{1,m})$$

Do (a) ta có

$$\sum_{(i)} \Delta P_k z_k = 0; \ (i = \overline{1,m}) \qquad \text{(b)}$$

Để tính trọng tâm của vật ta phân hoạch vật thành các phần tử lần lượt theo các phần của vật từ phần thứ 1 đến phần thứ m. Bằng cách này ta có :

$$z_G = \frac{\sum\limits_{(1)} \Delta P_k z_k + \sum\limits_{(2)} \Delta P_k z_k + ... + \sum\limits_{(m)} \Delta P_k z_k}{P_1 + P_2 + ... + P_m}$$

Khi dựa vào (b) ta có : $z_G = 0$

Đó là điều cần chứng minh.

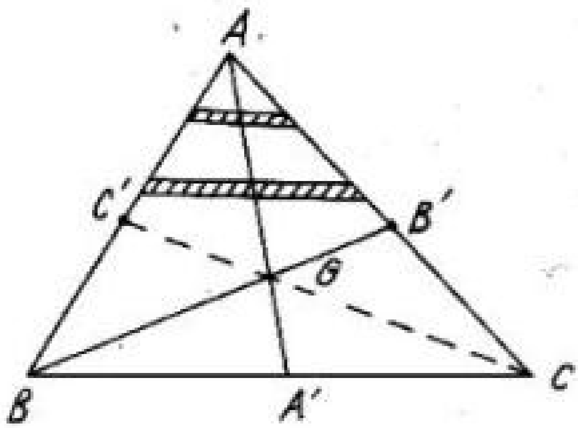
Bằng cách tương tự ta chứng minh cho trường hợp vật rắn gồm nhiều phần có các trọng tâm nằm trên một đường thẳng.

Áp dụng các định lí trên ta tìm ngay được:

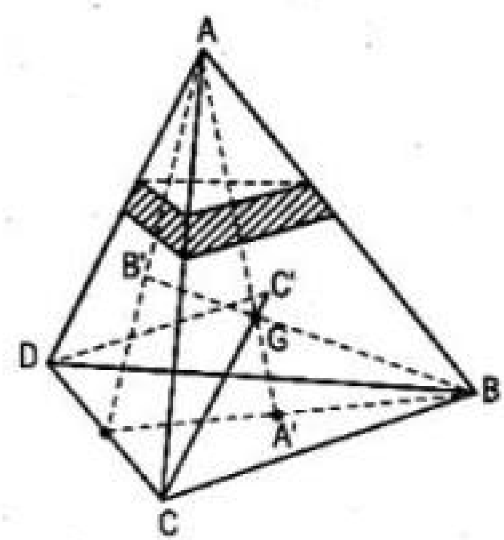
a) Trọng tâm của một thanh đồng chất là điểm giữa của thanh.

b) Trọng tâm các hình bình hành, chữ nhật, hình vuông, khối hộp, khối hộp chữ nhật, khối lập phương đồng chất là tâm của chúng.

c) Trọng tâm của tam giác đồng chất là giao điểm của các trung tuyến.



Hình 4-4



Hình 4-5

Thực vậy phân hoạch tam giác $\overset{\Delta}{ABC}$ thành vô hạn các dải vô cùng mảnh song song với đáy tam giác, thí dụ, đáy BC. Trọng tâm của mỗi dải nằm tại trung điểm của dải. Vậy theo định lí 2 trọng tâm của tam giác phải nằm trên đường trung tuyến AA'. Tương tự như trên, chứng minh được rằng trọng tâm tam giác cũng nằm trên các trung tuyến BB' và CC'. Vậy trọng tâm của tam giác phải nằm trên cả ba trung tuyến nên phải nằm tại giao của chúng (H. 4–4).

d) Trọng tâm của tứ diện đồng chất. Phân hoạch tứ diện ABCD thành những lát vô cùng mỏng hình tam giác song song với đáy, thí dụ, đáy $\overset{\Delta}{BCD}$. Trọng tâm của mỗi lát nằm tại các giao điểm các trung tuyến của chúng. Vậy trọng tâm của tứ diện phải nằm trên đoạn AA' theo định lí 2. Tương tự chứng minh được rằng trọng tâm của tứ diện cũng nằm trên các đoạn BB' và CC' (H. 4–5). Vậy trọng tâm G của tứ diện là giao điểm của các đường AA', BB' và CC', dễ dàng tìm được :

$$GA' = \frac{1}{3}GA \qquad (4\text{–}10)$$

e) Trọng tâm của cung tròn đồng chất AB có bán kính R và góc tại tâm AOB = 2α. (H. 4–6).

Đầu tiên nhận xét là trọng tâm G của cung nằm trên trục đối xứng Ox và độ dài của cung $L = 2\alpha R$.

Chia cung tròn AB thành vô hạn cung vô cùng bé $\widehat{MM'}$ có vị trí xác định bởi góc $\varphi = \widehat{GOM}$ và có góc ở tâm là $d\varphi = \widehat{MOM'}$, chiều dài $dl = Rd\varphi$.

Chú ý rằng hoành độ của cung $\widehat{MM'}$ là :

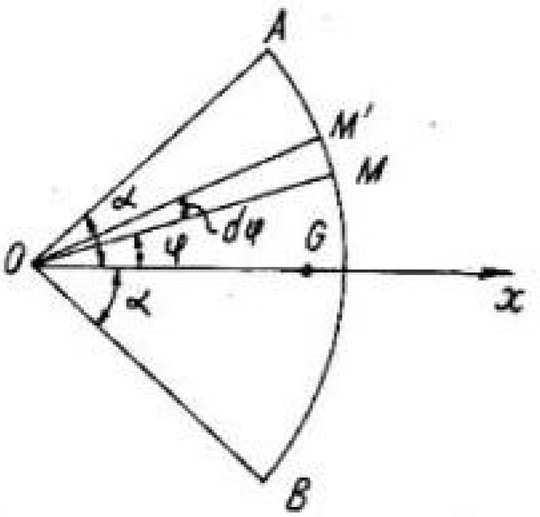
$$x_M = x = R\cos\varphi$$

Theo công thức (4–9), ta có :

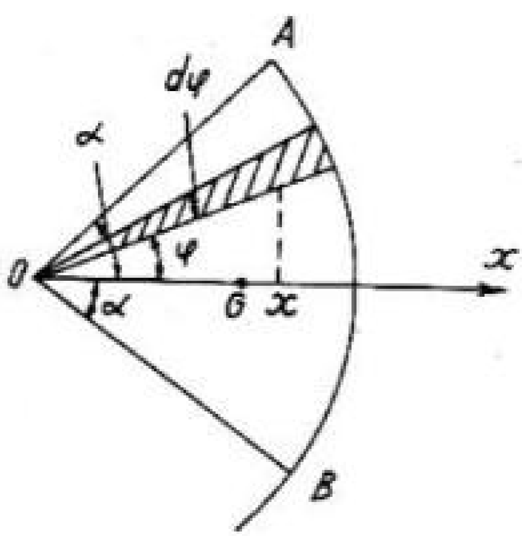
$$x_G = \frac{1}{L}\int x dL = \frac{1}{2\alpha R}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi \, Rd\varphi = \frac{\sin\alpha}{\alpha} R \qquad (4-11a)$$

Nếu cung AB là nửa đường tròn, tức $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì :

$$x_G = \frac{2R}{\pi} \qquad (4-11b)$$



Hình 4-6



Hình 4-7

f) Trọng tâm của một quạt tròn đồng chất AOB tâm O, có bán kính R và góc tại tâm AOB = 2α (H. 4–7).

Ta chia quạt tròn thành vô số hình quạt nhỏ, mỗi hình quạt có thể được xem là một tam giác có trọng tâm nằm ở $\frac{2}{3}$ bán kính, có góc mở là $d\varphi$, có đáy bằng $Rd\varphi$ và diện tích $dF = \frac{1}{2} R^2 d\varphi$, vị trí của nó được xác định bằng góc φ.

Chú ý rằng quạt tròn AOB có trọng tâm nằm trên trục đối xứng Ox, có diện tích $F = R^2\alpha$, áp dụng công thức (4–8), trong đó hoành độ của quạt phần tử ứng với góc φ là $x = \frac{2}{3} R\cos\varphi$, ta có :

$$x_G = \frac{1}{R^2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R\cos\varphi \, \frac{1}{2} R^2 d\varphi = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (4-12a)$$

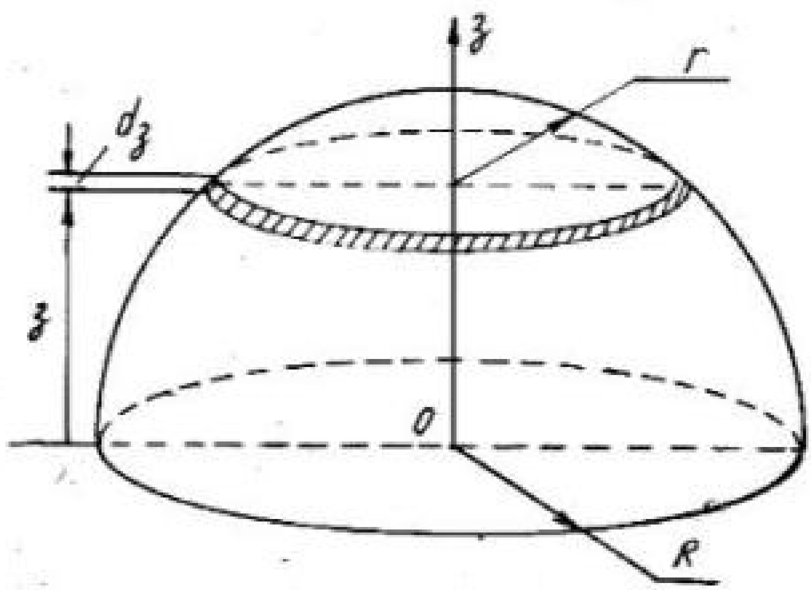
Nếu quạt AOB là nửa mặt tròn, tức $\alpha = \frac{\pi}{2}$, thì

$$x_G = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \qquad (4-12b)$$

Chú ý rằng các kết quả vừa tìm được có thể suy trực tiếp từ kết quả của trường hợp e), ở đó bán kính được thay bằng $\frac{2}{3}$ R.

g) Trọng tâm của bán cầu đồng chất tâm O, bán kính R (H. 4-8).

Do đối xứng nên trọng tâm của bán cầu nằm trên trục Oz. Chia bán cầu thành vô hạn lát mỏng song song với đáy, tức vuông góc với trục Oz.



Hình 4-8

Xét một lát, vị trí của nó được xác định bởi cao độ z và có độ dày dz, ta có :

$$dV = \pi r^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz.$$

Chú ý rằng thể tích bán cầu là

$V = \frac{2}{3} \pi R^3$, theo công thức (4–6), ta có :

$$z_G = \frac{1}{V} \iiint dV = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \int_0^R z\pi(R^2 - z^2)dz = \frac{3}{8} R \qquad (4-13)$$

Định lí 3. *Nếu vật rắn được ghép từ m phần, mỗi phần có trọng lượng P_i và trọng tâm tại C_i (x_i, y_i, z_i), thì trọng tâm của vật được xác định nhờ công thức :*

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} P_i} \; ; \; y_G = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i y_i}{\sum_{i=1}^{m} P_i} \; ; \; z_G = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i z_i}{\sum_{i=1}^{m} P_i} \qquad (4-14)$$

Công thức (4–14) còn được gọi là công thức tính trọng tâm vật ghép.

Chứng minh. Kí hiệu vectơ định vị của G và C_i tương ứng qua $\vec{r}_G$ và $\vec{r}_i$. Để chứng minh công thức (4–14), ta chỉ cần chứng minh công thức :

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{m} P_i} \qquad (a)$$

Vì G_i là trọng tâm của phần thứ i, nên theo (4–2), ta có

$$\vec{r}_i = \frac{\lim \sum_{(i)} \Delta P_K \vec{r}_K}{P_i}$$

Từ đó : $$\lim \sum_{(i)} \Delta P_k \vec{r}_k = P_i \vec{r}_i \qquad (b)$$

Để tính trọng tâm vật rắn, ta phân hoạch vật rắn thành các phần tử vô cùng bé theo từng phần tạo nên vật ghép, ta có :

$$\vec{r}_G = \frac{\lim \sum_{(1)} \Delta P_K \vec{r}_K + \ldots + \lim \sum_{(m)} \Delta P_K \vec{r}_K}{P_1 + \ldots + P_m} \qquad (c)$$

Khi thay (b) vào (c) ta có ngay (a). Đó là điều cần chứng minh.

Chú ý rằng công thức (4–14) vẫn áp dụng được cho vật khuyết, ở đó phần khuyết được xem là phần ghép có trọng lượng âm.

Thí dụ 4–1. Tìm trọng tâm của tấm đồng chất hình chữ L có kích thước cho trên hình 4–9.

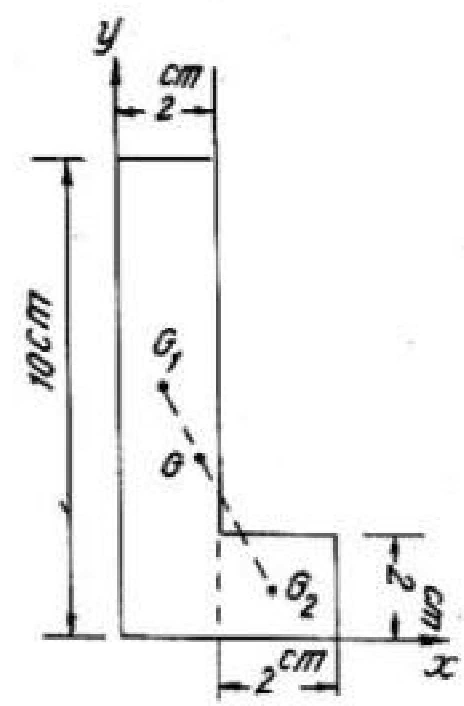
Bài giải

Chia tấm chữ L thành hai tấm chữ nhật có trọng tâm G_1 và G_2, có các tọa độ : $x_1 = 1$, $y_1 = 5$; $x_2 = 3$, $y_2 = 1$.

Diện tích của các tấm chữ nhật là $S_1 = 20cm^2$; $S_2 = 4cm^2$. Vì tấm đồng chất nên công thức (4 – 14) được viết như sau :

$$x_G = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2} = \frac{4}{3}\,\text{cm} \;;$$

$$y_G = \frac{S_1y_1 + S_2y_2}{S_1 + S_2} = 4{,}3\,\text{cm}$$

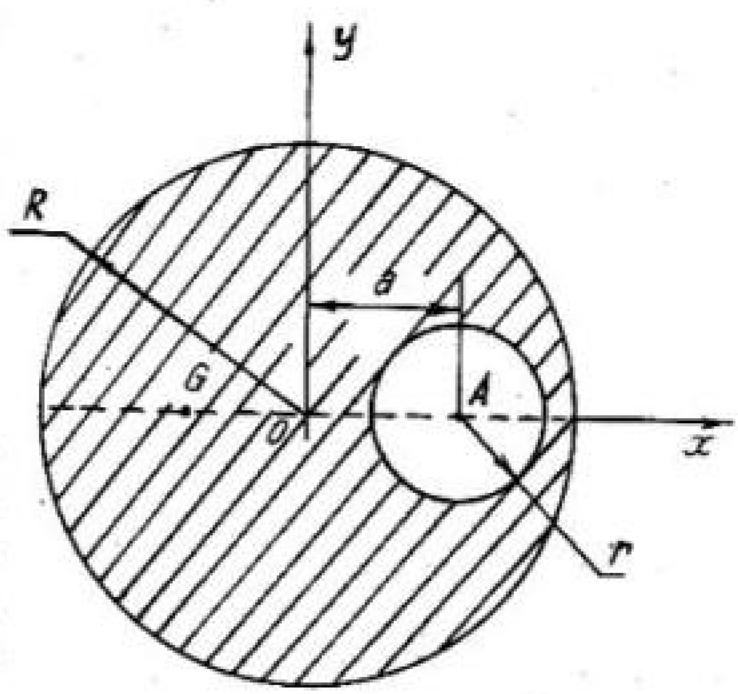


Hình 4–9

Thí dụ 4–2. Tìm trọng tâm của tấm tròn đồng chất tâm O, bán kính R, bị khuyết một mảnh tròn tâm A bán kính r, biết OA = a < R, a + r < R, (H. 4–10).

Bài giải

Xem tấm bị khuyết là kết quả của việc ghép tấm tròn nguyên có trọng tâm tại O (0, 0), diện tích $S_1 = \pi R^2$ với mảnh tròn có trọng tâm tại A (a, 0), diện tích tấm $S_2 = -\pi r^2$.



Hình 4–10

Do tấm có trục Ox đối xứng nên trọng tâm nằm trên trục này và do tấm đồng chất nên công thức (4 – 14) có dạng :

$$x_G = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2} = \frac{\pi R^2 . 0 - \pi r^2 a}{\pi R^2 - \pi r^2} = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}$$

dấu – chứng tỏ G nằm bên trái tâm O.

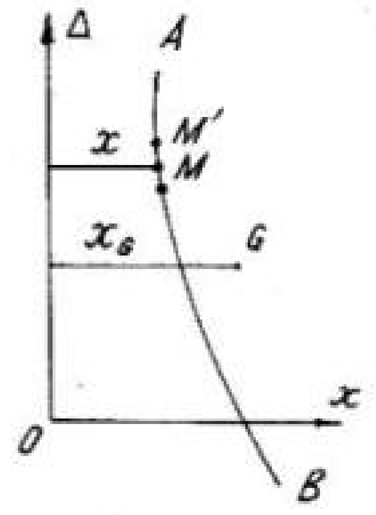
Định lí 4. *(công thức Guynđanh 1) Diện tích S sinh ra bởi đường cong phẳng C khi quay quanh trục đồng phẳng Δ nhưng không cắt nó, được xác định bởi công thức*

$$S = 2\pi Ld \qquad (4-15)$$

trong đó : L là độ dài của đường cong C, còn d là khoảng cách từ trọng tâm G của đường cong đến trục Δ.

Chứng minh. Trong mặt phẳng chứa đường cong C chọn trục Ox thẳng góc với trục Δ tại O (H. 4–11), chia đường cong C ra vô hạn các cung vô cùng bé. Ta xét cung $\overset{\frown}{MM'}$ có độ dài dl. Hoành độ của trọng tâm G của cung AB dựa vào (4 – 9) là

$$d = x_G = \frac{1}{L}\int xdl \qquad (a)$$



Hình 4-11

Khi đường cong C quay quanh trục Δ cung vô cùng bé $\overset{\frown}{MM'}$ quét ra một diện tích dS = 2πxdl, nên diện tích do đường cong C quét ra là :

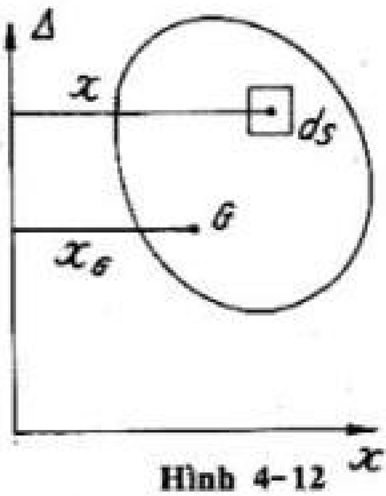
$$S = \int ds = \int 2\pi xdl = 2\pi \int xdl \qquad (b)$$

Từ (a) và (b), ta nhận được (4 – 15). Đó là điều cần phải chứng minh.

Định lí 5 *(công thức Guynđanh 2). Thể tích V sinh ra bởi tấm phẳng khi quay quanh trục đồng phẳng và không cắt nó, được xác định bởi công thức :*

$$V = 2\pi Sd \qquad (4-16)$$

trong đó : S là diện tích tấm phẳng, d là khoảng cách từ trọng tâm tấm phẳng đến trục Δ (H. 4−12).



Hình 4-12

Chứng minh. Tương tự như trên, chia tấm phẳng thành vô hạn diện tích vô cùng bé dS. Hoành độ trọng tâm của tấm, theo công thức (4−7) sẽ là :

$$d = x_G = \frac{1}{S}\int x dS \qquad (a)$$

Khi tấm quay quanh trục Δ, diện tích dS có hoành độ x sẽ tạo nên thể tích $dV = 2\pi x dS$.

Thể tích do tấm quay quanh trục Δ sinh ra sẽ là :

$$V = \int dV = \int 2\pi x dS = 2\pi \int x dS \quad (b)$$

Từ (a) và (b) ta nhận được (4−16). Đó là điều cần phải chứng minh.

Thí dụ 4−3. Tìm trọng tâm của nửa đường tròn tâm O bán kính R.

Bài giải

Cho nửa đường tròn quay quanh đường kính đáy của nó, được mặt cầu diện tích $S = 4\pi R^2$ kí hiệu d là khoảng cách từ trọng tâm G đến đường kính đáy. Công thức Guynđanh (4−15) cho ta :

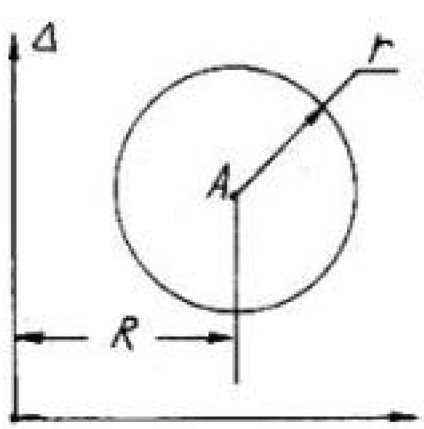
$$4\pi R^2 = 2\pi dL = 2\pi d\pi R$$

Từ đó, ta nhận được : $d = \frac{2R}{\pi}$ nó trùng với kết quả (4−11b) đã được tìm ở trên.

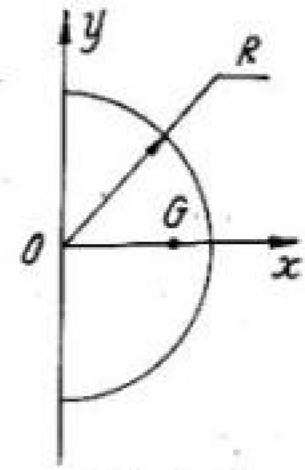
Thí dụ 4−4. Tìm thể tích của khối xuyến sinh ra bởi tấm tròn tâm A, bán kính r khi quay quanh trục Δ đồng phẳng, cách A một đoạn R > r (H. 4−13).

Bài giải

Diện tích tấm tròn là $S = \pi r^2$, trọng tâm tấm tròn là A, nằm cách trục Δ một đoạn d = R > r.



Hình 4-13



Hình 4-14

Công thức Guynđanh (4–16) cho thể tích khối xuyến :

$$V = 2\pi dS = 2\pi^2 r^2 R$$

Thí dụ 4–5. Tìm trọng tâm của một nửa tấm tròn tâm O, bán kính R (H. 4–14).

Bài giải

Do tính đối xứng, trọng tâm của nửa tấm tròn sẽ nằm trên trục Ox vuông góc với đường kính đáy của tấm.

Cho tấm quay quanh đường kính đáy ta được khối cầu có thể tích $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Theo công thức Guynđanh (4–16), ta có : $\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi x_G \cdot \frac{1}{2}\pi R^2$

Từ đó :

$$x_G = 4R/\ 3\pi$$

Ta tìm lại được kết quả (4–12b) ở trên.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Các khái niệm cơ bản và hệ tiên đề tĩnh học. Vai trò của từng tiên đề trong việc xây dựng nội dung môn học.

2. Định nghĩa về liên kết và phản lực liên kết. Khảo sát một số liên kết thường gặp.

3. Định nghĩa mô men của lực đối với một điểm. Biểu thức vectơ của nó.

4. Định nghĩa mô men của lực đối với một trục. Định lí liên hệ giữa mô men của lực đối với một điểm và mô men của lực đối với một trục.

5. Định nghĩa ngẫu lực. Các yếu tố đặc trưng cho ngẫu lực. Vectơ mô men ngẫu lực và mô men đại số ngẫu lực.

6. Các định lí về biến đổi tương đương một ngẫu lực và định lí hợp các ngẫu lực.

7. Phân loại hệ lực : hệ lực đồng quy, hệ ngẫu lực, hệ lực song song, hệ lực phẳng, hệ lực không gian.

Hai nội dung chính của lí thuyết hệ lực.

8. Vectơ chính và mô men chính của hệ lực. Định nghĩa, phương pháp xác định. Định lí biến thiên mômen chính.

9. Phát biểu và chứng minh định lí dời lực song song.

10. Phương pháp thu gọn hệ lực về một tâm cho trước, cơ sở của phương pháp và kết quả. Các bất biến của hệ lực.

11. Các dạng chuẩn của hệ lực không gian (định nghĩa và tiêu chuẩn). Phát biểu và chứng minh định lí Varinhông. Các dạng chuẩn của hệ lực đồng quy (hệ lực đồng quy phẳng và hệ lực đồng quy không gian), hệ ngẫu lực (hệ ngẫu lực phẳng và hệ ngẫu lực không gian), hệ lực song song (hệ lực song song phẳng và hệ lực song song không gian) cùng chiều và ngược chiều, hệ lực phẳng tùy ý.

12. Điều kiện cân bằng của hệ lực không gian.

Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian.

Các phương trình cân bằng của hệ lực đồng quy (hệ lực đồng quy phẳng và hệ lực đồng quy không gian), hệ ngẫu lực (hệ ngẫu lực phẳng và hệ ngẫu lực không gian), hệ lực song song (hệ lực song song phẳng và hệ lực song song không gian), hệ lực phẳng tùy ý.

13. Bài toán hệ vật. Phương pháp giải bài toán cân bằng của hệ vật (phương pháp hóa rắn và phương pháp tách vật).

14. Định nghĩa đòn. Bài toán cân bằng của đòn. Bài toán vật lật.

15. Xây dựng mô hình về phản lực liên kết của liên kết tựa có ma sát.

16. Định luật ma sát trượt, góc ma sát. Điều kiện cân bằng của vật rắn khi biểu diễn qua góc ma sát.

17. Định luật ma sát lăn.

18. Phương pháp giải bài toán cân bằng của vật rắn và hệ vật rắn khi có ma sát.

19. Công thức tổng quát xác định trọng tâm của vật rắn.

20. Các công thức tìm trọng tâm của vật ghép và vật khuyết.

21. Các công thức Guynđanh.

Phần hai

ĐỘNG HỌC

MỞ ĐẦU

Động học là phần thứ hai của giáo trình cơ học. Trong đó, chúng ta nghiên cứu chuyển động cơ học của các vật thể về mặt hình học, không quan tâm đến nguyên nhân gây ra chuyển động cũng như nguyên nhân gây nên sự biến đổi chuyển động của chúng.

Trong phần này chúng ta nghiên cứu hai mô hình cơ bản của vật thể là điểm và vật rắn. Vật rắn là tập hợp nhiều điểm mà khoảng cách giữa hai điểm bất kì của nó luôn luôn không đổi.

Chú ý rằng nếu các kích thước nội tại của vật thể có thể bỏ qua khi nghiên cứu chuyển động của nó thì ta có thể sử dụng mô hình điểm để nghiên cứu chuyển động của vật thể. Một vật thể, mà mô hình cơ học của nó là một điểm chuyển động, được gọi là vật điểm.

Chuyển động của các vật thể xảy ra trong không gian và thời gian. Không gian và thời gian là hai dạng tồn tại của vật chất cho nên nói chung chúng phụ thuộc vào vật chất và chuyển động của nó. Trong cơ học cổ điển, để đơn giản, chúng ta xem không gian và thời gian không phụ thuộc vào chuyển động của các vật khảo sát và gọi là không gian tuyệt đối, thời gian tuyệt đối. Không gian tuyệt đối được quan niệm là không gian Ơcơlít, không phụ thuộc vào thời gian và các vật thể chuyển động trong nó. Thời gian tuyệt đối được quan niệm là thời gian trôi đều từ quá khứ qua hiện tại đến tương lai, không phụ thuộc vào hệ quy chiếu khảo sát chuyển động cũng như không phụ thuộc vào chuyển động của các vật thể.

Chuyển động xảy ra trong không gian, nhưng hoàn toàn có tính chất tương đối, phụ thuộc vào vật lấy làm mốc để theo dõi chuyển động. Thí dụ, một chiếc ôtô đang chạy đối với một gốc cây nào đó đứng bên đường nhưng đứng yên đối với người ngồi trong ôtô đó. Như vậy, muốn mô tả chuyển động của vật thể, ta phải chỉ rõ vật lấy làm mốc đã chọn.

Vật lấy làm mốc để theo dõi vị trí của vật thể chuyển động được gọi là hệ quy chiếu. Việc chọn hệ quy chiếu hoàn toàn tùy ý, nhằm tạo điều kiện thuận lợi cho việc khảo sát chuyển động của đối tượng. Để thuận tiện cho việc tính toán có khi người ta gắn vào hệ quy chiếu một hệ tọa độ. Nhiều khi, để cho đỡ cồng kềnh, người ta dùng ngay hệ tọa độ đó thay cho hệ quy chiếu đã chọn.

Để tính thời gian trong quá trình chuyển động, người ta chọn một thời điểm tùy ý làm thời điểm gốc. Thông thường, ta lấy lúc bắt đầu khảo sát chuyển động của vật thể làm thời điểm gốc và kí hiệu là $t_o = 0$. Những thời điểm sau sẽ được kí hiệu là t_1, t_2, ... Đó là những khoảng thời gian tính từ thời điểm gốc đến thời điểm đang xét.

Khảo sát động học chuyển động của điểm hoặc vật rắn trước hết là tìm cách xác định các thông số xác định vị trí của nó và thiết lập các phương trình mô tả mối liên hệ giữa các thông số đó với thời gian. Các phương trình này gọi là các phương trình chuyển động. Sau đó xác định các đặc trưng của chuyển động, như vận tốc, gia tốc chuyển động của điểm, vận tốc góc, gia tốc góc chuyển động của vật rắn, v.v...

Trong phần này, về mặt lí thuyết, ta chỉ khảo sát động học điểm và động học vật rắn. Tuy nhiên, trong các bài toán áp dụng, chúng ta phải tính toán động học của hệ gồm nhiều vật rắn có các liên kết hình học (liên kết bản lề, liên kết tựa, liên kết dây mềm không dãn, v.v...). Để xác định chuyển động của chúng, ta đưa vào khái niệm tọa độ suy rộng và khái niệm số bậc tự do.

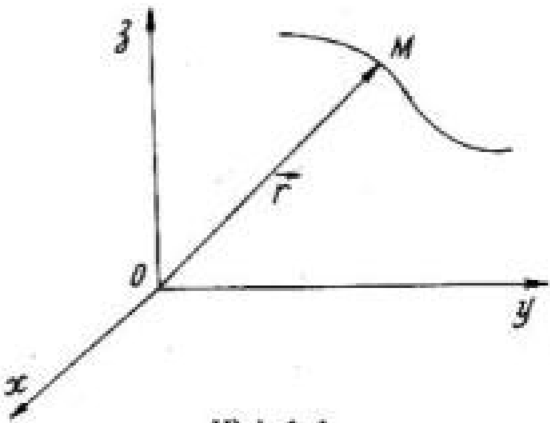
Các thông số định vị của vật rắn hoặc hệ các vật rắn trong một hệ quy chiếu xác định được gọi là các tọa độ suy rộng của chúng. Kí hiệu các tọa độ suy rộng : q_1, ..., q_n. Thông thường các tọa độ suy rộng là các độ dài, góc quay. Tuy nhiên theo định nghĩa thì bản chất vật lí của tọa độ suy rộng là tùy ý.

Số bậc tự do của vật rắn hoặc của hệ các vật rắn chịu các liên kết hình học là số thông số độc lập đủ để xác định vị trí của chúng đối với một hệ quy chiếu xác định. Trong phần động lực học, chúng ta sẽ đưa ra định nghĩa tổng quát hơn về khái niệm quan trọng này.

CHƯƠNG 1

ĐỘNG HỌC ĐIỂM

Trong chương động học điểm, chúng ta khảo sát chuyển động của một điểm đối với một hệ quy chiếu đã chọn. Để mô tả sáng sủa và gọn gàng các đặc trưng của chuyển động, chúng ta sử dụng phương pháp vectơ. Để tính toán thuận tiện, chúng ta sử dụng các phương pháp tọa độ như phương pháp tọa độ Đề các, phương pháp tọa độ tự nhiên, phương pháp tọa độ cực v.v...



Hình 1-1

1.1. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP VECTƠ

1.1.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Xét điểm M chuyển động trong hệ quy chiếu Oxyz (H.1–1).

Vị trí của điểm M được xác định bởi vectơ $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Điểm M chuyển động, do đó $\vec{r}$ thay đổi theo thời gian :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1-1)$$

Phương trình (1–1) được gọi là phương trình chuyển động của điểm M dạng vectơ.

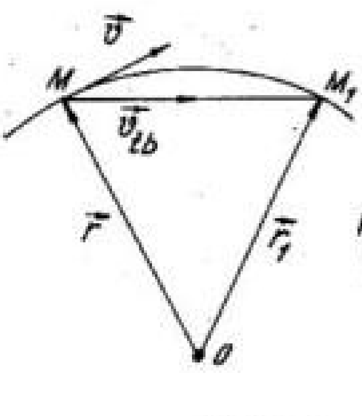
Chú ý rằng điểm M chuyển động liên tục, ở mỗi thời điểm, điểm M chiếm một vị trí xác định và có hướng chuyển động xác định. Do đó $\vec{r}(t)$ là một hàm liên tục, đơn trị.

Tập hợp các vị trí của điểm trong không gian quy chiếu được gọi là quỹ đạo của nó trong hệ quy chiếu ấy. Phương trình (1–1) là phương trình tham số của quỹ đạo. Nếu quỹ đạo là đường thẳng, thì chuyển động được gọi là chuyển động thẳng. Nếu quỹ đạo là đường cong thì chuyển động được gọi là chuyển động cong. Và khi đó người ta thường lấy tên đường cong quỹ đạo để gọi tên chuyển động.

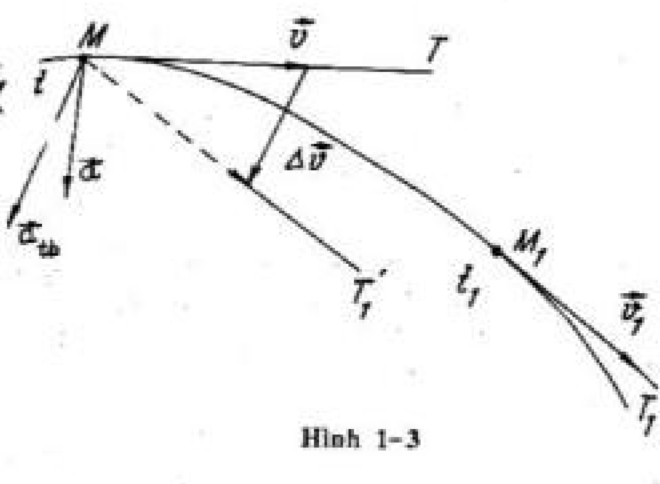
1.1.2. VẬN TỐC CHUYỂN ĐỘNG

Một trong những đặc trưng cơ bản của chuyển động của điểm là khái niệm vận tốc đối với một hệ quy chiếu đã chọn. Chúng ta sẽ xây dựng một cách chặt chẽ khái niệm này. Giả sử ở thời điểm t, điểm ở vị trí M xác định bởi vectơ $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. ở thời điểm khác $t_1 = t + \Delta t$, điểm ở vị trí M_1 xác định bởi vectơ $\vec{r_1} = \overrightarrow{OM_1}$ (H. 1–2). Như thế sau khoảng thời gian Δt điểm dịch chuyển được một đoạn :

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r_1} - \vec{r} = \Delta\vec{r}.$$



Hình 1-2



Hình 1-3

Đại lượng $\vec{v}_{tb} = \Delta\vec{r} / \Delta t$ được gọi là vận tốc trung bình của điểm trong khoảng thời gian Δt, kể từ thời điểm t. Vectơ $\vec{v}_{tb}$ hướng dọc theo cát tuyến MM_1.

Vận tốc của điểm ở thời điểm t được xác định như sau :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{tb} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (1-2)$$

Như thế, vận tốc của điểm là đạo hàm bậc nhất theo thời gian của véc tơ định vị của điểm ấy. Vectơ vận tốc $\vec{v}$ hướng theo tiếp tuyến với quỹ đạo ở điểm M về phía chuyển động. Đơn vị của vận tốc là mét/giây, kí hiệu là m/s.

1.1.3. GIA TỐC CHUYỂN ĐỘNG

Giả sử ở thời điểm t, điểm ở vị trí M, có vận tốc là $\vec{v}$. Sang thời điểm $t_1 = t + \Delta t$, điểm ở vị trí M_1 có vận tốc là $\vec{v}_1$. Như thế, sau khoảng thời gian Δt, vận tốc của điểm biến thiên một đại lượng $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$

Đại lượng $\vec{a}_{tb} = \Delta\vec{v} / \Delta t$ được gọi là gia tốc trung bình của điểm trong khoảng thời gian Δt, kể từ thời điểm t. Vectơ $\vec{a}_{tb}$ hướng dọc theo vectơ $\Delta\vec{v}$ (H. 1–3).

Gia tốc của điểm ở thời điểm t được xác định như sau :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{tb} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (1-3)$$

Như thế, gia tốc của điểm là đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vectơ vận tốc và bằng đạo hàm bậc hai theo thời gian của vectơ định vị của điểm ấy. Đơn vị của gia tốc là mét/giây^2, kí hiệu là m/s^2.

1.1.4. NHẬN XÉT VỀ MỘT VÀI TÍNH CHẤT CỦA CHUYỂN ĐỘNG

Trước hết ta nêu ra một tiêu chuẩn nhận xét về chuyển động thẳng và chuyển động cong của điểm. Khi điểm chuyển động thẳng, vectơ vận tốc $\vec{v}$ luôn không đổi về phương do đó vectơ $\vec{v}$ và vectơ $\vec{a}$ luôn cùng phương. Vì vậy $\vec{v} \wedge \vec{a} \equiv \vec{0}$. Ngược lại, khi điểm chuyển động cong, vectơ $\vec{v}$ nói chung thay đổi cả về hướng cũng như trị số. Các vectơ $\vec{v}$ và $\vec{a}$ nói chung không cùng phương. Vì vậy ta có tiêu chuẩn nhận xét :

$$\vec{v} \wedge \vec{a} \begin{cases} \equiv \vec{0} : \text{chuyển động thẳng} \\ \neq \vec{0} : \text{chuyển động cong.} \end{cases}$$

Bây giờ ta đưa ra tiêu chuẩn nhận xét về tính đều và tính biến đổi của chuyển động. Chuyển động là đều khi giá trị của vận tốc v không đổi. Chuyển động nhanh dần hay chậm dần tùy theo giá trị của vận tốc tăng lên hay giảm đi theo thời gian.

Chú ý rằng sự thay đổi của v^2 đặc trưng cho sự thay đổi của giá trị v của vận tốc. Ta có :

$$\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\vec{v}^2)}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}.\vec{a}$$

Từ đó rút ra tiêu chuẩn nhận xét :

$$\vec{v}.\vec{a} \begin{cases} \equiv \vec{0} : \text{chuyển động đều} \\ \neq \vec{0} : \text{chuyển động biến đổi.} \end{cases}$$

Trong trường hợp thứ hai, nếu $\vec{v}.\vec{a} > \vec{0}$ thì chuyển động là nhanh dần; và $\vec{v}.\vec{a} < \vec{0}$, chuyển động là chậm dần.

1.2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC

1.2.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

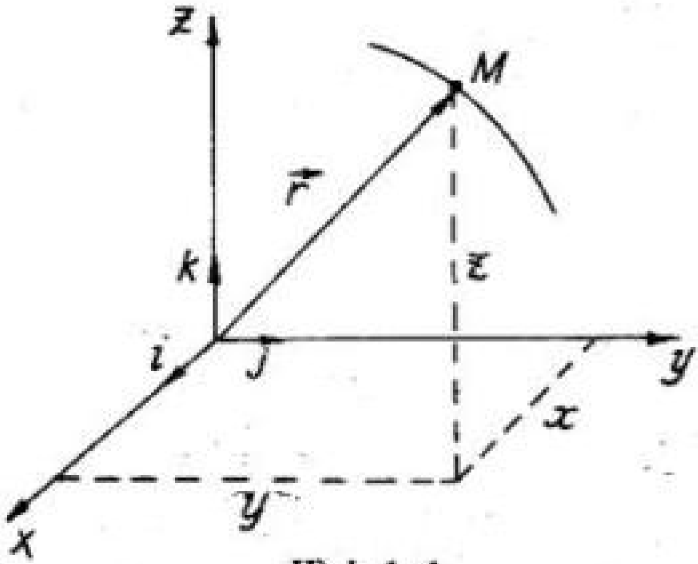
Vị trí của điểm M được xác định bằng ba tọa độ x, y, z của điểm ở trong hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy (H. 1–4).

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Khi điểm M chuyển động, x, y, z biến đổi liên tục theo thời gian.

Vậy các phương trình chuyển động của điểm có dạng

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (1\text{–}4)$$



Hình 1-4

1.2.2. VẬN TỐC CHUYỂN ĐỘNG

Theo công thức (1–2) ta có :

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Chiếu đẳng thức trên lên ba trục tọa độ, ta nhận được

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \ ; \ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \ ; \ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \qquad (1-5)$$

Dựa vào các biểu thức (1–5), ta có thể xác định dễ dàng độ lớn và các cosin chỉ phương của vận tốc $\vec{v}$:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\cos(Ox, \vec{v}) = \frac{v_x}{v} \ ; \ \cos(Oy, \vec{v}) = \frac{v_y}{v} \ ; \ \cos(Oz, \vec{v}) = \frac{v_z}{v}$$

1.2.3. GIA TỐC CHUYỂN ĐỘNG

Tương tự như xác định các biểu thức thành phần vận tốc, từ công thức (1–3) ta có :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})$$

$$= \frac{d\vec{v}_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\vec{v}_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\vec{v}_z}{dt}\vec{k} = (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})$$

Từ đó nhận được hình chiếu của gia tốc $\vec{a}$ trên các trục tọa độ :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} \qquad (1-6)$$

Từ (1-6) ta cũng có thể xác định dễ dàng độ lớn và các cosin chỉ phương của $\vec{a}$:

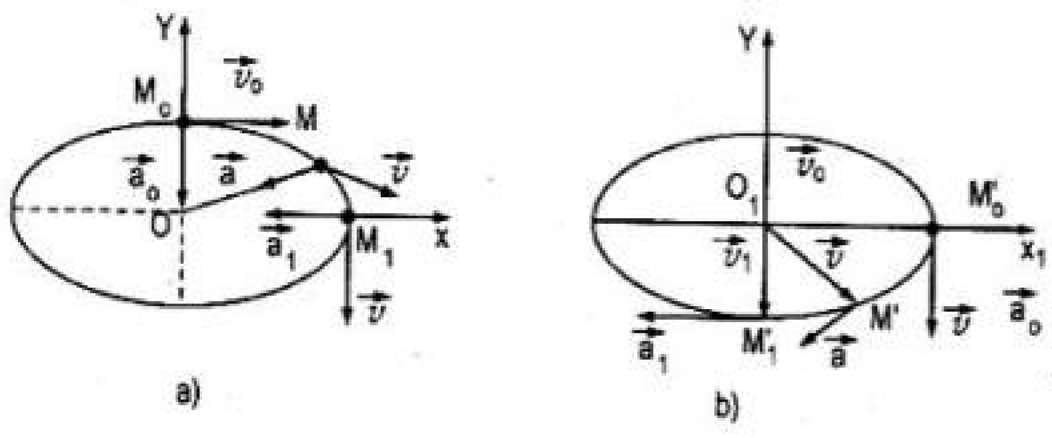
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\cos(Ox, \vec{a}) = \frac{a_x}{a}; \cos(Oy, \vec{a}) = \frac{a_y}{a}; \cos(Oz, \vec{a}) = \frac{a_z}{a}$$

Thí dụ 1-1. Chuyển động của điểm M ở trong mặt phẳng Oxy được xác định bởi phương trình :

$$x = b\sin\omega t \; ; \quad y = d\cos\omega t \qquad (1-7)$$

trong đó b, d, ω, là các hằng số dương. Hãy xác định phương trình quỹ đạo, độ lớn của vận tốc, gia tốc của điểm M ở thời điểm $t_1 = \pi/2\omega$. Sau đó xác định phương trình đường đầu mút của véctơ vận tốc.



Hình 1-5

Bài giải

Muốn tìm phương trình quỹ đạo, ta chỉ việc tìm cách khử tham số thời gian t trong các phương trình chuyển động. Trong thí dụ này từ các phương trình chuyển động (1-7) ta suy ra :

$$\sin\omega t = \frac{x}{b} \quad ; \quad \cos\omega t = \frac{y}{d}$$

Do tính chất $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$, nên ta có phương trình quỹ đạo :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$$

Vậy quỹ đạo là một đường elip với các bán trục b và d (H. 1–5).

Từ phương trình (1–7) ta tính các đạo hàm theo t :

$$v_x = \dot{x} = b\omega\cos\omega t,\ v_y = \dot{y} = -d\omega\sin\omega t$$

$$a_x = \ddot{x} = -b\omega^2\sin\omega t,\ a_y = \ddot{y} = -d\omega^2\cos\omega t$$

Ở thời điểm $t_1 = \pi/2\omega$, điểm M ở vị trí M_1 ($x_1 = b$; $y_1 = 0$) và các hình chiếu vận tốc và gia tốc của nó có dạng :

$$v_{1x} = 0 ; \quad v_{1y} = -d\omega$$
$$a_{1x} = -b\omega^2 ; a_{1y} = 0$$

Để vẽ đường đầu mút vectơ vận tốc (cũng gọi là đường đầu tốc) ta chọn trên mặt phẳng vận tốc hệ trục vuông góc $O_1x_1y_1$ tương ứng như sau (H. 1–5):

$$x_1 = v_x = \omega b\cos\omega t ; y_1 = v_y = -d\omega\sin\omega t$$

Khử t từ các phương trình tham số của đường đầu mút véctơ vận tốc, ta nhận được phương trình :

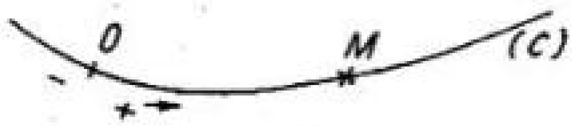
$$\frac{x_1^2}{b^2\omega^2} + \frac{y_1^2}{d^2\omega^2} = 1 \qquad (1-8)$$

đây là phương trình đường đầu mút vectơ vận tốc dạng tọa độ. Trên hình 1–5 các điểm M'_o, M' và M'_1 trên đường đầu mút vectơ vận tốc tương ứng với các điểm M_o, M, M_1 ở trên quỹ đạo.

1.3. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN

1.3.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Phương pháp tọa độ tự nhiên được áp dụng khi biết trước quỹ đạo chuyển động của điểm. Giả sử cho biết quỹ đạo (C) của điểm ở trong một hệ quy chiếu không gian. Chọn một điểm tùy ý O ở trên quỹ đạo làm điểm gốc và định chiều dương trên quỹ đạo (H. 1–6). Vị trí của điểm M được xác định bằng độ dài đại số cung $\overset{\frown}{OM} = \bar{s}$.



Hình 1-6

Điểm M chuyển động, do đó $\bar{s}$ thay đổi theo thời gian. Phương trình :

$$s = \bar{s}\,(t) \qquad (1-9)$$

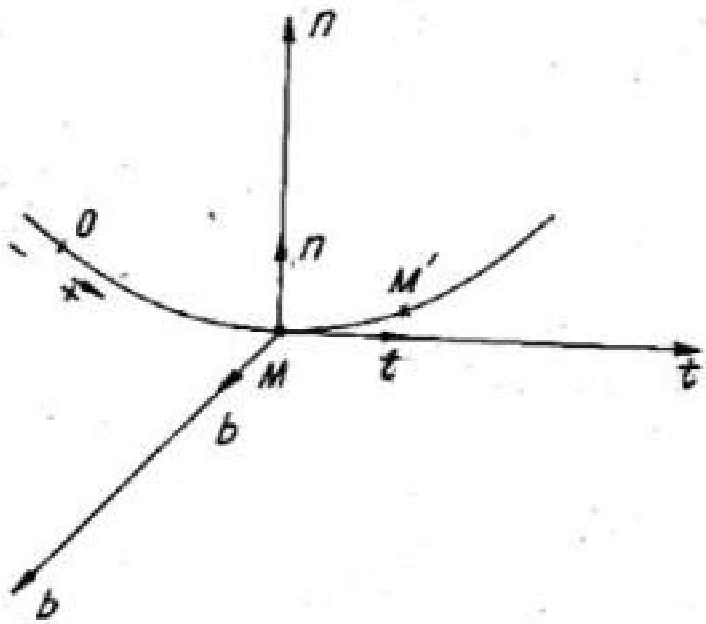
biểu diễn quy luật chuyển động của điểm M dọc theo quỹ đạo gọi là phương trình chuyển động của điểm dạng tọa độ tự nhiên.

Chú ý rằng s là một đại lượng đại số. Tuy nhiên nếu chiều chuyển động không đổi và nếu chọn chiều đó làm chiều dương để tính cung, thì với cách chọn gốc O thích hợp $\bar{s}$ sẽ luôn luôn dương.

1.3.2. MỘT VÀI TÍNH CHẤT HÌNH HỌC CỦA QUỸ ĐẠO

1. Hệ tọa độ tự nhiên

Trước hết chúng ta hãy đưa ra cách xác định mặt phẳng mặt tiếp của quỹ đạo tại điểm M của nó. Trên quỹ đạo ngoài điểm M ta lấy thêm điểm M_1 (hình 1– 3). Kẻ các tiếp tuyến MT và M_1T_1. Qua M kẻ đường MT'_1 // M_1T_1. Dựng mặt phẳng P chứa các đường MT và MT'_1. Khi cho M_1 tiến dần đến M, mặt phẳng P sẽ tiến dần đến một mặt phẳng giới hạn π, gọi là mặt phẳng mặt tiếp của quỹ đạo tại điểm M. Như thế, nếu quỹ đạo là đường cong phẳng thì mặt phẳng chứa đường cong quỹ đạo là mặt phẳng mặt tiếp tại mọi điểm của quỹ đạo. Khi quỹ đạo là đường cong không gian, ta lấy một cung rất bé MM' = $d\bar{s}$. Vì cung $d\bar{s}$ rất bé nên có thể



Hình 1-7

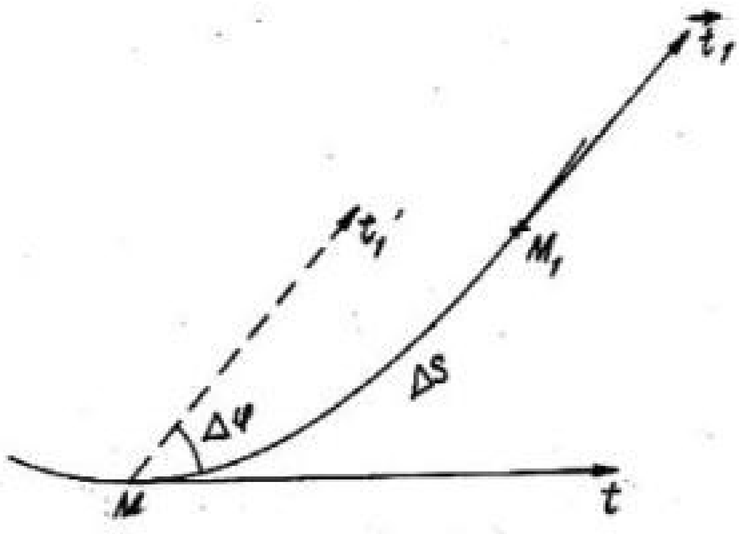
thay thế nó bởi một cung phẳng cùng điểm đầu, điểm cuối. Mặt phẳng chứa cung phẳng này sẽ được xem một cách gần đúng là mặt phẳng mật tiếp với quỹ đạo tại điểm M (H.1–7).

Dựng trong mặt phẳng mật tiếp với quỹ đạo tại điểm M trục Mt hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo về phía dương. Vectơ đơn vị trên trục đó là $\vec{t_o}$. Dựng trục Mn hướng theo pháp tuyến của quỹ đạo về phía lõm. Pháp tuyến Mn nằm trong mặt phẳng mật tiếp gọi là pháp tuyến chính. Vectơ đơn vị trên trục này là $\vec{n_o}$. Dựng pháp tuyến Mb của quỹ đạo tại M và vuông góc với mặt phẳng mật tiếp. Pháp tuyến Mb gọi là trùng pháp tuyến. Vectơ đơn vị trên trục này là $\vec{b_o}$. Thường người ta chọn chiều của $\vec{b_o}$ sao cho Mtnb tạo thành một hệ trục thuận (H.1–7).

Như thế, tại mỗi điểm của đường cong ta luôn dựng được một hệ tọa độ vuông góc có ba trục hướng theo tiếp tuyến, pháp tuyến chính, trùng pháp tuyến, gọi là hệ tọa độ tự nhiên. Hệ tọa độ tự nhiên thay đổi theo vị trí của điểm M trên quỹ đạo và phản ánh được một phần tính chất hình học của quỹ đạo.

2. Độ cong của quỹ đạo

Ta nhận thấy rằng quỹ đạo càng cong thì tiếp tuyến của nó đổi hướng càng nhanh dọc theo quỹ đạo ấy. Vì vậy người ta đưa ra khái niệm độ cong của quỹ đạo (H.1–8).



Hình 1-8

Đại lượng : $$k_{tb} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

được gọi là độ cong trung bình của quỹ đạo ứng với cung $\overset{\frown}{MM_1}$.

Đại lượng : $k = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$

được gọi là độ cong của quỹ đạo tại điểm M. Đại lượng $\rho = \frac{1}{k}$ là bán kính cong của quỹ đạo tại điểm M.

Để minh họa, xét quỹ đạo là đường tròn bán kính R. Khi đó $\Delta s = R\Delta\varphi$.

Vậy ta có :

$$k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R} \quad , \quad \rho = R$$

Như thế bán kính cong của đường tròn tại các điểm của chúng chính bằng bán kính của đường tròn đó.

1.3.3. VẬN TỐC CHUYỂN ĐỘNG

Để xác định vận tốc $\vec{v}$, ta sẽ tìm hình chiếu của nó trên các trục của hệ tọa độ tự nhiên. Vì vectơ $\vec{v}$ hướng theo tiếp tuyến quỹ đạo tại M, nên $\vec{v} = v_t \vec{t}_o$. Mặt khác theo định nghĩa :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Trong phần hình học vi phân, người ta đã chứng minh : $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}_o$.

Vì vậy ta rút ra :

$$v^t = \dot{s} \; ; \; v^n = v^b = 0 \qquad (1-10)$$

Chú ý rằng $\quad |v^t| = |\vec{v}|$

1.3.4. GIA TỐC CHUYỂN ĐỘNG

Tương tự như phần vận tốc, ta sẽ tìm hình chiếu của vectơ gia tốc trên các trục của hệ tọa độ tự nhiên :

$$\vec{a} = a^t \vec{t}_o + a^n \vec{n}_o + a^b \vec{b}_o$$

Mặt khác theo định nghĩa :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_t \vec{t}_o) = \dot{v}_t \vec{t}_o + v_t \dot{\vec{t}}_o = \dot{v}_t \vec{t} + v_t \frac{d\vec{t}_o}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Trong phần hình học vi phân, người ta đã chứng minh :

$$\frac{d\vec{t_o}}{ds} = \frac{\vec{n_o}}{\rho}.$$

Vì vậy ta có :

$$\vec{a} = \frac{dv_t}{dt}\vec{t_o} + \frac{v_t^2}{\rho}\vec{n_o} = \vec{a^t} + \vec{a^n}$$

Cuối cùng ta rút ra :

$$a^t = \frac{dv_t}{dt} ; a^n = \frac{v^2}{\rho} ; a^b = 0 \qquad (1-11)$$

Từ (1–11) ta thấy gia tốc pháp tuyến $\vec{a^n}$ luôn luôn hướng về tâm cong của quỹ đạo, còn gia tốc tiếp tuyến $\vec{a^t}$ thì có thể hướng cùng chiều hoặc ngược chiều với vận tốc $\vec{v}$.

Từ các biểu thức (1–11) ta đưa ra một vài nhận xét về ý nghĩa của các thành phần gia tốc.

Từ biểu thức $a^n = v^2 / \rho$ ta thấy : khi điểm chuyển động nói chung $v \neq 0$, do đó $a^n = 0$ khi $\rho = \infty$. Vậy chỉ trong chuyển động thẳng thì a^n mới luôn luôn triệt tiêu. Trong chuyển động cong, nói chung $a \neq 0$. Như thế gia tốc pháp tuyến phản ánh tính cong của quỹ đạo, do đó đặc trưng cho sự thay đổi về phương của vectơ vận tốc. Chú ý rằng giá trị của a^n tỉ lệ với bình phương của vận tốc nên tăng rất nhanh khi giá trị vận tốc tăng.

Từ biểu thức $a^t = dv_t / dt$ ta rút ra : gia tốc tiếp đặc trưng cho sự biến đổi của vận tốc về mặt trị số. Nó phản ánh tính đều ($a^t \equiv 0$) hay tính biến đổi ($a^t \neq 0$) của chuyển động.

1.3.5. CHUYỂN ĐỘNG ĐỀU VÀ CHUYỂN ĐỘNG BIẾN ĐỔI ĐỀU

1. Chuyển động đều : Chuyển động đều của điểm là chuyển động mà vận tốc của nó có trị số không đổi ($v = v_o$ = hằng số).

Nếu chọn chiều chuyển động không đổi của điểm làm chiều dương trên quỹ đạo thì phương trình chuyển động của điểm có dạng :

$$s = \int_0^t v_o dt + s_o = v_o t + s_o$$

2. Chuyển động biến đổi đều : chuyển động biến đổi đều của điểm là chuyển động mà thành phần gia tốc tiếp luôn có trị số không đổi $a^t = a =$ hằng số).

Từ biểu thức $a^t = dv_t / dt = a$; ta suy ra : $v_t = at + v_o$

Vậy phương trình chuyển động có dạng :

$$v_t = \frac{ds}{dt} \rightarrow s = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o$$

Trong chuyển động biến đổi đều nếu v_t và a^t cùng dấu thì chuyển động là nhanh dần đều, nếu v_t và a^t ngược dấu nhau thì chuyển động là chậm dần đều. Trong thực tế, nếu ta chọn chiều dương trên quỹ đạo trùng với chiều của vận tốc đầu $\vec{v}_o$ thì nếu $a^t = a > 0$ chuyển động là nhanh dần đều, còn $a^t = a < 0$ chuyển động là chậm dần đều cho đến khi dừng lại ($v = 0$).

Thí dụ 1-2. Cho điểm chuyển động theo quy luật :

$$x = t - \sin t; \ y = 1 - \cos t; \ z = 4\sin\frac{t}{2}$$

Xác định bán kính cong của quỹ đạo theo thời gian t.

Bài giải

Trước hết đạo hàm các hàm *x, y, z* theo *t* :

$$\dot{x} = 1 - \cos t; \quad \dot{y} = \sin t; \quad \dot{z} = 2\cos\frac{t}{2}$$

$$\ddot{x} = \sin t \ ; \quad \ddot{y} = \cos t \ ; \quad \ddot{z} = -\sin\frac{t}{2}$$

Ta dễ dàng tính được :

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2(1 - \cos t) + 4\cos^2\frac{t}{2} = 4$$

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 = 1 + \sin^2\frac{t}{2}$$

Từ đó suy ra : $a^t = \frac{dv}{dt} = 0$; $a^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4}{\rho}$

Do $a^n = a$ nên ta có :

$$\rho = \frac{4}{\sqrt{1 + \sin^2\frac{t}{2}}}$$

1.4. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ CỰC

1.4.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

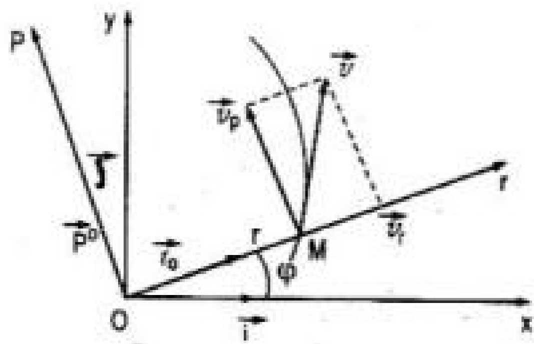
Xét chuyển động của điểm M trên mặt phẳng Oxy. Ta lấy O làm cực, vẽ nửa đường thẳng OM (hình 1–9). Gọi góc giữa các trục Ox và Or là φ. Gọi đoạn OM = r. Khi đó vị trí của điểm M trên mặt phẳng Oxy được xác định bởi hai tham số r và φ. Vậy các phương trình chuyển động của điểm có dạng :

$$r = r(t)\ ;\ \varphi = \varphi(t) \tag{1-12}$$

Các phương trình (1–12) cũng là các phương trình tham số của quỹ đạo của điểm M trong tọa độ cực.

1.4.2. VẬN TỐC CHUYỂN ĐỘNG

Ta gọi trục cực là trục Or mà hướng dương của nó được xác định theo chiều của $\overrightarrow{OM}$. Vectơ đơn vị trên trục này là $\vec{r}^{\,o}$. Quay trục Or theo chiều của góc φ đi một góc 90° ta được trục Op. Vectơ đơn vị trên trục này là $\vec{p}^{\,o}$. Vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy là $\vec{i}$ và $\vec{j}$ (H. 1–9).



Hình 1–9

Như thế, theo hình 1–9, ta có :

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}^{\,o} &= \cos\varphi\,.\,\vec{i} + \sin\varphi\,.\,\vec{j}\\ \vec{p}^{\,o} &= -\sin\varphi\,.\,\vec{i} + \cos\varphi\,.\,\vec{j}\end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

Thực hiện phép tính đạo hàm theo t :

$$\frac{d\vec{r}^{\,o}}{dt} = (-\sin\varphi\,.\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j})\,\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\,\vec{p}^{\,o}$$

$$\frac{d\vec{p}^{\,o}}{dt} = -(\cos\varphi\,.\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j})\,\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\,\vec{r}^{\,o} \tag{1-14}$$

Theo định nghĩa ta có :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\,.\,\vec{r^o})}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r^o} + r\frac{d\vec{r^o}}{dt}$$

Chú ý đến (1–14) ta nhận được :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{r^o} + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{p^o} \qquad (1\text{–}15)$$

Vậy : $v_r = \dot{r}$, $v_p = r\dot{\varphi}$.

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\,.\,\dot{\varphi}^2}$$

1.4.3. GIA TỐC CHUYỀN ĐỘNG

Đạo hàm biểu thức (1–15) ta được :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{r^o} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vec{r_o}}{dt} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec{p^o} +$$

$$+ r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{p^o} + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{p^o}}{dt}$$

Thế các biểu thức (1–14) vào biểu thức trên ta nhận được :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r^o} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{p^o} \qquad (1\text{–}16)$$

Từ đó suy ra hình chiếu của gia tốc điểm M trên các trục Or và Op là :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \;;$$

$$a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$

Môđun và hướng của véc tơ gia tốc $\vec{a}$ được xác định bởi các công thức :

$$a = \sqrt{a_p^2 + a_r^2}$$

$$\cos(\vec{r^o}, \vec{a}) = \frac{a_r}{a},$$

$$\cos(\vec{p^o}, \vec{a}) = \frac{a_p}{a}$$

1.5. KHẢO SÁT MỘT SỐ CHUYỂN ĐỘNG ĐẶC BIỆT

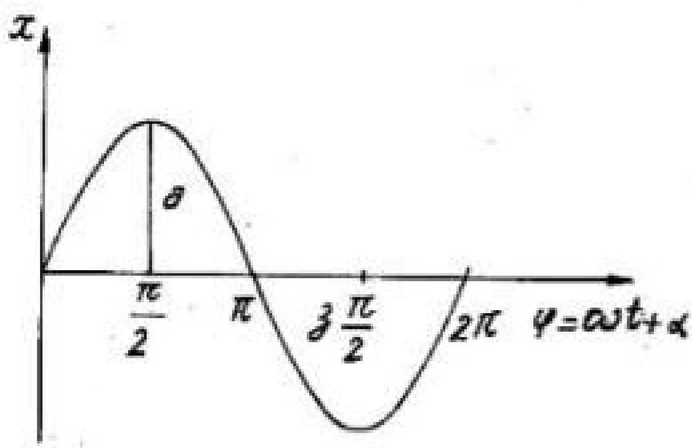
1.5.1. CHUYỀN ĐỘNG THẲNG

Nếu quỹ đạo của điểm là đường thẳng, thì chuyển động là chuyển động thẳng. Ta chọn, chẳng hạn, trục x hướng dọc theo đường thẳng quỹ đạo, thì vị trí của điểm được xác định bởi hoành độ $x = x(t)$. Hình chiếu vận tốc, gia tốc của điểm trên trục x :

$$v_x = \dot{x} \; ; \; a_x = \ddot{x}$$

Bây giờ ta khảo sát một loại chuyển động thẳng quan trọng, được xác định bởi quy luật :

$$x = a\sin(\omega t + \alpha) = a\sin\varphi \qquad (1-17)$$



Hình 1-10

Chuyển động của điểm theo quy luật (1-17) gọi là dao động điều hòa. Hình vẽ 1-10 biểu diễn đồ thị của hàm $x = a\sin(\omega t + \alpha) = a\sin\varphi$. Đại lượng a bằng độ lệch cực đại của điểm từ vị trí $x = 0$ gọi là biên độ dao động. Đại lượng $\varphi = \omega t + \alpha$ gọi là pha dao động, α gọi là pha ban đầu.

Khoảng thời gian tối thiểu để chuyển động lặp lại gọi là chu kỳ dao động. Chu kỳ của dao động điều hòa là $T = 2\pi/\omega$. Số dao động xảy ra trong một đơn vị thời gian gọi là tần số dao động, $f = \frac{1}{T}$. Nếu thời gian tính bằng giây, thì đơn vị tần số là Hertz (Hz). Đại lượng ω được gọi là tần số vòng. Như thế ta có :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (1-18)$$

1.5.2. CHUYỀN ĐỘNG TRÒN

Bây giờ sử dụng phương pháp tọa độ cực khảo sát chuyển động của điểm trên đường tròn. Tọa độ r luôn là hằng số và bằng bán kính R của vòng tròn. Vì vậy vị trí của điểm M được xác định bởi góc φ (H. 1–11).

Theo (1–15) ta có :

$$v_r = \dot{r} = 0$$

$$v_p = r\dot{\varphi} = R\dot{\varphi}$$

Vậy :

$$v = |v_p| = R\omega \text{ với } \omega = |\dot{\varphi}|$$

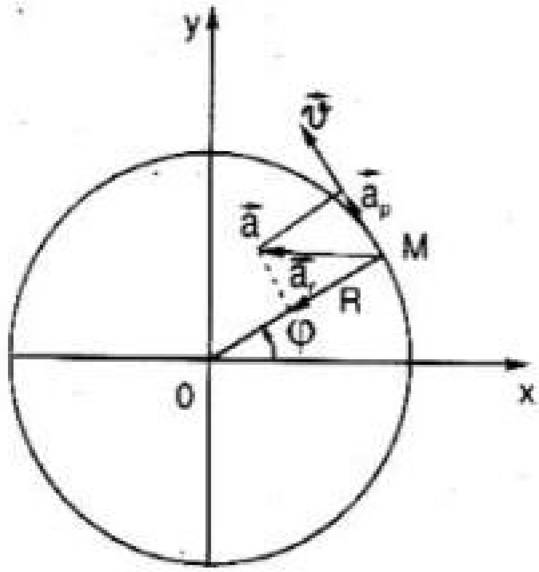
Tính toán gia tốc theo (1–16) :

$$a_r = -R\omega^2 \; ; \; a_p = R\ddot{\varphi}$$

Vậy :

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

trong đó : $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$.



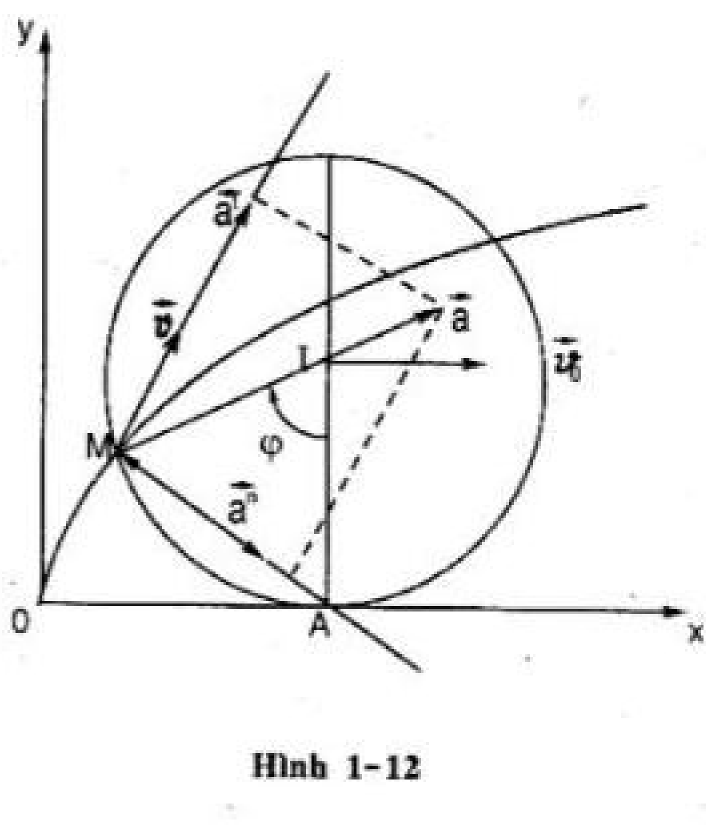
Hình 1-11

Chú ý rằng nếu áp dụng phương pháp tọa độ tự nhiên, ta có :

$$a_t = R\ddot{\varphi} \; ; \; a_n = R\omega^2.$$

1.5.3. CHUYỂN ĐỘNG XYCLÔIT

Thí dụ 1–2. Một bánh xe tròn bán kính R lăn không trượt trên đường ray thẳng. Vận tốc tâm bánh xe là hằng số và bằng $\vec{v}_o$. Tìm phương trình chuyển động của điểm M ở trên vành bánh xe. Tìm quỹ đạo, vận tốc, gia tốc của điểm đó.



Hình 1-12

Bài giải

Chọn hệ tọa độ Oxy như hình 1-12 với chú ý khi $t = 0$ thì $M \equiv O$. Do bánh xe lăn không trượt nên cung $\overset{\frown}{AM}$ bằng đoạn OA. Do $\overset{\frown}{AM} = R\varphi$; $OA = v_o t$ nên $v_o t = R\varphi$. Do đó :

$$\varphi = \omega t \text{ với } \omega = \frac{v_o}{R}$$

Tọa độ của điểm *M* là :

$$x = v_o t - R\sin\varphi = v_o t - R\sin\omega t \qquad (a)$$

$$y = R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\omega t)$$

Các phương trình chuyển động của điểm M này cũng là phương trình tham số quỹ đạo của nó. Quỹ đạo của M gồm những cung xyclôit như hình 1-12.

Hình chiếu vận tốc của điểm M trên các trục Ox và Oy :

$$v_x = \dot{x} = v_o - R\omega\cos\omega t = v_o(1 - \cos\omega t)$$

$$v_y = \dot{y} = R\omega\sin\omega t = v_o\sin\omega t \qquad (b)$$

Mô đun của vận tốc

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v_o\sqrt{(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t} =$$

$$= v_o\sqrt{2(1-\cos\omega t)} = 2v_o\sin\frac{\omega t}{2}$$

Chú ý rằng góc $2\pi \geq \varphi \geq 0$ nên $\sin\frac{\omega t}{2} \geq 0$.

Để tìm hướng vận tốc điểm M, ta xác định các cosin chỉ phương của véctơ vận tốc.

$$\cos(x, \vec{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{1-\cos\omega t}{2\sin\frac{\omega t}{2}} = \sin\frac{\omega t}{2}$$

$$\cos(y, \vec{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\sin\omega t}{2\sin\frac{\omega t}{2}} = \cos\frac{\omega t}{2}$$

Từ đó suy ra véctơ vận tốc của điểm M luôn luôn nằm trên đường thẳng nối từ điểm M tới điểm cao nhất của bánh xe (H. 1-12).

Hình chiếu gia tốc của điểm M trên các trục Ox và Oy :

$$a_x = \ddot{x} = v_o\omega\sin\omega t, \; a_y = \ddot{y} = v_o\omega\cos\omega t$$

Do đó :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = v_o\omega = \omega^2 R$$

Do $\cos(x, \vec{a}) = \frac{a_x}{a} = \sin\omega t$; $\sin(y, \vec{a}) = \frac{a_y}{a} = \cos\omega t$

Nên véctơ gia tốc của điểm M luôn đi qua tâm của bánh xe.

Bán kính cong của quỹ đạo được tính từ biểu thức :

$$\rho = \frac{v^2}{a^n}$$

Do $a^n = \sqrt{a^2 - (a^t)^2}$ và $a^t = \frac{dv_t}{dt} = v_o\omega\cos\frac{\omega t}{2}$ (vì $v_t = v$)

nên $a^n = v_o\omega\sqrt{1 - \cos^2\frac{\omega t}{2}} = v_o\omega\sin\frac{\omega t}{2}$

Vậy : $\rho = \dfrac{4v_o^2\sin^2\frac{\omega t}{2}}{v_o\omega\sin\frac{\omega t}{2}} = \frac{4v_o}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2} = 4R\sin\frac{\omega t}{2} = 2AM$

trong đó : AM là khoảng cách từ điểm M đến điểm thấp nhất của bánh xe.

1.5.4. CHUYỂN ĐỘNG PARABÔN

Thí dụ 1– 3. Trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy, một điểm M chuyển động theo phương trình :

$$x = v_o t\cos\alpha \; ; \; y = v_o t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

trong đó : v_o, α, g là các hằng số.

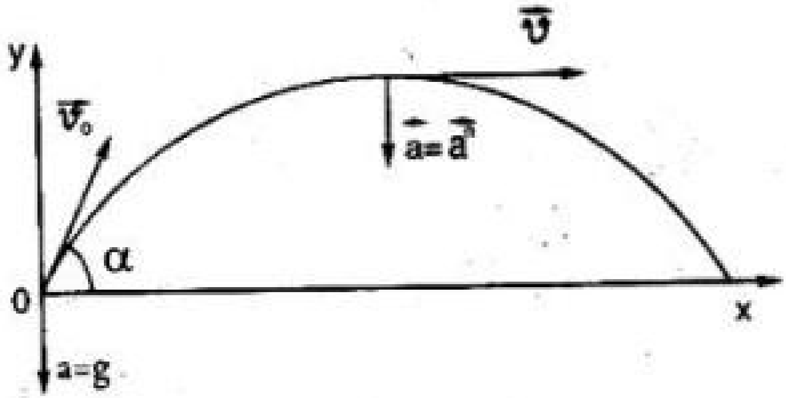
Tìm quỹ đạo, vận tốc, gia tốc của điểm M và bán kính cong của quỹ đạo ứng với lúc $t = 0$ và lúc M ở vị trí cao nhất.

Bài giải

Rút t từ phương trình thứ nhất $t = \frac{x}{v_o\cos\alpha}$ rồi thay vào phương trình thứ hai ta được :

$$y = x\,tg\alpha - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x^2$$

Vậy quỹ đạo là một đường parabôn (H. 1–13).



Hình 1-13

Xác định vận tốc của điểm M. Ta có :

$$v_x = \dot{x} = v_o\cos\alpha$$
$$v_y = \dot{y} = v_o\sin\alpha - gt$$

Vậy :

$$v = \sqrt{v_o^2\cos^2\alpha + (v_o\sin\alpha - gt)^2}$$

Đạo hàm biểu thức vận tốc :

$$a_x = \ddot{x} = 0$$
$$a_y = \ddot{y} = -g$$

Do đó véctơ $\vec{a}$ hướng thẳng xuống dưới, a = g.

Để tìm bán kính cong của quỹ đạo ta sử dụng công thức :

$$\rho = \frac{v_o^2}{a^n}$$

Trong bài toán này $v_t = v$, nên ta có :

$$a^t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{-g(v_o\sin\alpha - gt)}{\sqrt{v_o^2\cos^2\alpha + (v_o\sin\alpha - gt)^2}}$$

Khi t = 0 ; $a^t = -g\sin\alpha$; a = g. Vậy $a^n = \sqrt{a^2 - (a^t)^2} = g\cos\alpha$

Do đó :

$$\rho = \frac{v_o^2}{g\cos\alpha}$$

Khi điểm M ở vị trí cao nhất của quỹ đạo thì $\vec{v}$ // trục x, do đó $v_y = v_o \sin\alpha - gt = 0$. Từ đó suy ra $a^t = 0$; $a^n = g$.

Vậy bán kính cong quỹ đạo tại điểm đó là :

$$\rho = \frac{v_o^2\cos^2\alpha}{g}$$

1.5.5. CHUYỂN ĐỘNG ĐINH ỐC

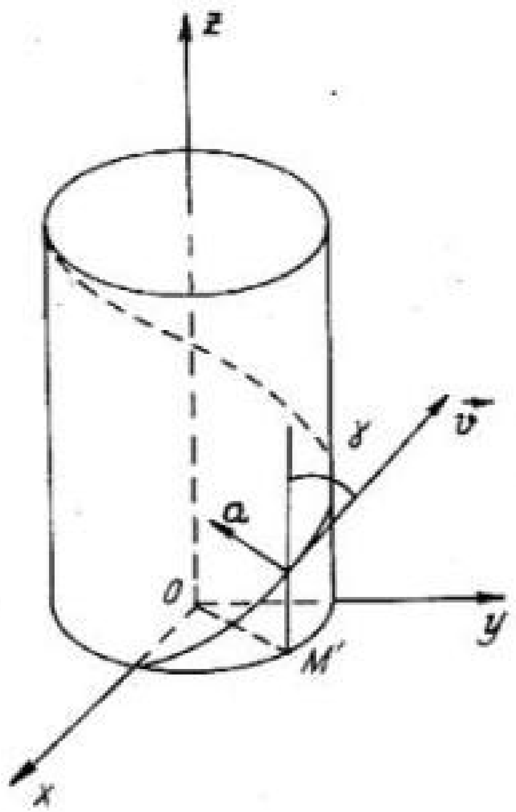
Thí dụ 1 – 4. Cho biết điểm M chuyển động theo quy luật :

$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $z = p\varphi$ (a)

trong đó : r và p là hằng số, $\varphi = \varphi$ (t). Tìm vận tốc, gia tốc của điểm M và xét tính biến đổi chuyển động khi $\varphi = \omega_o t$, với ω_o = const.

Bài giải

Do phương trình chuyển động (a) của điểm M, nó sẽ vạch nên một đường đinh ốc đều như hình vẽ 1–14, áp dụng phương pháp tọa độ Đề các tính vận tốc và gia tốc điểm M.



Hình 1-14

Ta có :

$$v_x = \dot{x} = -r\dot{\varphi}\sin\varphi;\ v_y = \dot{y} = r\dot{\varphi}\cos\varphi\ ;\ v_z = p\dot{\varphi} \quad \text{(b)}$$

$$v = \sqrt{r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + p^2\dot{\varphi}^2} = |\dot{\varphi}|\sqrt{r^2 + p^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = -r\dot{\varphi}^2\cos\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi \\ a_y &= \ddot{y} = -r\dot{\varphi}^2\sin\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi \\ a_z &= \ddot{z} = p\ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

Để xác định, ta xét trường hợp $\dot{\varphi} > 0$. Khi đó, nếu gọi γ là góc giữa tiếp tuyến với quỹ đạo và trục z, ta có :

$$\cos\gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{p\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}\sqrt{r^2+p^2}} = \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}} = \text{const}$$

Như thế, đường đinh ốc có độ nghiêng không đổi đối với mặt phẳng Oxy.

Gọi M' là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng Oxy. Dễ dàng thấy hình chiếu của quỹ đạo trên mặt phẳng Oxy là đường tròn tâm O bán kính r.

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$$

Khi điểm M' đi được một vòng trên đáy trụ tròn $\varphi = 2\pi$ radian, thì điểm M chuyển động dọc trục z được một đoạn không đổi là $h = 2\pi p$. Người ta gọi h là bước của đinh ốc.

Xét trường hợp $\varphi = \omega_o t$.

Khi đó :

$$v_x = -r\omega_o \sin\omega_o t \; ; \; v_y = r\omega_o\cos\omega_o t,$$
$$v_z = p\omega_o \qquad \text{(d)}$$

Ta có : $v = \omega_o\sqrt{r^2+p^2} = \text{const}$.

Khi đó điểm M sẽ chuyển động đều trên đường đinh ốc.

$$a_x = -r\omega_o^2\cos\omega_o t \; ; \; a_y = -r\omega_o^2\sin\omega_o t \; ; \; a_z = 0 \qquad \text{(đ)}$$
$$a = r\omega_o^2$$

Vectơ gia tốc $\vec{a}$ song song với trục mặt phẳng Oxy (vì $a_z = 0$).

Chú ý rằng $a_x = -\omega^2 x$; $a_y = -\omega^2 y$ mà x, y lại là tọa độ của điểm M'. Vậy gia tốc $\vec{a}$ ngược chiều với vectơ $\overrightarrow{OM'}$.

Do v = const, nên $a^t = 0$; $a^n = a$. Vậy bán kính cong của quỹ đạo là :

$$\rho = \frac{v^2}{a^n} = \frac{r^2+p^2}{r}$$

CHƯƠNG 2

CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

Trong chương này chúng ta khảo sát hai dạng chuyển động đơn giản nhất của vật rắn là chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay quanh một trục cố định. Mọi dạng chuyển động phức tạp của vật rắn đều có thể phân tích thành các dạng chuyển động đơn giản này. Ngược lại, từ hai dạng chuyển động đơn giản này, chúng ta có thể tổng hợp thành các dạng chuyển động phức tạp của vật rắn.

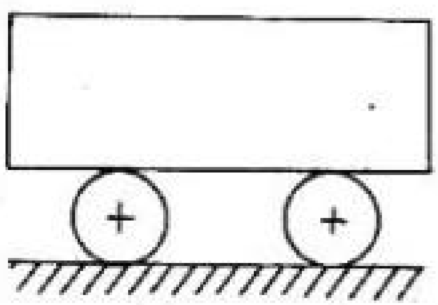
Việc khảo sát chuyển động của vật rắn ở đây được tiến hành theo hai bước : khảo sát chuyển động của vật rắn, sau đó khảo sát chuyển động của các điểm thuộc vật.

2.1. CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN CỦA VẬT RẮN

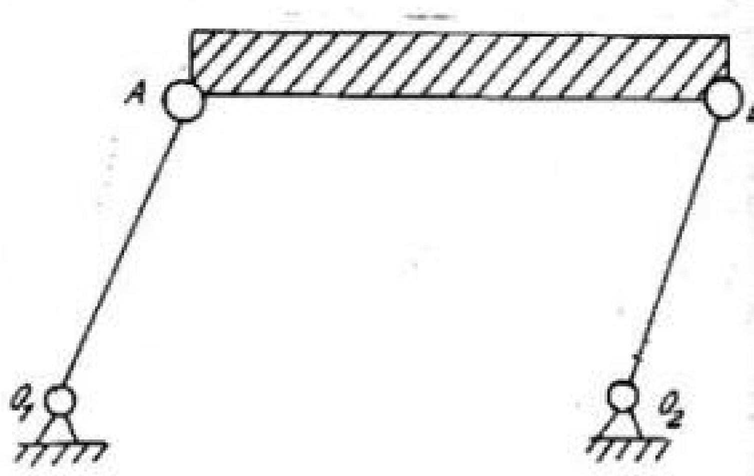
2.1.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ THÍ DỤ

Định nghĩa. *Chuyển động tịnh tiến của vật rắn là chuyển động mà mỗi đoạn thẳng thuộc vật luôn luôn song song với vị trí ban đầu của nó.*

Thí dụ. Chuyển động của thùng xe trên đoạn đường thẳng (H.2–1), chuyển động của thanh truyền AB trong cơ cấu bốn khâu có các tay quay O_1A và O_2B bằng nhau (H.2–2) là chuyển động tịnh tiến.



Hình 2–1



Hình 2–2

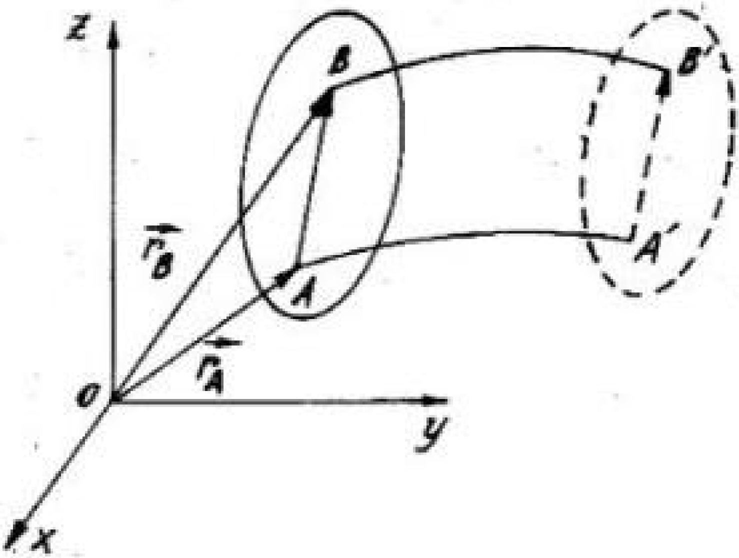
Chú ý : Không có khái niệm điểm chuyển động tịnh tiến. Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, các điểm thuộc vật có thể chuyển động không thẳng, không đều.

2.1.2. TÍNH CHẤT CỦA CHUYỂN ĐỘNG

Định lí. *Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, quỹ đạo, vận tốc, gia tốc các điểm của vật như nhau.*

Chứng minh. Lấy hai điểm A, B bất kỳ thuộc vật. Các vectơ định vị của chúng thỏa mãn điều kiện (H.2–3).

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \quad (2-1)$$



Hình 2-3

Đối với vật rắn bất kỳ, véc tơ $\overrightarrow{AB}$ luôn có độ lớn không đổi, đối với chuyển động tịnh tiến $\overrightarrow{AB}$ luôn có hướng không đổi. Vậy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{const}$.

Phương trình (2–1) chứng tỏ rằng vị trí của điểm B là vị trí của điểm A trượt đi một véctơ hằng $\overrightarrow{AB}$. Nếu sự dịch chuyển trên được thực hiện thì quỹ đạo của điểm A sẽ chồng khít lên quỹ đạo điểm B. Các quỹ đạo như thế được gọi là như nhau.

Do $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{const}$ nên đạo hàm đẳng thức (2–1) theo thời gian, ta có :

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \text{ hay } \vec{v}_B = \vec{v}_A$$

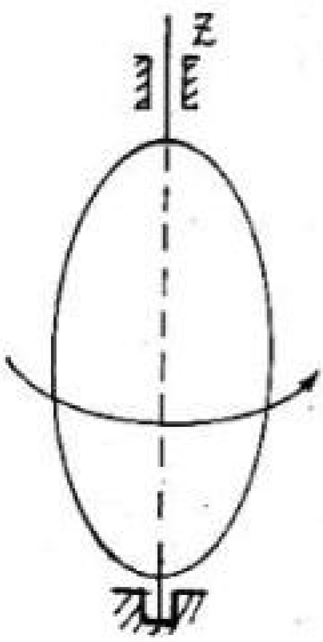
$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \text{ hay } \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

Từ định lí trên ta thấy rằng, việc khảo sát chuyển động tịnh tiến của vật rắn được đưa về khảo sát chuyển động của một điểm bất kì thuộc vật. Phương pháp khảo sát chuyển động của điểm đã được trình bày trong chương trước.

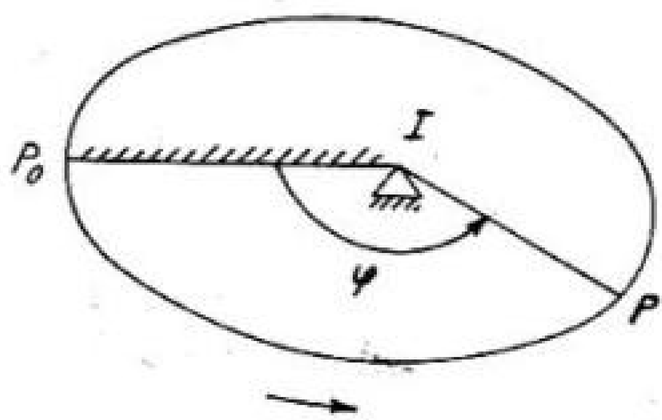
2.2. CHUYỂN ĐỘNG QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH CỦA VẬT RẮN

Chuyển động của vật rắn có hai điểm cố định, do đó có một trục đi qua hai điểm đó cố định, được gọi là chuyển động quay quanh một trục cố định. Trục cố định đó được gọi là trục quay của vật.

Trên hình 2–4a cho ta mô hình không gian của vật rắn quay quanh một trục cố định. Giao giữa vật rắn quay và mặt phẳng vuông góc với trục quay cho ta mô hình phẳng như hình vẽ 2–4b.



Hình 2–4a



Hình 2–4b

2.2.1. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT

1. Phương trình chuyển động

Ta chọn quy ước một chiều quay dương quanh trục. Dựng mặt phẳng P_o cố định qua trục và mặt phẳng động P qua trục và gắn chặt với vật rắn. Góc giữa mặt phẳng P_o và mặt phẳng P là $\bar{\varphi}$. Vị trí của vật rắn khi đó được xác định bởi vị trí của mặt phẳng P đối với mặt phẳng P_o, tức là được xác định bởi góc quay $\bar{\varphi}$. Khi vật quay, góc $\bar{\varphi}$ thay đổi theo thời gian.

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t) \tag{2-2}$$

Phương trình (2-2) là phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định.

Như thế, vị trí của vật rắn quay quanh một trục cố định được xác định bởi một tham số là góc quay $\bar{\varphi}$. Do đó vật rắn loại này có một bậc tự do.

Chú ý : Góc quay $\bar{\varphi}$ có thể dương hay âm tùy thuộc vào chiều quay dương đã chọn. Thông thường người ta quy ước góc quay $\bar{\varphi}$ được xem là dương nếu vật quay ngược chiều kim đồng hồ, và xem là âm nếu vật quay thuận chiều kim đồng hồ. Góc quay $\bar{\varphi}$ được tính bằng radian (rad).

2. Vận tốc góc của vật

Để đặc trưng cho chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định, người ta đưa vào các khái niệm vận tốc góc và gia tốc góc.

Đại lượng

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \dot{\bar{\varphi}} \tag{2-3}$$

gọi là vận tốc góc của vật.

Như thế vận tốc góc là đạo hàm bậc nhất theo thời gian của góc quay. Dấu của $\bar{\omega}$ cho biết chiều quay của vật quanh trục. Nếu $\bar{\omega} = \dot{\bar{\varphi}} > 0$ thì $\bar{\varphi}$ tăng theo thời gian và vật rắn quay theo chiều dương. Ngược lại nếu $\bar{\omega} < 0$ thì vật quay theo chiều âm.

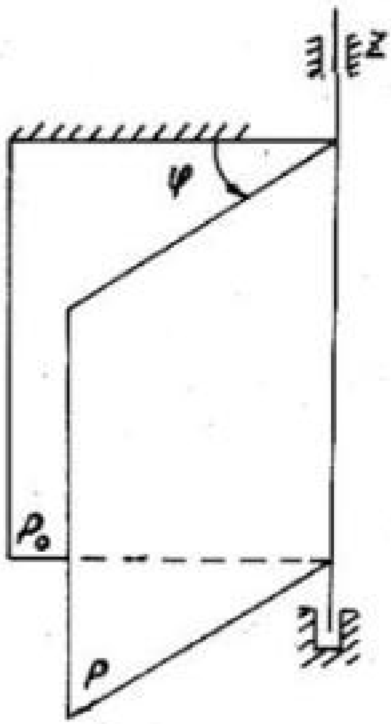
Giá trị tuyệt đối $|\bar{\omega}| = \omega$ cho biết độ nhanh của chuyển động quay : ω có giá trị càng lớn, thì vật quay càng nhanh.

Đơn vị để tính vận tốc góc là radian trên giây. Kí hiệu là rad/s. Người ta cũng dùng đơn vị 1/s để tính vận tốc góc.

Trong kĩ thuật người ta hay sử dụng đơn vị vòng/phút để tính tốc độ góc. Do 1 vòng = 2πrad, 1 phút = = 60s nên ta dễ dàng thiết lập hệ thức liên hệ giữa hai loại đơn vị :

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1n \text{ rad/s} \qquad (2-4)$$

Thí dụ : n = 9000 vòng/ph thì $\omega = 300\pi$rad/s



Hình 2-5

3. Gia tốc góc của vật

Đại lượng :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\bar{\varphi}} \qquad (2-5)$$

gọi là gia tốc góc của vật.

Đơn vị để tính gia tốc góc là rađian/giây^2. Kí hiệu là rad/s^2. Người ta cũng dùng đơn vị 1/s^2 để tính gia tốc góc.

Gia tốc góc $\bar{\varepsilon}$ đặc trưng cho sự biến thiên của vận tốc góc $\bar{\omega}$ theo thời gian. Khi $\bar{\varepsilon} = 0$, do đó $\bar{\omega}$ = const, chuyển động quay đều. Khi $\varepsilon \neq 0$, chuyển động quay biến đổi. Nếu $\omega = |\bar{\omega}|$ tăng theo thời gian, thì vật rắn quay nhanh dần. Ngược lại khi ω giảm theo thời gian, thì vật rắn quay chậm dần. Chú ý rằng sự biến đổi của giá trị vận tốc góc ω được đặc trưng bởi sự biến đổi của $\omega^2 = (\bar{\omega})^2$. Do đó để tìm dấu hiệu nhận biết tính chất của chuyển động quay, ta xét dấu của đạo hàm :

$$\frac{d(\bar{\omega}^2)}{dt}$$

Do $\frac{d(\bar{\omega}^2)}{dt} = 2\bar{\omega}.\,\bar{\varepsilon}$. Ta có kết luận :

khi $\bar{\varepsilon} = \bar{0}$: vật rắn quay đều ;

$\bar{\omega}\,.\,\bar{\varepsilon} > 0$: vật rắn quay nhanh dần ;

$\bar{\omega}\,.\,\bar{\varepsilon} < 0$: vật rắn quay chậm dần.

4. Một vài dạng chuyển động quay đặc biệt

a) Chuyển động quay đều. Đó là chuyển động quay mà vận tốc góc có trị số không đổi (ω_o = const). Do đó $\omega = \omega_o$ = const.

Từ đó suy ra : $$\overline{\varphi} = \overline{\omega}_o t + \overline{\varphi}_o \qquad (2\text{-}6)$$

b) Chuyển động quay biến đổi đều. Đó là chuyển động quay mà gia tốc góc có trị số không đổi ($\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}_o$ = const).

Do : $\dfrac{d^2(\overline{\varphi})}{dt^2} = \overline{\varepsilon}$, ta suy ra :

$$\left.\begin{aligned} \overline{\omega} &= \overline{\varepsilon}_o t + \overline{\omega}_o \\ \overline{\varphi} &= \frac{1}{2}\overline{\varepsilon}_o t^2 + \overline{\omega}_o t + \overline{\varphi}_o \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}7)$$

5. Véc tơ vận tốc góc và véc tơ gia tốc góc

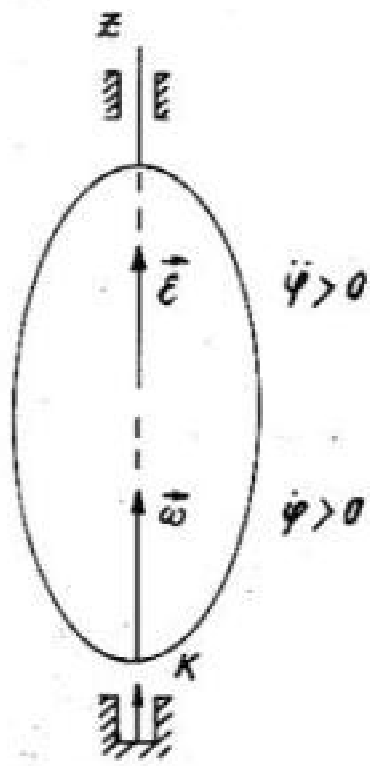
Để biểu diễn gọn gàng, sáng sủa những đặc điểm của chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định và để chuẩn bị cơ sở nghiên cứu sâu hơn về động học vật rắn, người ta sử dụng véc tơ để biểu diễn vận tốc góc và gia tốc góc. Kí hiệu véc tơ vận tốc góc là $\vec{\omega}$, véc tơ gia tốc góc là $\vec{\varepsilon}$.

Véc tơ vận tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định $\vec{\omega}$ là một véc tơ nằm trên trục quay có chiều sao cho nhìn từ ngọn đến gốc véc tơ $\vec{\omega}$ ta thấy vật rắn quay ngược chiều kim đồng hồ và có trị số $|\vec{\omega}| = \omega$, (H. 2-6). Nếu gọi $\vec{k}$ là véc tơ đơn vị trên trục quay z, ta có :

$$\vec{\omega} = \overline{\omega}.\vec{k}$$

Véc tơ gia tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định $\vec{\varepsilon}$ là một véc tơ bằng đạo hàm theo thời gian của véc tơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ của vật rắn :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}\vec{k} = \overline{\varepsilon}.\vec{k}$$



Hình 2-6.

Như thế véc tơ gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$ cũng nằm trên trục quay, chiều và trị số của nó được xác định bởi dấu và trị số của $\bar{\varepsilon}$ (H. 2–6).

2.2.2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CÁC ĐIỂM THUỘC VẬT

Xét chuyển động một điểm M bất kì thuộc vật rắn, nằm cách trục quay z một đoạn IM = R. Khi vật rắn quay quanh trục z cố định, quỹ đạo của điểm M là một đường tròn tâm I, bán kính R, nằm trên mặt phẳng đi qua I và vuông góc với trục quay. Do biết được quỹ đạo chuyển động của M nên ta sử dụng phương pháp tọa độ tự nhiên để phân tích chuyển động của điểm M.

1. Phương trình chuyển động của điểm

Chọn điểm O trên mặt phẳng P_o làm gốc quy chiếu và lấy chiều quay dương làm chiều dương. Vị trí của điểm M được xác định bởi cung $\bar{s} = \overset{\frown}{OM}$.

Vậy ta có phương trình chuyển động của điểm M.

$$\bar{s} = R\,\bar{\varphi}(t) \qquad (2-8)$$

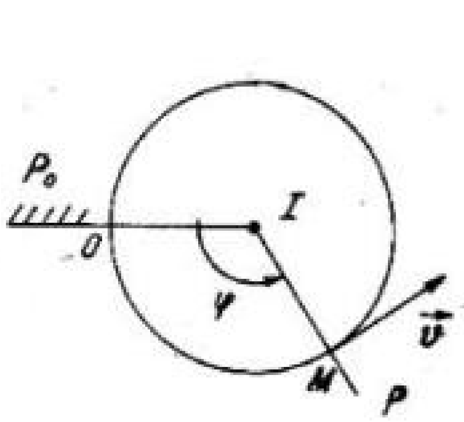
2. Vận tốc các điểm

Theo công thức (1–10) ta có :

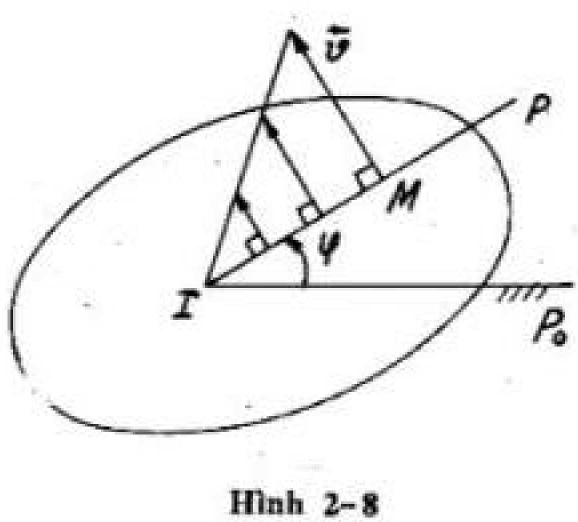
$$\vec{v} = v_t\vec{t_o} = \dot{\bar{s}}\vec{t_o}$$

Vậy vận tốc $\vec{v}$ của điểm M vuông góc với IM, hướng theo chiều quay của vật (H. 2–7) và có trị số xác định bởi công thức :

$$v = |\dot{\bar{s}}| = R\,|\dot{\bar{\varphi}}| = R\omega \qquad (2-9)$$



Hình 2-7



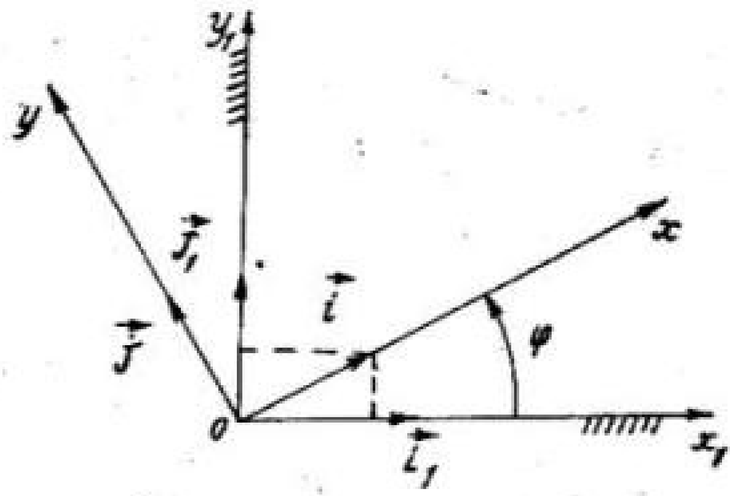
Hình 2-8

Như thế, vận tốc các điểm thuộc vật rắn quay quanh một trục cố định được phân bố quanh trục quay theo quy tắc tam giác vuông đồng dạng (H. 2–8).

Ta có :

$$\frac{v_M}{IM} = \frac{v_N}{IN} = \omega$$

Bây giờ ta thiết lập công thức Ơle, một công thức rất quan trọng trong động học vật rắn. Trước hết ta lấy hai hệ tọa độ vuông góc : hệ Ox_1y_1 cố định, hệ Oxy chuyển động quay quanh một trục cố định O, (H. 2–9).



Hình 2–9

Gọi vectơ đơn vị trên trục Ox là $\vec{i}$; trên trục Oy là $\vec{j}$ trên các trục Ox_1, Oy_1 tương ứng là $\vec{i_1}$, $\vec{j_1}$.

Từ hình 2–9 ta có :

$$\vec{i} = \cos\varphi.\vec{i_1} + \sin\varphi.\vec{j_1}$$
$$\vec{j} = -\sin\varphi.\vec{i_1} + \cos\varphi.\vec{j_1}$$

Thực hiện phép tính đạo hàm theo t :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{\varphi}(-\sin\varphi\,.\,\vec{i_1} + \cos\varphi\,.\,\vec{j_1}) = \dot{\varphi}\vec{j} \qquad (2\text{–}10)$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -\dot{\varphi}(\cos\varphi\,.\,\vec{i_1} + \sin\varphi\,.\,\vec{j_1}) = -\dot{\varphi}\vec{i}$$

Xét vật rắn quay quanh một trục z cố định. Chọn hệ tọa độ cố định $Ox_1y_1z_1$ làm hệ quy chiếu. Lấy hệ tọa độ động Oxyz gắn liền với vật (H. 2–10). Vị trí của điểm M thuộc vật được xác định bởi vectơ $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

trong đó : x, y, z là tọa độ của điểm M trong hệ tọa độ Oxyz. Chúng là các hằng số.

Vận tốc của điểm M :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Do $\vec{k} = \overrightarrow{const}$, nên $\dot{\vec{k}} = 0$. Chú ý đến (2–10) ta có :

$$\vec{v} = x\dot{\varphi}\vec{j} - y\dot{\varphi}\vec{i} = -y\omega_z\vec{i} + x\omega_z\vec{j}$$

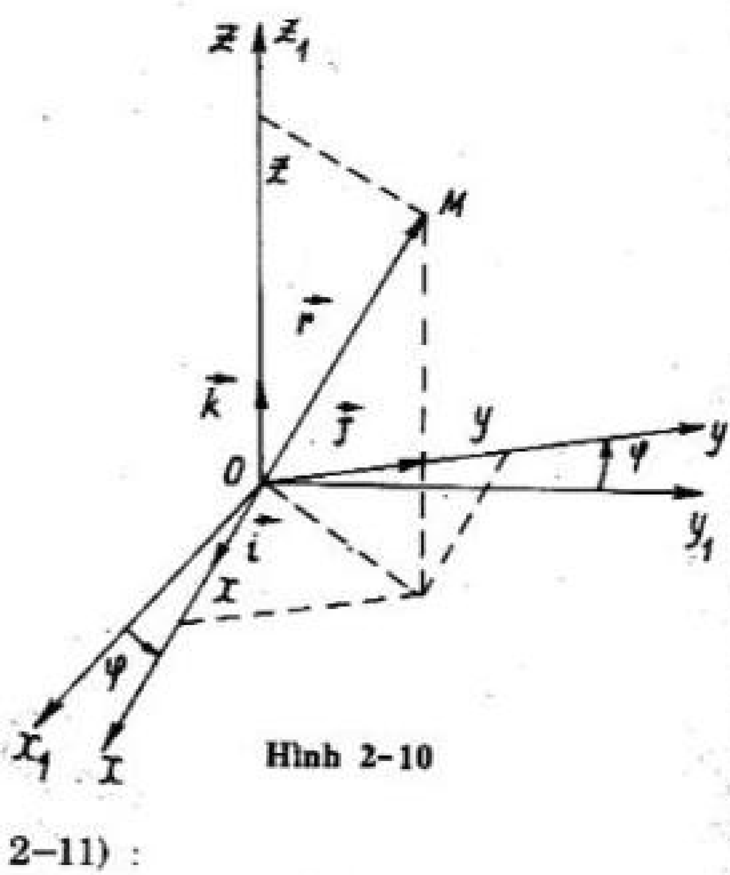
Mặt khác, chú ý đến tích vectơ :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega_z\vec{i} + x\omega_z\vec{j}$$

Từ trên ta có :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (2\text{–}11)$$

Công thức (2–11) gọi là công thức Ơle. Đây là công thức cơ bản của lí thuyết động học vật rắn. Chú ý rằng, ta có thể thiết lập công thức Ơle nhanh gọn hơn bằng một vài nhận xét hình học về tích hữu hướng của hai vectơ.



Hình 2-10

3. Gia tốc các điểm

Điểm M chuyển động tròn, nên trong trường hợp tổng quát, gia tốc của nó có hai thành phần : gia tốc pháp tuyến $\vec{a^n}$ và gia tốc tiếp tuyến $\vec{a^t}$ (H. 2–11) :

$$\vec{a} = \vec{a^n} + \vec{a^t}$$

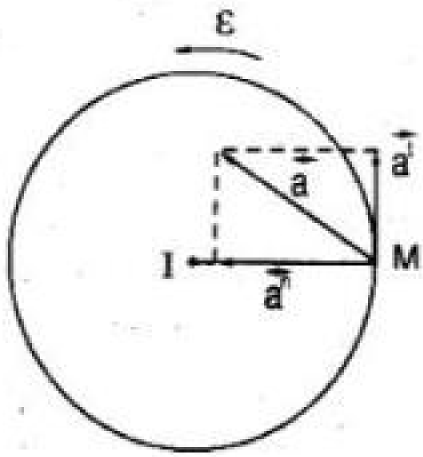
Gia tốc pháp tuyến $\vec{a}^n$ hướng từ điểm M vào tâm I. Trị số của nó :

$$a^n = \frac{v^2}{\rho} = R\omega^2 \qquad (2\text{-}12)$$

Gia tốc tiếp tuyến $\vec{a}^t$ hướng cùng chiều hay ngược chiều với vận tốc $\vec{v}$ tùy theo vật rắn quay nhanh dần hay chậm dần quanh trục quay.

Trị số của nó :

$$a^t = |\dot{v}| = R\varepsilon \qquad (2\text{-}13)$$



Hình 2-11

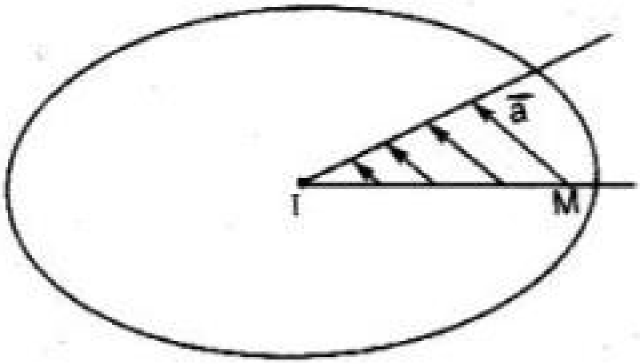
Gia tốc toàn phần của điểm M tạo với MI một góc α mà :

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a^t}{a^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Còn trị số của nó :

$$a = \sqrt{(a^t)^2 + (a^n)^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

Như thế, gia tốc các điểm của vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định được phân bố theo quy tắc tam giác thường đồng dạng với hệ số đồng dạng là $\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ (H.2-12).



Hình 2-12

Từ công thức Ơle (2-11) ta có :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \qquad (2\text{-}14)$$

Bằng một vài suy luận đơn giản, ta rút ra :

$$\vec{a}^n = \vec{\omega} \wedge \vec{v}; \ \vec{a}^t = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} \qquad (2\text{-}15)$$

Thí dụ 2-1. Kim của điện kế Galvani dài l chuyển động theo quy luật $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_o \sin 2\pi \frac{1}{T} t$, trong đó $\overline{\varphi}_o$ là góc lệch cực đại của kim từ vị trí $\overline{\varphi} = 0$, T là chu kỳ dao động. Tìm vận tốc, gia tốc điểm đầu mút của kim điện kế ở thời điểm $t = T/4$.

Bài giải

Kim điện kế thực hiện chuyển động quay dao động điều hòa quanh một trục cố định. Vận tốc góc và gia tốc góc của nó là :

$$\omega_z = \dot{\overline{\varphi}} = \frac{2\pi}{T} \overline{\varphi}_o \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

$$\varepsilon_z = \ddot{\overline{\varphi}} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \overline{\varphi}_o \sin \frac{2\pi}{T} t$$

Trị số vận tốc điểm đầu mút của kim điện kế

$$v = l\omega = l \frac{2\pi}{T} \varphi_o \left|\cos \frac{2\pi}{T} t\right|$$

Trị số gia tốc tiếp và gia tốc pháp của điểm đầu mút của kim :

$$a^t = l\varepsilon = l \frac{4\pi^2}{T^2} \varphi_o \left|\sin \frac{2\pi}{T} t\right| \; ; \; a^n = l\omega^2 = l \frac{4\pi^2}{T^2} \varphi_o^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T} t$$

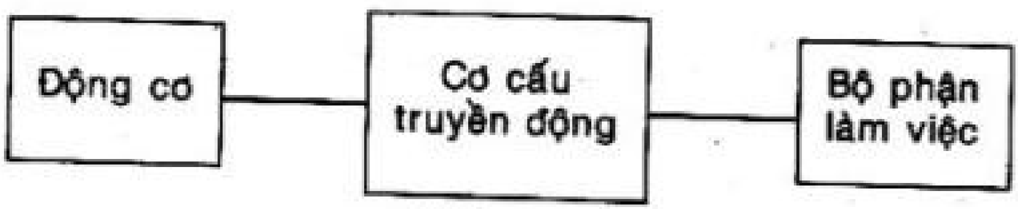
Khi $t = \frac{T}{4}$ thì $\sin \frac{2\pi}{T} t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{2\pi}{T} t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

Do vậy : khi $t = \frac{T}{4}$; góc $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_o$; $v = l\omega = 0$; $a^t = l \frac{4\pi^2}{T^2} \varphi_o$; $a^n = 0$

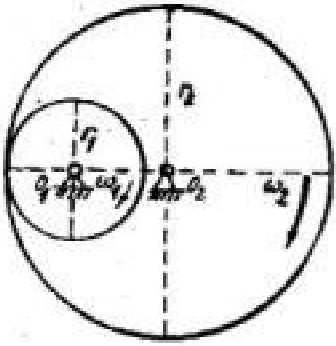
2.3. TRUYỀN ĐỘNG ĐƠN GIẢN

2.3.1. VỊ TRÍ CỦA TRUYỀN ĐỘNG

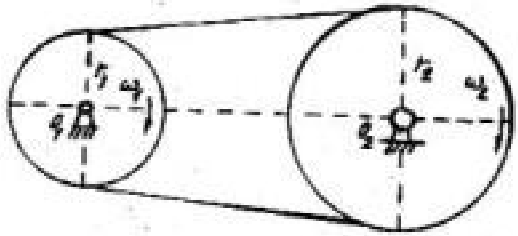
Trong một máy hoặc một tổ hợp máy thường gồm ba phần (H. 2-13) : động cơ, cơ cấu truyền động, bộ phận làm việc.



Hình 2-13

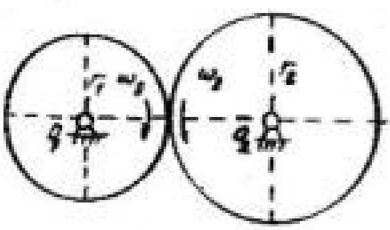


Hình 2-14a

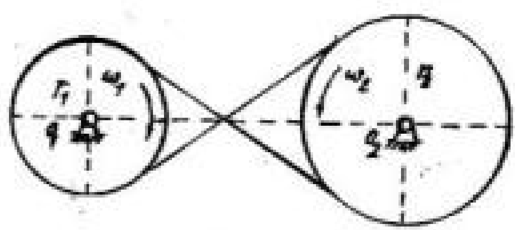


Hình 2-14b

Ở đây bước đầu ta làm quen với một vài cơ cấu truyền động đơn giản nhằm biến chuyển động quay quanh một trục cố định thành chuyển động quay quanh một trục khác cố định, biến chuyển động tịnh tiến thành chuyển động tịnh tiến, biến chuyển động quay thành chuyển động tịnh tiến và biến chuyển động tịnh tiến thành chuyển động quay.



Hình 2-15a



Hình 2-15b

2.3.2. VÀI LOẠI TRUYỀN ĐỘNG ĐƠN GIẢN

1. Truyền động bằng cơ cấu bánh răng, đai truyền, xích

Truyền các chuyển động quay giữa hai trục cố định song song nhau, người ta dùng cơ cấu bánh răng, đai truyền, xích như hình 2-14 và 2-15.

Trong trường hợp biểu diễn trên hình 2–14, ta có :

$$\frac{\overline{\omega}_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

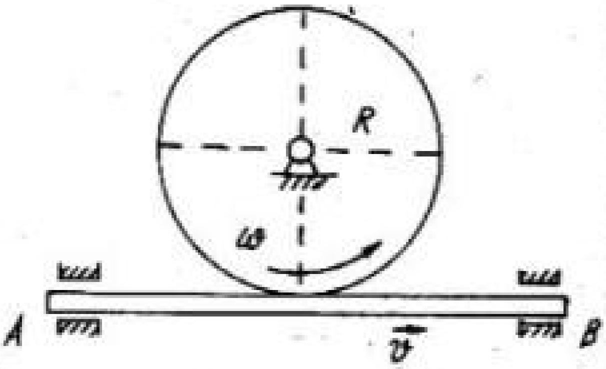
Truyền động như hình 2–15 ta có :

$$\frac{\overline{\omega}_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}$$

2. Truyền động bằng bánh răng – thanh răng

Để truyền chuyển động giữa một vật quay và một vật tịnh tiến người ta sử dụng cơ cấu bánh răng – thanh răng hoặc cơ cấu bánh – thanh ma sát (H. 2–16).

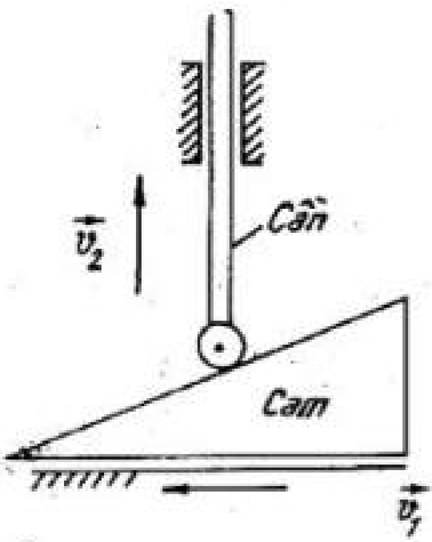
Khi đó : $v = R\omega$



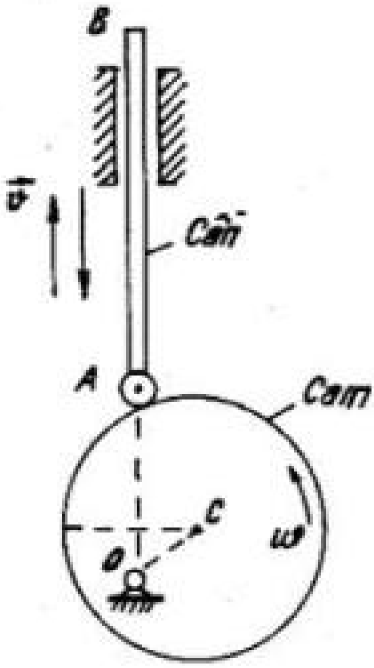
Hình 2-16

3. Truyền động bằng cơ cấu cam

Để truyền chuyển động tịnh tiến thành chuyển động tịnh tiến hoặc chuyển động quay thành chuyển động tịnh tiến người ta có thể sử dụng các cơ cấu cam như hình 2–17.

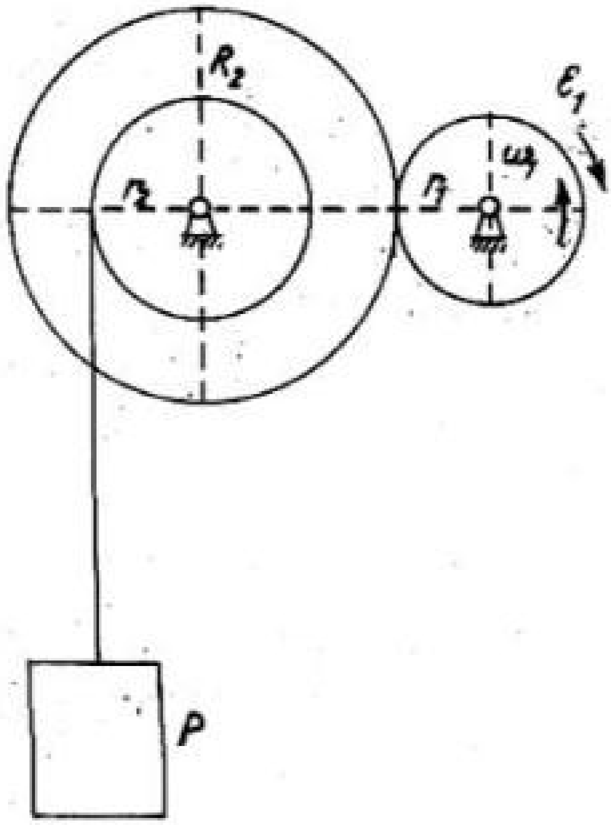


Hình 2-17a



Hình 2-17b

Thí dụ 2 - 2. Cho cơ cấu truyền động như hình 2–18. Trục I có bán kính R_1 chuyển động quay với vận tốc ω_1 và gia tốc góc ε_1. Trục II gồm hai tầng có bán kính tương ứng R_2 và r_2. Tìm vận tốc và gia tốc của vật P.



Hình 2-18

Bài giải

Hệ gồm có trục I và trục II chuyển động quay, còn vật P chuyển động tịnh tiến. Theo trên ta có :

$$\frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_2} = \frac{\overline{\varepsilon}_1}{\overline{\varepsilon}_2} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Do đó :

$$\overline{\omega}_2 = -\frac{R_1}{R_2}\overline{\omega}_1 \ ; \ \overline{\varepsilon}_2 = -\frac{R_1}{R_2}\overline{\varepsilon}_1$$

Vận tốc điểm P :

$$v_P = v_M = r_2\omega_2 = \frac{r_2R_1}{R_2}\omega_1$$

Gia tốc điểm P :

$$a_P = a_M^t = r_2\varepsilon_2 = \frac{r_2R_1}{R_2}\varepsilon_1$$

Do $\overline{\omega}_1$ và $\overline{\varepsilon}_1$ ngược chiều nhau (H. 2–18) nên vật P chuyển động lên chậm dần do $\overrightarrow{v_P}$ và $\overrightarrow{a_P}$ ngược chiều nhau.

CHƯƠNG 3

HỢP CHUYỂN ĐỘNG ĐIỂM

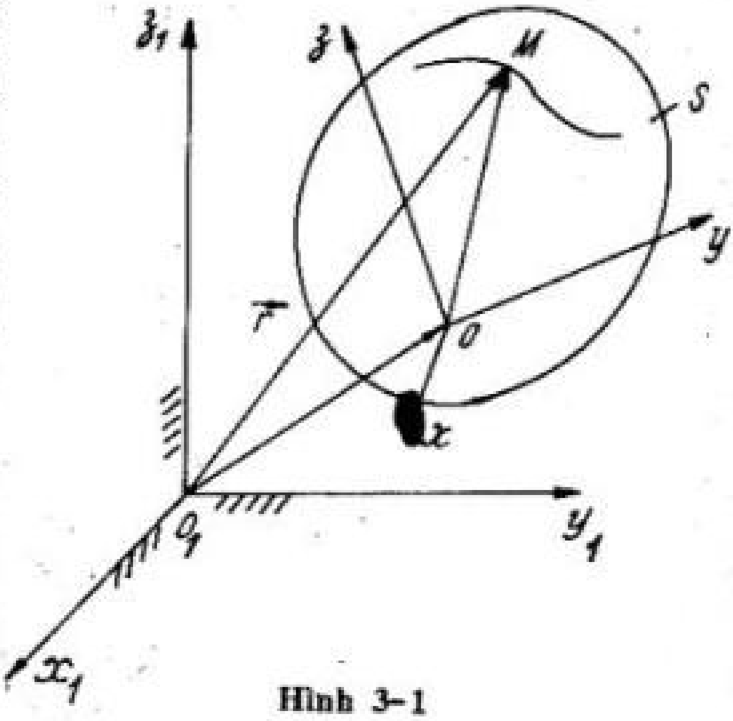
Trong chương 1 chúng ta đã khảo sát chuyển động của điểm đối với hệ quy chiếu cố định. Trong thực tế, nhiều khi chúng ta phải khảo sát chuyển động của điểm đối với hệ quy chiếu, mà hệ quy chiếu này lại chuyển động đối với hệ quy chiếu cố định. Trong chương này sẽ thiết lập hai định lí cơ bản của bài toán hợp chuyển động điểm : định lí hợp vận tốc và định lí hợp gia tốc.

3.1. ĐỊNH NGHĨA VỀ CÁC LOẠI CHUYỂN ĐỘNG

3.1.1. MÔ HÌNH BÀI TOÁN

Điểm M chuyển động đối với hệ quy chiếu động Oxyz. Thông thường hệ quy chiếu động Oxyz này được gắn liền với một vật rắn S nào đó (H. 3–1). Hệ quy chiếu động Oxyz chuyển động đối với hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1z_1$.

Bài toán đặt ra là khảo sát chuyển động của điểm M đối với hệ quy chiếu Oxyz đang chuyển động đối với hệ quy chiếu $O_1x_1y_1z_1$.



Hình 3–1

3.1.2. ĐỊNH NGHĨA VỀ CHUYỀN ĐỘNG TUYỆT ĐỐI, TƯƠNG ĐỐI VÀ CHUYỀN ĐỘNG THEO

1. Chuyển động tuyệt đối

Chuyển động của điểm M đối với hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1z_1$ được gọi là chuyển động tuyệt đối. Vận tốc, gia tốc của điểm M trong chuyển động tuyệt đối (nghĩa là tính toán trong hệ quy chiếu cố định) được gọi là vận tốc tuyệt đối, gia tốc tuyệt đối. Kí hiệu : $\vec{v}_a$, $\vec{a}_a$.

Ta có :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (3-1)$$

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{O_1M}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (3-2)$$

2. Chuyển động tương đối

Chuyển động của điểm M đối với hệ quy chiếu động Oxyz được gọi là chuyển động tương đối. Vận tốc, gia tốc điểm M trong chuyển động tương đối (nghĩa là tính toán trong hệ quy chiếu động) được gọi là vận tốc tương đối, gia tốc tương đối. Kí hiệu : $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$.

Kí hiệu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tọa độ của điểm M trong hệ quy chiếu động là x, y, z. Khi đó ta có :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Theo định nghĩa trên biểu thức của $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$ có dạng :

$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) \text{ xem } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ là các vectơ hằng số :}$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (3-3)$$

$$\vec{a}_r = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (3-4)$$

3. Chuyển động theo

Chuyển động của hệ quy chiếu động Oxyz đối với hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1z_1$ gọi là chuyển động theo.

Để có thể thiết lập biểu thức của vận tốc theo, gia tốc theo, ta đưa vào khái niệm trùng điểm. Gọi điểm M* của hệ quy chiếu động mà ở thời điểm khảo sát có cùng vị trí với điểm M là trùng điểm của điểm M tại thời điểm đó. Như thế ở mỗi thời điểm, điểm M trùng với một điểm M^* nào đó của hệ quy chiếu động.

Vận tốc, gia tốc tuyệt đối của trùng điểm M^* tại thời điểm khảo sát (nghĩa là tính toán trong hệ quy chiếu cố định) được gọi là vận tốc theo, gia tốc theo của điểm M tại thời điểm đó. Kí hiệu : $\vec{v}_e$, $\vec{a}_e$.

Gọi x^*, y^*, z^* là tọa độ của trùng điểm M^* trong hệ quy chiếu động Oxyz (x^*, y^*, z^* là các hằng số). Ta có :

$$\overrightarrow{O_1M^*} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM^*} = \overrightarrow{O_1O} + x^*\vec{i} + y^*\vec{j} + z^*\vec{k}$$

Theo định nghĩa :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{M^*} = \frac{d\overrightarrow{O_1M^*}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + x^*\frac{d\vec{i}}{dt} + y^*\frac{d\vec{j}}{dt} + z^*\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{M^*} = \frac{d^2\overrightarrow{O_1M^*}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{O_1O}}{dt^2} + x^*\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y^*\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z^*\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}$$

Do $x(t) = x^*(t)$, $y(t) = y^*(t)$, $z(t) = z^*(t)$ nên ta có :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \tag{3 - 5}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_1O}}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \tag{3 - 6}$$

Trong các bài toán áp dụng, để tính vận tốc theo, gia tốc theo ta tưởng tượng dừng điểm M lại trên hệ quy chiếu động. Sau đó tính toán vận tốc, gia tốc của điểm M do chuyển động của hệ động đối với hệ quy chiếu cố định gây ra.

3.2. CÁC ĐỊNH LÍ HỢP VẬN TỐC VÀ HỢP GIA TỐC

3.2.1. ĐỊNH LÍ HỢP VẬN TỐC

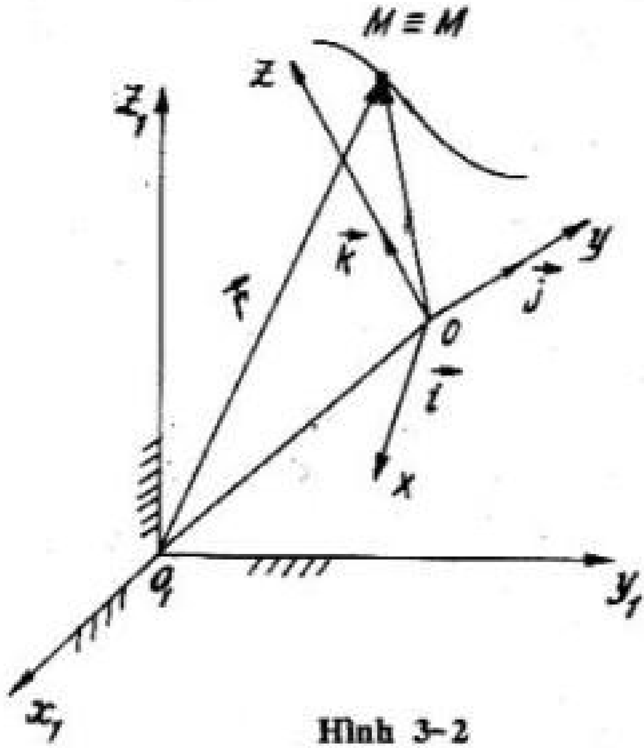
Ở mỗi thời điểm, vận tốc tuyệt đối của điểm bằng tổng hình học các vận tốc tương đối và vận tốc theo của nó.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \tag{3 - 7}$$

Chứng minh :

Theo hình 3 – 2 ta có :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O_1O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Hình 3–2

Đạo hàm biểu thức trên ta được :

$$\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} +$$

$$+ \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Chú ý đến (3 – 1), (3 – 3) và (3 – 5) ta suy ra :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

3.2.2. ĐỊNH LÍ HỢP GIA TỐC

Ở mỗi thời điểm, gia tốc tuyệt đối của điểm bằng tổng hình học của gia tốc tương đối, gia tốc theo và gia tốc Côriôlit

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \qquad (3 - 8)$$

Khi hệ động Oxyz chuyển động tịnh tiến : $\vec{a}_c = \vec{0}$

Khi hệ động Oxyz chuyển động quay quanh một trục cố định với vận tốc góc $\vec{\omega}_e$ thì $\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$

Chứng minh : Đạo hàm hai lần biểu thức :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

ta được :

$$\frac{d^2\overrightarrow{O_1M}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{O_1O}}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} +$$

$$+ 2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

Chú ý đến (3 – 2). (3 – 4) và (3 – 6) ta có :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

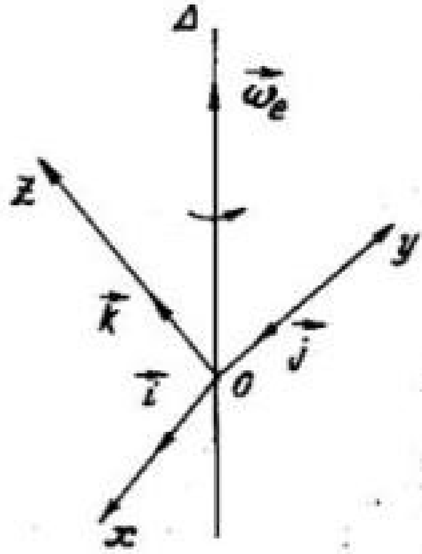
trong đó :

$$a_c = 2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

gọi là gia tốc Côriôlit.

Khi hệ quy chiếu động Oxyz chuyển động tịnh tiến, các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ hằng. Do đó $\vec{a}_c = \vec{0}$.

Khi hệ quy chiếu động chuyển động quay quanh một trục cố định Δ (H. 3 – 3), ta lấy điểm O trên trục Δ làm gốc hệ quy chiếu ấy. Theo công thức tính vận tốc Ơle trong chương 2.



Hình 3–3

Ta có :

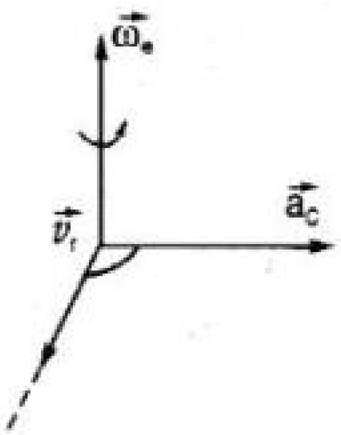
$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{i}\,;\; \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{j}\,;\; \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{k}$$

Từ đó ta suy ra :

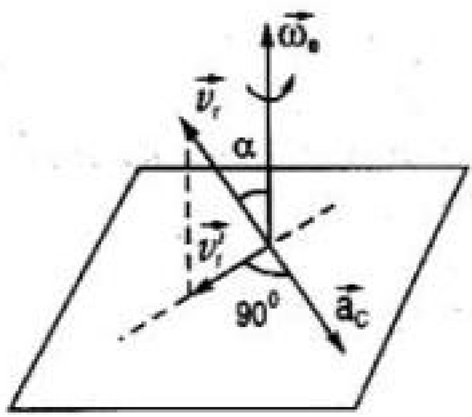
$$\vec{a}_c = \vec{2}\omega_e \wedge \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) = 2\,\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r \qquad (3-9)$$

Chú ý. Khi làm các bài tập ta có thể sử dụng quy tắc thực hành để xác định vectơ gia tốc Côriôlit như sau :

Khi điểm M chuyển động trên một mặt phẳng thì $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$. Khi đó ta quay vectơ $\vec{v}_r$ theo chiều quay của $\vec{\omega}_e$ đi một góc 90°, ta sẽ được phương và chiều của vectơ $\vec{a}_c$. Độ lớn của nó được tính theo công thức $a_c = 2\,\omega_e v_r$ (H.3–4).



Hình 3-4



Hình 3-5

Khi điểm M không chuyển động trên một mặt phẳng. Trong mặt phẳng ($\vec{v}_r$, $\vec{\omega}_e$) chiếu vectơ $\vec{v}_r$ lên mặt phẳng vuông góc với $\vec{\omega}_e$ ta được vectơ $\vec{v}'_r$. Ta có $v'_r = v_r \sin\alpha$. Sau đó quay vectơ $\vec{v}'_r$ một góc 90° theo chiều của $\vec{\omega}_e$ ta được phương và chiều của $\vec{a}_c$. Độ lớn của nó (H.3–5).

$$a_c = 2\,\omega_e\,v'_r = 2\,\omega_e\,v_r\,\sin\alpha.$$

3.3. CÁC THÍ DỤ ÁP DỤNG

Thí dụ 3 – 1. Hai bờ của một con sông song song với nhau. Chiều rộng của dòng sông là h. Dòng sông chảy với vận tốc $\vec{v}$ có trị số không đổi. Một người lái thuyền sang ngang với vận tốc tương đối là $\vec{u}$. Xác định hướng của vận tốc $\vec{u}$ để cho thời gian sang sông là ngắn nhất. Với điều kiện đó xác định vị trí cập bến của thuyền.

Bài giải

Vật điểm khảo sát là con thuyền. Hệ quy chiếu động là dòng nước, hệ quy chiếu cố định là một mốc ở bờ sông. Khi đó con thuyền sẽ tham gia hai chuyển động : chuyển động tương đối với vận tốc $\vec{v}_r = \vec{u}$ và chuyển động theo với vận tốc $\vec{v}_e = \vec{v}$.

Theo định lí hợp vận tốc :

$$\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{v}$$

Chiếu đẳng thức này lên các trục tọa độ ta được :

$$v_{ax} = u\sin\alpha + v \; ; \; v_{ay} = u\cos\alpha$$

Từ đó tích phân lên, với điều kiện đầu $x(0) = 0$; $y(0) = 0$, ta được :

$$x = (u\sin\alpha + v)t \; ; \; y = (u\cos\alpha)t$$

Khi thuyền cập bến : $y = (u\cos\alpha)t = h$. Vậy thời gian sang sông là :

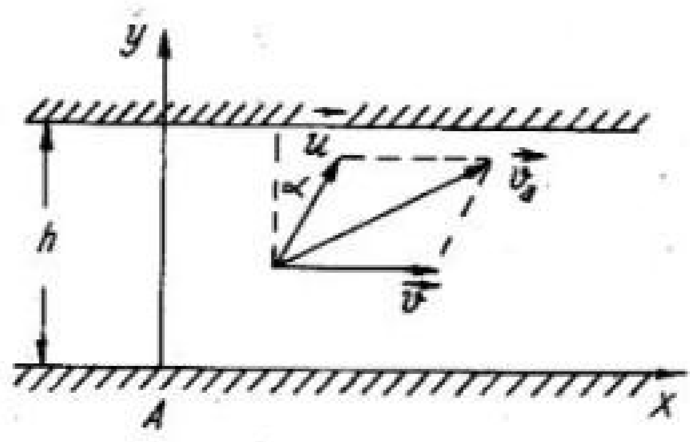
$$t = \frac{h}{u\cos\alpha}$$

Khi $\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow t_{min} = \frac{h}{u}$

Vị trí cập bến của con thuyền sẽ bị lùi một đoạn so với điểm xuất phát là :

$$x = \frac{v}{u} h$$

Thí dụ 3 – 2. Một máy nén khí có các ống dẫn khí cong quay đều quanh trục O vuông góc với mặt phẳng hình vẽ với vận tốc góc w. Không khí chạy dọc theo các ống với vận tốc tương đối có trị số không đổi v_r. Tìm hình chiếu vận tốc và gia tốc của một phân tử khí nằm ở



Hình 3–6

điểm C của ống AB trên các trục Ox, Oy. Cho biết bán kính cong của ống ở điểm C là ρ góc giữa pháp tuyến của đường cong AB ở điểm C và bán kính CO là φ. Bán kính CO bằng r.

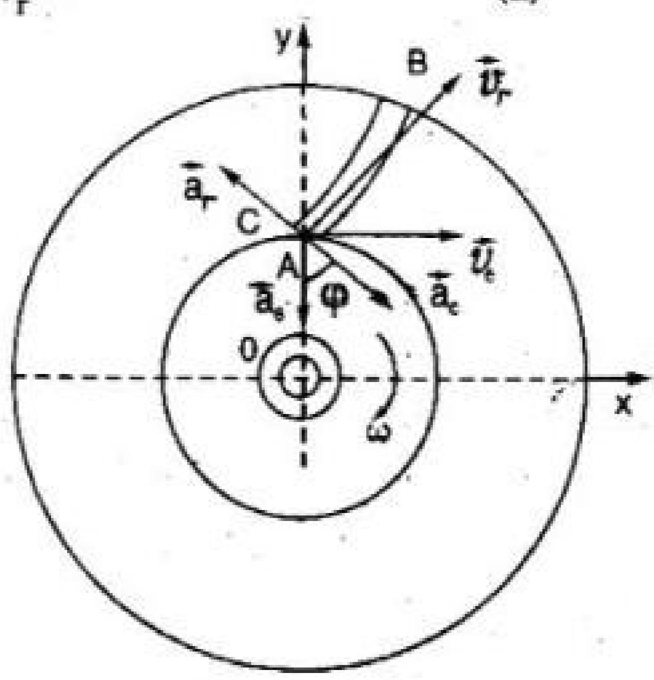
Bài giải

Phân tích. Ta khảo sát chuyển động của hạt lỏng ở vị trí C của ống dẫn khí AB. Chọn rôto máy nén khí làm hệ quy chiếu động và giá máy làm hệ quy chiếu cố định.

Với cách chọn trên, chuyển động tương đối của hạt lỏng là chuyển động cong đều trong rãnh AB, chuyển động theo là chuyển động của roto quay đều quanh trục O. Chuyển động tuyệt đối của hạt lỏng chưa biết và cần xác định.

Bài toán vận tốc. Sử dụng định lí hợp vận tốc.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \qquad \text{(a)}$$



Hình 3-7

Trong bài toán này $\vec{v}_r$ đã biết, vuông góc với pháp tuyến tại điểm C. Do roto quay quanh trục O nên $\vec{v}_e$ của hạt lỏng vuông góc với bán kính OC hướng theo chiều quay của roto và độ lớn là $v_e = OC.\omega = r.\omega$. Hai vectơ $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$ tạo với nhau 1 góc φ (H. 3– 7). Chiếu đẳng thức (a) lên các trục Ox, Oy ta được :

$$v_{ax} = v_r \cos\varphi + r.\omega$$

$$v_{ay} = v_r \sin\varphi$$

Bài toán gia tốc. Sử dụng định lí hợp gia tốc.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \qquad \text{(b)}$$

Theo giả thiết, hạt lỏng chuyển động đều trong rãnh cong AB, nên $a_r^t = 0$, $a_r^n = v_r^2/\rho$. Vectơ $\vec{a}_r^n$ hướng từ C về I. Do roto quay đều nên $a_e^t = 0$, $a_e^n = r\omega^2$. Vectơ $\vec{a}_e^n$ hướng từ C vào O. Do $\vec{v}_r \perp \vec{\omega}_e$ nên vectơ gia tốc Côriôlit $\vec{a}_c$ được xác định theo quy tắc đã nêu trong hình 3 – 4. Vectơ $\vec{a}_c$ hướng vuông góc với $\vec{v}_r$ và ngược chiều với $\vec{a}_r^{\,n}$, $a_c = 2\omega v_r$. Căn cứ vào hình vẽ 3 – 7 và biểu thức (b) ta dễ dàng tìm được các thành phần của vectơ gia tốc tuyệt đối :

$$a_{ax} = (2v_r\omega - \frac{v_r^2}{\rho})\sin\varphi$$

$$a_{ay} = -[r\omega^2 + (2v_r\omega - \frac{v_r^2}{\rho})\cos\varphi]$$

Thí dụ 3 – 3. Khảo sát chuyển động của cơ cấu culit như hình 3 – 8. Giả thiết rằng tay quay OA = 0,2m quay đều quanh O với vận tốc $\omega_o = 4\pi$1/s. Nhờ con chạy A có thể trượt dọc cần lắc O_1B mà chuyển động được truyền sang cần lắc O_1B. Ở thời điểm khảo sát $O_1AO = 60^o$; $AOO_1 = 90^o$. Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của cần lắc ở vị trí đó.

Bài giải :

Phân tích. Chọn con trượt A làm vật điểm khảo sát. Lấy cần lắc O_1B làm hệ quy chiếu chuyển động.

– Chuyển động tuyệt đối : Chuyển động của điểm A đối với giá cố định. Đó là chuyển động tròn đều, tâm O, bán kính OA.

– Chuyển động tương đối : chuyển động của điểm A đối với thanh O_1B. Đó là chuyển động thẳng.

– Chuyển động theo : chuyển động của thanh O_1B đối với giá cố định. Đó là chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định.

Bài toán vận tốc : Áp dụng định lí hợp vận tốc.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \qquad (a)$$

Vì chuyển động tuyệt đối của điểm A đã biết, nên vectơ $\vec{v}_a$ đã biết hoàn toàn, $\vec{v}_a \perp$ OA, có chiều phù hợp với chiều quay của ω_o, $v_a = a\omega_o$. Vectơ $\vec{v}_r$ hướng dọc theo O_1B, chiều và trị số của nó chưa biết. Cần lắc O_1B chuyển động quay quanh O_1, nên trùng điểm A* của A chuyển động tròn. Do đó $\vec{v}_e \perp O_1A$. Ta cũng chưa biết chiều và trị số của nó.

Từ hình vẽ 3 – 8 ta dễ dàng tìm được :

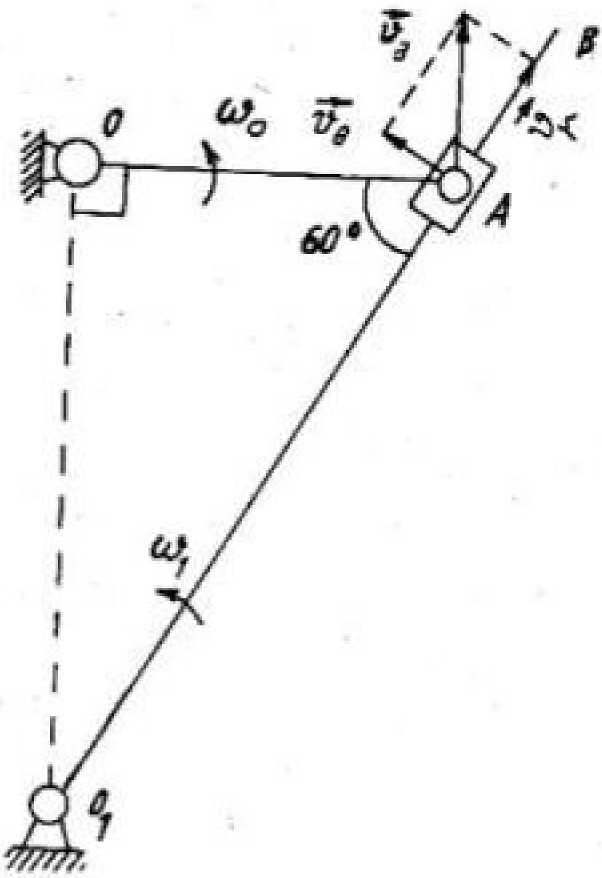
$v_e = v_a \sin 30^o$; $v_r = v_a \cos 30^o$. Do $v_a = OA.\omega_o = 0,8\pi$m/s. Nên ta có :

$v_r = 0,4\sqrt{3}\,\pi$, $v_e = 0,4\,\pi$.

Biết giá trị và hướng của $\vec{v}_e$, ta tìm được chiều quay và trị số của cần lắc ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{0,4\pi}{2.OA} = \pi \text{ 1/s}$$

Vận tốc góc $\overline{\omega_1}$ có chiều ngược chiều kim đồng hồ như hình vẽ.



Hình 3–8

Bài toán gia tốc : Áp dụng công thức :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

Do chuyển động tuyệt đối là chuyển động tròn đều nên $\vec{a}_a = \vec{a}_a^{\,n}$.

Chuyển động theo là chuyển động quay quanh một trục cố định nên $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,t}$. Công thức gia tốc trên có dạng :

$$\vec{a}_a^{\,n} = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,t} + \vec{a}_r + \vec{a}_c \quad \text{(b)}$$

trong đó :

$\vec{a}_a^{\,n}$ hướng từ A vào O ; $a_a^n = OA.\omega_o^2 = 0,2.16\pi^2 = 3,2\pi^2$;

$\vec{a}_e^{\,n}$ hướng từ A vào O_1 ; $a_e^n = O_1A.\omega_1^2 = 0,4\,\pi^2$.

$\vec{a}_c$ được xác định theo quy tắc đã nêu trên hình 3 – 4. Vectơ $\vec{a}_c$ vuông góc với O_1B như hình vẽ. Độ lớn của $a_c = 2\omega_1 v_r = 2\pi\, 0,4\sqrt{3}\,\pi = 0,8\sqrt{3}\,\pi^2$. Vectơ $\vec{a}_e^{\,t}$ hướng vuông góc O_1B nhưng chưa biết chiều và trị số. Vectơ $\vec{a}_r$ hướng dọc theo cần lắc O_1B nhưng chưa biết chiều và trị số.

Chiếu đẳng thức (b) lên trục O_1B và trục vuông góc với O_1B :

$$-a_a^n\cos 60^\circ = -a_r - a_e^n$$
$$a_a^n\sin 60^\circ = a_c - a_e^t$$

Từ đó suy ra :

$$a_r = a_a^n\cos 60^\circ - a_e^n = 1{,}6\,\pi^2 - 0{,}4\pi^2 = 1{,}2\pi^2$$

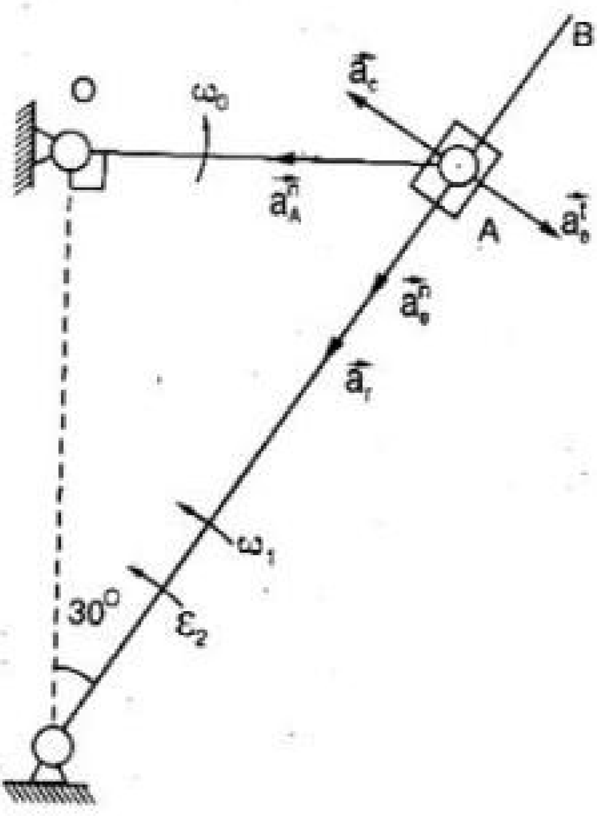
$$a_e^t = a_c - a_a^n\sin 60^\circ = 0{,}8\sqrt{3}\pi^2 - 1{,}6\sqrt{3}\pi^2 = -0{,}8\sqrt{3}\pi^2$$

Như vậy vectơ $\vec{a}_e^{\,t}$ ngược chiều với chiều đã vẽ trên hình 3 – 9.

Trị số của gia tốc góc của cần lắc O_1B :

$$\varepsilon_1 = \frac{a_e^t}{O_1A} = \frac{0{,}8\sqrt{3}\pi^2}{0{,}4} = 2\sqrt{3}\,\pi^2\ 1/s^2.$$

Căn cứ vào chiều đúng của $\vec{a}_e^{\,t}$, ta biết được chiều của ε_1. Trên hình vẽ $\bar{\varepsilon}_1$ có chiều ngược chiều kim đồng hồ.

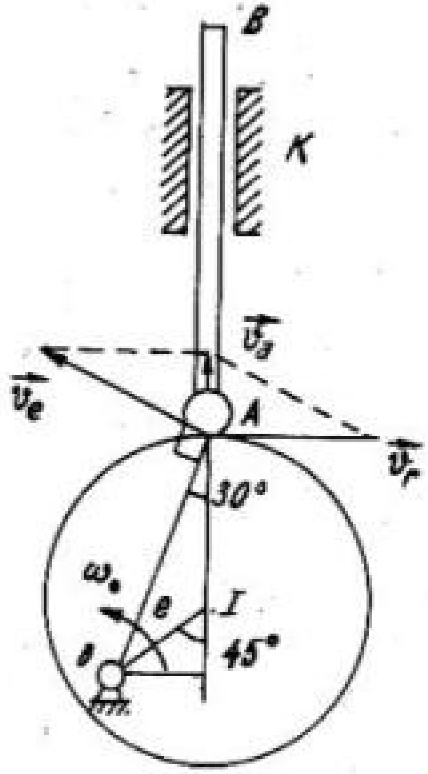


Hình 3–9

Thí dụ 3 – 4. Khảo sát chuyển động của cơ cấu cam (H. 3–10). Cho biết cam là một đĩa tròn lệch tâm quay đều quanh trục cố định O với vận tốc góc ω_o. Khoảng cách giữa tâm I của đĩa và O là e. Cần AB chuyển động tịnh tiến dọc theo rãnh định hướng K. Xác định vận tốc và gia tốc của cần ở vị trí như hình vẽ 3 – 10.

Bài giải

Phân tích : Ta khảo sát chuyển động của điểm A trên cần. Chọn hệ động là cam, hệ cố định là giá máy. Như thế chuyển động tương đối của A là chuyển động tròn quanh tâm I. Chuyển động theo là chuyển động quay của cam quanh O. Chuyển động tuyệt đối là chuyển động thẳng đứng lên xuống theo trục AB.



Hình 3–10

Bài toán vận tốc : Sử dụng định lí hợp vận tốc :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \qquad \text{(a)}$$

Trong thí dụ này $\vec{v}_e$ đã biết, vuông góc với OA và có độ lớn là $v_e = l\omega_o$. Trong đó :

$$l = OA = \sqrt{(r + e\cos 45^o)^2 + (e\sin 45^o)^2}$$
$$= \sqrt{r^2 + e^2 + er\sqrt{2}}$$

Vectơ $\vec{v}_r$ vuông góc với IA, chưa biết về chiều và trị số.

Vectơ $\vec{v}_a$ hướng theo trục AB, chưa biết về chiều và trị số. Dựa trên hình vẽ 3–10 và công thức (a), ta dễ dàng xác định được :

$$v_a = v_e \cos 60^o = \frac{1}{2} l\omega_o$$

$$v_r = v_e \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} l\omega_o$$

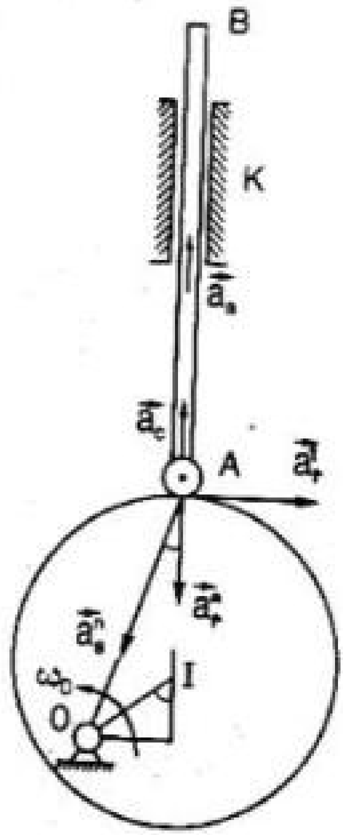
Bài toán gia tốc : Sử dụng định lí hợp gia tốc :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \qquad \text{(b)}$$

Do cam quay đều, nên $a_e^t = 0$; $a_e^n = l\omega_o^2$. Điểm A chuyển động tương đối trên vành cam nên $\vec{a}_r = \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n$. Trong đó $\vec{a}_r^n$ hướng từ A vào I và có giá trị :

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{r} = \frac{3}{4r} l^2\omega_o^2$$

Thành phần $\vec{a}_r^t$ hướng vuông góc với IA, chưa biết về chiều và trị số. Do $\vec{v}_r \perp \vec{\omega}_e$ nên vectơ gia tốc $\vec{a}_c$ được xác định theo quy tắc đã nêu trên hình 3 – 4. Vectơ $\vec{a}_c$ vuông góc với $\vec{v}_r$ và ngược chiều với $\vec{a}_r^{\,n}$; $a_c = 2\omega_o v_r = l\omega_o^2\sqrt{3}$. Do cần chuyển động tịnh tiến, nên $\vec{a}_a$ hướng dọc thanh AB. Ta chưa biết về chiều và trị số của nó.



Hình 3-11

Như thế hệ thức (b) bây giờ có dạng :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_r^{\,t} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_c \qquad (c)$$

Trong đó hai vectơ $\vec{a}_a$ và $\vec{a}_r^{\,t}$ chưa biết về chiều và trị số (H. 3–11). Chiếu hệ thức (c) lên phương IA ta được :

$$a_a = a_e^n \cos 30^o - a_r^n + a_c =$$

$$= -l\omega_o \frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4r} l^2 \omega_o^2 + l\omega_o^2\sqrt{3} =$$

$$= -l\omega_o^2\left(\frac{3l}{4r} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Do ở vị trí như hình 3 – 11 thì $l > r$; vậy $a_a < 0$; $\vec{a}_a$ phải hướng từ A tới I. Muốn tìm $\vec{a}_r^{\,t}$, ta chiếu hệ thức (c) lên phương vuông góc với AI.

Nhận xét chung : Khi tính toán vận tốc và gia tốc trong chương này, ta thường dẫn đến việc giải phương trình vectơ.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \sum_{j=1}^{m} \vec{b}_j$$

Nếu $\vec{a}_i$, $\vec{b}_j$ là các vectơ trong không gian, thì phương trình trên tương đương với ba phương trình vô hướng. Bài toán giải được khi có ba ẩn. Nếu $\vec{a}_i$, $\vec{b}_j$ là các vectơ nằm cùng trong một mặt phẳng, thì phương trình vectơ trên tương đương với hai phương trình vô hướng. Bài toán giải được khi có hai ẩn. Ẩn ở đây là trị số và dấu của nó.

Nếu trong phương trình trên, có một vectơ hoàn toàn chưa biết, bài toán thuộc loại bài toán tổng hợp. Nếu có hai (hoặc ba trong bài toán không gian) vectơ chưa biết về trị số, còn phương đã biết, bài toán thuộc loại bài toán phân tích. Như thế các thí dụ 3 - 1 và 3 - 2 ở trên thuộc loại bài toán tổng hợp, còn các thí dụ 3 - 3 và 3 - 4 là các bài toán phân tích.

CHƯƠNG 4

CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

Chuyển động song phẳng của vật rắn là một chuyển động phức hợp hay gặp trong kĩ thuật. Khi nghiên cứu chuyển động phức hợp của vật rắn ta thường phân tích chuyển động phức hợp ra các chuyển động cơ bản đã quen biết. Phương pháp khảo sát trong chương này khá tổng quát. Đầu tiên khảo sát chuyển động toàn vật, sau đó khảo sát chuyển động của các điểm thuộc vật rắn chuyển động song phẳng.

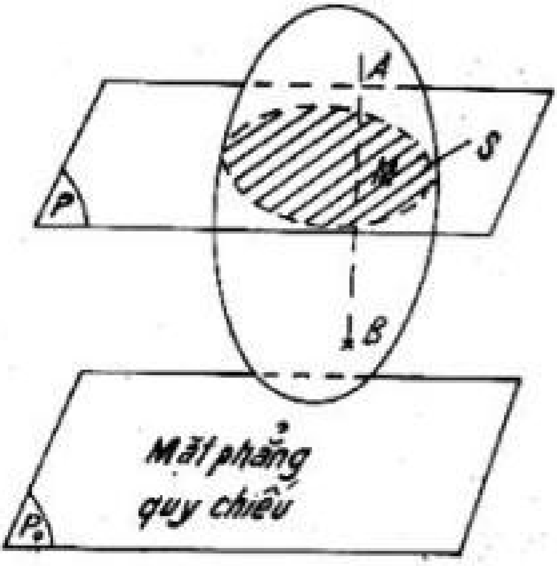
4.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ MÔ HÌNH

4.1.1. ĐỊNH NGHĨA

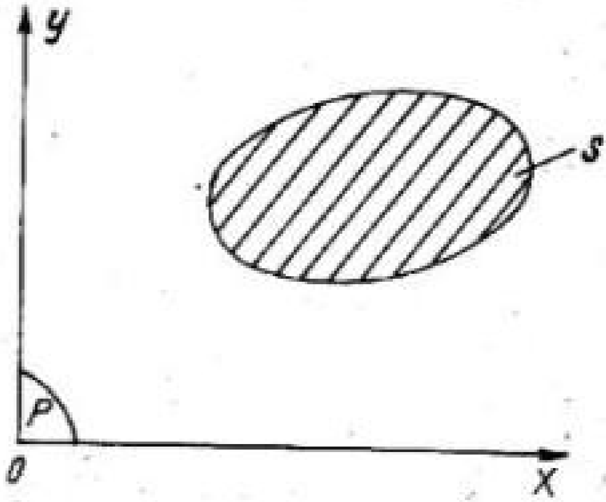
Chuyển động song phẳng của vật rắn là chuyển động trong đó mỗi điểm thuộc vật luôn luôn dịch chuyển trong một mặt phẳng xác định song song với một mặt phẳng quy chiếu đã chọn trước (H.4–1).

4.1.2. MÔ HÌNH CHUYỂN ĐỘNG PHẲNG

Xét một đoạn thẳng AB tùy ý của vật rắn $\sum$, mà AB vuông góc với mặt phẳng quy chiếu P_o. Vì $\sum$ là một vật rắn nên AB = const. Mặt khác do vật rắn $\sum$ chuyển động song phẳng nên các điểm A, B luôn dịch chuyển trong hai mặt phẳng song song nhau. Vậy đoạn AB luôn song song với vị trí ban đầu của nó. Theo định nghĩa, AB thực hiện chuyển động tịnh tiến. Vậy chuyển động của đoạn AB được đặc trưng bởi chuyển động của điểm M thuộc nó (H. 4-1). Vật rắn $\sum$ là tập hợp vô số thanh AB. Do đó chuyển động song phẳng của vật rắn $\sum$ được đặc trưng bởi chuyển động của thiết diện phẳng S trong mặt phẳng P.



Hình 4-1



Hình 4-2

Như vậy việc khảo sát chuyển động song phẳng của vật rắn $\sum$ trong không gian được đưa về bài toán khảo sát chuyển động phẳng của thiết diện S trong mặt phẳng P (H. 4 - 2).

4.2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

4.2.1. PHÂN TÍCH CHUYỂN ĐỘNG PHẲNG THÀNH CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN

Xét chuyển động của hình phẳng S trong mặt phẳng chứa nó (H. 4 - 3). Ta chọn hệ quy chiếu cố định Oxy. Lấy một điểm A tùy ý thuộc S làm điểm cực và gắn chặt vào hình phẳng S một hệ tọa độ $A\zeta\eta$. Đồng thời gắn vào A một hệ tọa độ Ax'y' sao cho trong quá trình S chuyển động luôn luôn có Ax' // Ox ; Ay' // Oy.

Chuyển động phẳng của hình S được phân tích thành hai chuyển động thành phần :

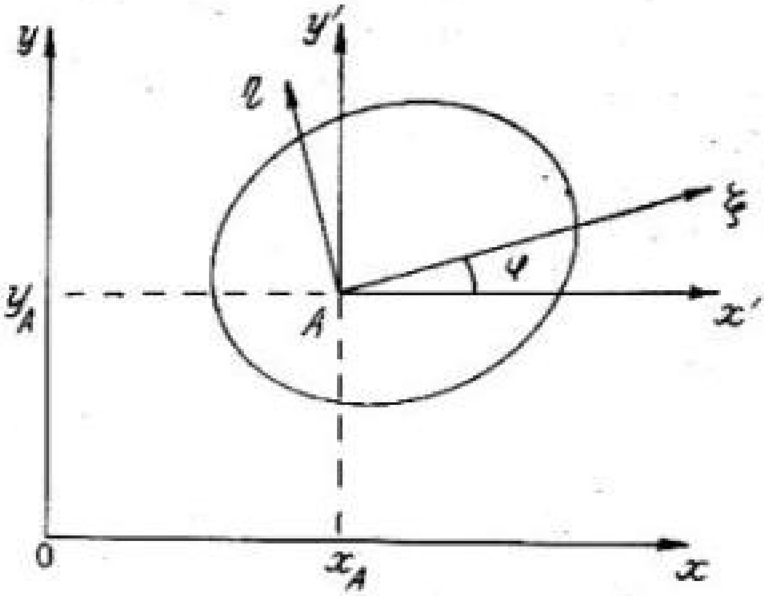
– Chuyển động tịnh tiến của hệ động Ax'y' đối với hệ quy chiếu cố định Oxy.

– Chuyển động quay quanh A của hệ động $A\xi\eta$ đối với hệ động Ax'y'.

Như thế, chuyển động phẳng của vật rắn bao giờ cũng có thể phân tích được thành hai chuyển động cơ bản : chuyển động quay tương đối của vật rắn quanh cực A thuộc vật đối với hệ quy chiếu động Ax'y' và chuyển động tịnh tiến của hệ động Ax'y' cùng với cực A đối với hệ quy chiếu cố định Oxy.

4.2.2. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỀN ĐỘNG CỦA VẬT

Theo phân tích trên, vị trí của S đối với hệ quy chiếu cố định Oxy được xác định bởi ba thông số định vị. Đó là góc φ (để xác định vị trí của S – hoặc hệ tọa độ $A\xi\eta$ – đối với hệ động Ax'y') và các tọa độ x_A, y_A (để xác định vị trí của hệ động Ax'y' đối với hệ cố định Oxy). Như thế, số bậc tự do của một vật rắn chuyển động song phẳng là ba.



Hình 4-3

Khi thiết diện phẳng S chuyển động phẳng, ba thông số x_A, y_A và φ biến đổi theo thời gian t. Do đó phương trình chuyển động của vật rắn chuyển động phẳng là :

$$x_A = x_A(t); \; y_A = y_A(t); \; \varphi = \varphi(t) \qquad (4-1)$$

Hai phương trình đầu mô tả thành phần chuyển động tịnh tiến, phương trình thứ ba mô tả thành phần chuyển động quay tương đối.

4.2.3. VẬN TỐC VÀ GIA TỐC SUY RỘNG CỦA VẬT

Nếu ta đưa vào các tọa độ mở rộng $q_1 = x_A$; $q_2 = y_A$; $q_3 = \varphi$; thì vị trí của vật rắn chuyển động phẳng được xác định bởi vectơ định vị :

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ \varphi \end{bmatrix} \qquad (4-2)$$

Đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vectơ định vị của vật rắn chuyển động phẳng được gọi là vectơ vận tốc suy rộng của vật :

$$\dot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Tương ứng với sự phân tích chuyển động ở trên, hai thành phần đầu của vectơ vận tốc suy rộng mô tả vận tốc của thành phần chuyển động tịnh tiến, còn thành phần thứ ba của vectơ vận tốc suy rộng mô tả vận tốc góc của thành phần chuyển động quay.

Ta gọi đạo hàm bậc hai theo thời gian của vectơ định vị của vật rắn chuyển động phẳng là vectơ gia tốc suy rộng của vật :

$$\ddot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Như thế, hai thành phần đầu của vectơ gia tốc suy rộng mô tả gia tốc của thành phần chuyển động tịnh tiến, và thành phần thứ ba ($\ddot{\varphi} = \dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$) của vectơ gia tốc suy rộng mô tả gia tốc góc của thành phần chuyển động quay.

4.3. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CÁC ĐIỂM THUỘC VẬT

4.3.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Lấy một điểm B bất kì thuộc vật rắn S chuyển động phẳng. Vị trí của điểm B đối với hệ quy chiếu cố định Oxy được xác định bởi vectơ định vị $\vec{r}_B$:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \qquad (4-4)$$

Chiếu đẳng thức vectơ (4 – 4) lên các trục tọa độ Ox, Oy ta được :

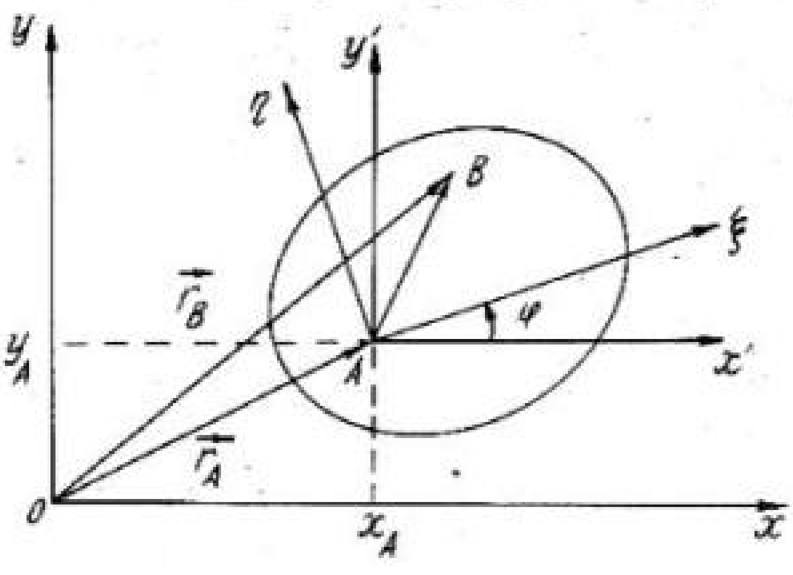
$$x_B = x_A + \zeta_B\cos\varphi - \eta_B\sin\varphi$$
$$y_B = y_A + \zeta_B\sin\varphi + \eta_B\cos\varphi \qquad (4-5)$$

Trong đó ζ_B, η_B là các tọa độ của điểm B trong hệ tọa độ $A\zeta\eta$, chúng luôn là các hằng số.

Các phương trình (4 – 5) có thể viết dưới dạng ma trận như sau :

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_B \\ \eta_B \end{bmatrix} \qquad (4-6)$$

Các phương trình (4 – 5) hoặc (4 – 6) được gọi là các phương trình chuyển động của một điểm thuộc vật rắn chuyển động phẳng.



Hình 4-4

4.3.2. VẬN TỐC CÁC ĐIỂM

1. Biểu thức giải tích xác định vận tốc của một điểm

Để nhận được biểu thức giải tích xác định vận tốc của một điểm thuộc vật rắn chuyển động phẳng, ta đạo hàm hai vế của phương trình (4 – 6) theo thời gian :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{bmatrix} + \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_B \\ \eta_B \end{bmatrix} \qquad (4-7)$$

Hoặc viết dưới dạng thông thường :

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_B &= \dot{x}_A - \dot{\varphi}\,(\zeta_B\sin\varphi + \eta_B\cos\varphi)\\ \dot{y}_B &= \dot{y}_A + \dot{\varphi}\,(\zeta_B\cos\varphi - \eta_B\sin\varphi)\end{aligned}\right\} \qquad (4-8)$$

Chú ý : nếu chưa quen với cách đạo hàm các ma trận, ta có thể đạo hàm hai vế của các phương trình (4 – 5) để nhận được các phương trình (4 – 8).

2. Quan hệ vận tốc giữa hai điểm

Định lí 1. *Vận tốc của điểm B tùy ý thuộc hình phẳng S chuyển động phẳng, bằng tổng hình học vận tốc của điểm cực A và vận tốc của điểm B trong chuyển động quay của hình phẳng S quanh A.*

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AB} \qquad (4-9)$$

Chứng minh. Theo mục 4.2 của chương này, chuyển động phẳng của hình phẳng S có thể phân tích thành hai chuyển động thành phần : chuyển động quay tương đối của S quanh trục đi qua A và chuyển động tịnh tiến theo cùng với hệ động Ax'y'. Do đó một điểm B bất kì của hình phẳng S sẽ tham gia vào hai chuyển động thành phần nói trên. Để tìm vận tốc tuyệt đối của điểm B ta áp dụng định lí hợp vận tốc (công thức (3 – 7) chương 3 – phần Động học) :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

Ở đây $\vec{v}_a = \vec{v}_B$; $\vec{v}_e = \vec{v}_{B_*} = \vec{v}_A$ vì hệ động Ax'y' chuyển động tịnh tiến $\vec{v}_r = \vec{v}_{BA}$ với $\vec{v}_{BA}$ là vận tốc của điểm B trong chuyển động quay tương đối của hình phẳng S quanh A. Vậy ta có :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

Theo công thức Ơle (2 – 11) chương 2 thì $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \wedge \overline{AB}$; $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của hình phẳng S.

Chú ý 1. Vận tốc góc của thành phần chuyển động quay không phụ thuộc vào việc chọn cực. Thực vậy, nếu lấy A làm cực, ta có :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \wedge \overline{AB} \qquad (a)$$

Nếu lấy B là cực thì :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \wedge \overline{BA} = \vec{v}_B - \vec{\omega}_B \wedge \overline{AB} \qquad (\beta)$$

Cộng hai đẳng thức (a) và (b) ta có :

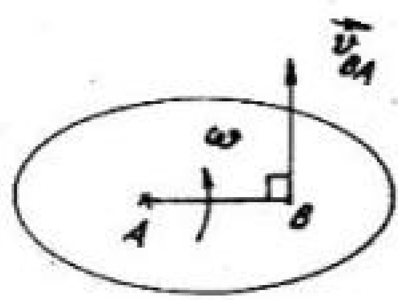
$$(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \wedge \overline{AB} = \vec{0} \qquad (c)$$

Do $\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B$ là vectơ vuông góc với mặt phẳng S, nên vuông góc với $\overline{AB}$. Từ (c) suy ra : $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$

Chú ý 2. Từ cách xác định vận tốc một điểm của vật rắn quay quanh một trục cố định, ta dễ dàng xác định vectơ $\vec{v}_{BA}$ bằng hình học.

$$\vec{v}_{BA} \begin{cases} \text{Phương} \perp BA \\ \text{Chiều hướng theo chiều quay } \overline{\omega} \\ \text{Trị số } v_{BA} = \omega . AB \end{cases}$$

Chú ý 3. Từ công thức (4–8) ta có thể suy ra ngay công thức (4 – 9) bằng một vài dẫn giải toán học đơn giản.



Hình 4-5

Định lí 2. *Hình chiếu vận tốc hai điểm bất kì của hình phẳng S chuyển động phẳng lên đường thẳng nối hai điểm đó thì bằng nhau.*

$$hc_{AB}\vec{v}_B = hc_{AB}\vec{v}_A \qquad (4\text{–}10)$$

Chứng minh

Chiếu đẳng thức (4–9) lên trục AB ta được :

$$hc_{AB}\vec{v}_B = hc_{AB}\vec{v}_A + hc_{AB}\vec{v}_{AB}$$

Do $\vec{v}_{BA} \perp AB$, nên $hc_{AB}\vec{v}_{AB} = \vec{0}$. Vậy định lí được chứng minh.

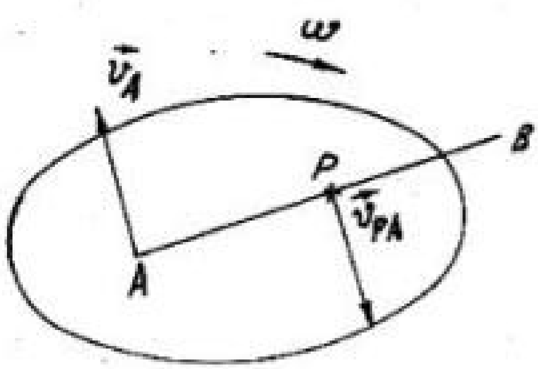
3. Tâm vận tốc tức thời

Định nghĩa. *Điểm P trên hình phẳng S mà tại thời điểm khảo sát có vận tốc bằng không, gọi là tâm vận tốc tức thời.*

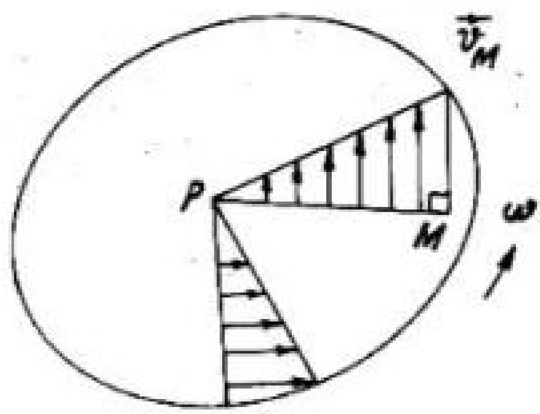
Định lí 3. *Ở mỗi thời điểm nếu $\omega \neq 0$,* có một điểm duy nhất thuộc hình phẳng S có vận tốc bằng không.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh sự tồn tại của tâm vận tốc tức thời. Giả sử biết vận tốc $\vec{v}_A$ và vận tốc góc $\bar{\omega}$ (H.4-6). Quay vectơ $\vec{v}_A$ quanh A theo chiều của $\bar{\omega}$ đi một góc 90° ta được nửa đường thẳng AB. Trên AB lấy một điểm P sao cho :

$$AP = \frac{1}{\omega} v_A$$



Hình 4-6



Hình 4-7

Khi đó :
$$\vec{v}_{PA} = -\vec{v}_A$$
Mặt khác theo công thức (4 - 9) :
$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{0}$$

Bây giờ ta chứng minh tính duy nhất của tâm P bằng phương pháp phản chứng. Giả sử có hai điểm P_1 và P_2 mà tại thời điểm khảo sát có tính chất $\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_2} = \vec{0}$. Khi đó :

$$\vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{P_1} + \vec{v}_{P_1P_2}$$

Đó là một điều vô lí vì $v_{P_1P_2} = \omega . P_1P_2 \neq 0.$

Vậy
$$P_1 \equiv P_2.$$

4. Sự phân bố vận tốc các điểm

Ta xét sự phân bố vận tốc các điểm của tấm phẳng S chuyển động phẳng. Có hai khả năng có thể xảy ra tại mỗi thời điểm :

Khả năng 1 : $\omega \neq 0$

Lấy tâm vận tốc tức thời P làm cực. Xét vận tốc của một điểm M bất kì thuộc hình phẳng S. Ta có quan hệ vận tốc.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP} \text{ (do } \vec{v}_P = \vec{0})$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{MP} \quad \begin{cases} \text{phương } \perp MP \\ \text{chiều hướng theo chiều } \overline{\omega} \\ \text{trị số } v_{MP} = \omega . MP \end{cases}$$

Vậy khi $\omega \neq 0$, vận tốc tức thời của hình phẳng S phân bố giống như S đang quay quanh tâm vận tốc tức thời P với vận tốc góc $\overline{\omega}$ (H.4–7).

Người ta nói rằng hình phẳng S quay tức thời quanh P.

Khả năng 2 : $\omega = 0$

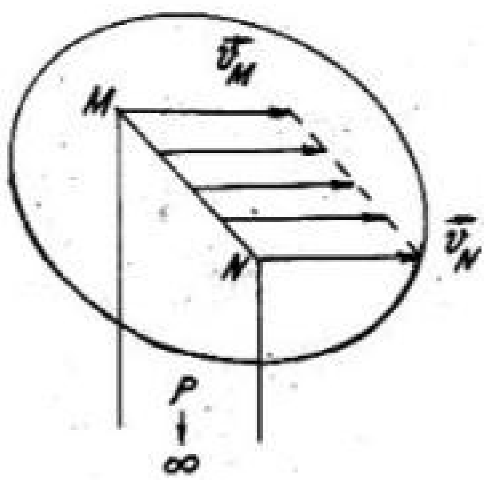
Xét vận tốc hai điểm M, N bất kì của hình phẳng S. Ta có

$$\vec{v}_M = \vec{v}_N + \vec{v}_{MN}$$

Do $v_{MN} = MN.\ \omega = 0$, nên $\vec{v}_M = \vec{v}_N$. Vậy khi $\omega = 0$, vận tốc tức thời của các điểm của hình phẳng S đều bằng nhau (H.4 – 8).

Người ta nói rằng hình phẳng S chuyển động tịnh tiến tức thời.

Như vậy, tại mỗi thời điểm, hình phẳng S hoặc quay tức thời quanh tâm vận tốc tức thời P (khi $\omega \neq 0$) hoặc chuyển động tịnh tiến tức thời (khi $\omega = 0$). Chú ý rằng chuyển động tức thời của hình phẳng chỉ nói lên tính chất của vận tốc. Tuyệt đối không được từ đó suy ra tính chất của gia tốc.



Hình 4-8

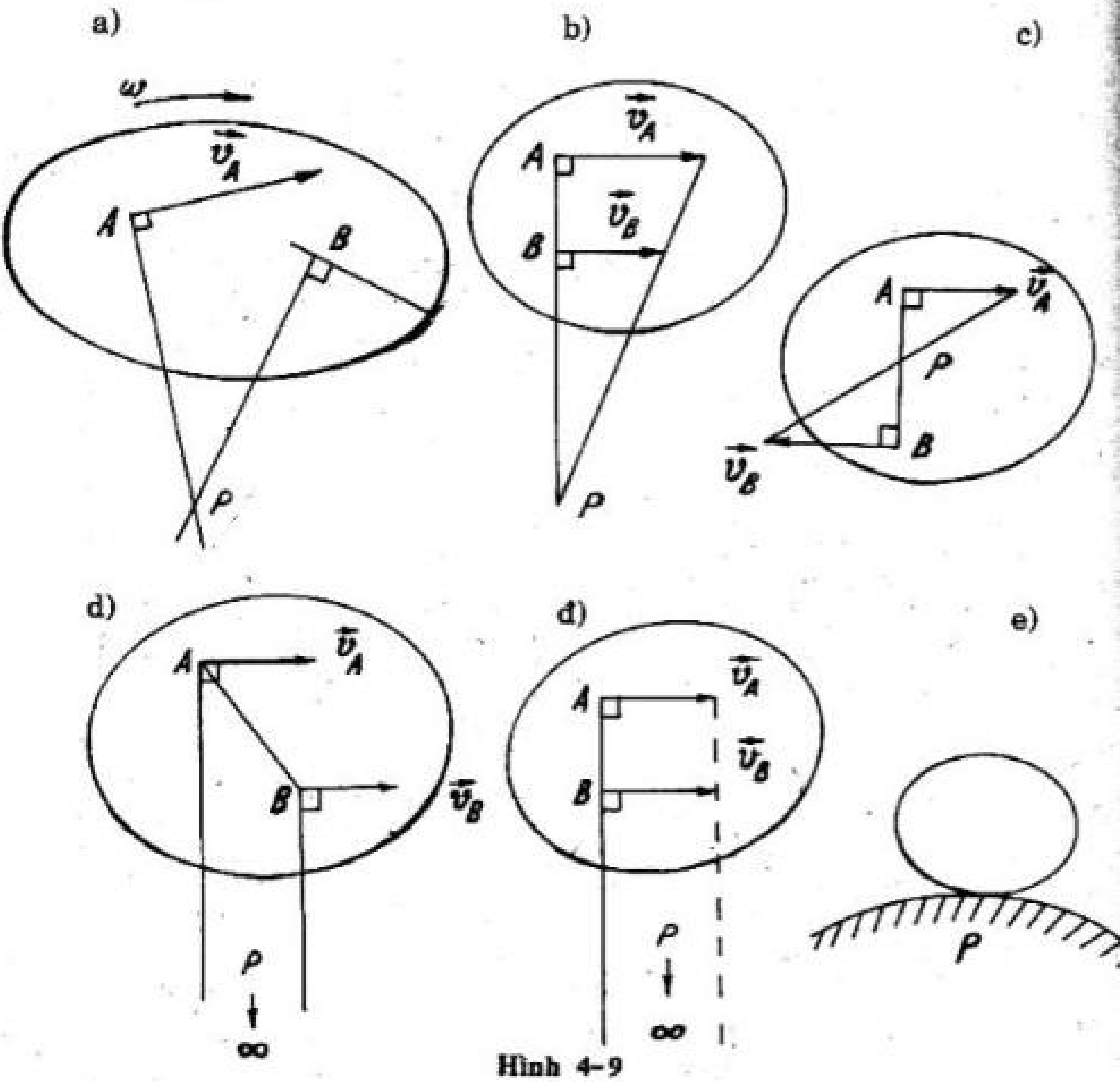
5. Quy tắc thực hành tìm tâm vận tốc tức thời

Dựa vào các kết quả ở trên ta đưa ra ở đây một số quy tắc thực hành tìm tâm vận tốc tức thời.

Trường hợp 1 : Biết vận tốc điểm A và phương vận tốc điểm B. Hai phương này không song song với nhau.

Dựa vào tính chất $\vec{v}_A \perp PA$, $\vec{v}_B \perp PB$, từ A và B ta kẻ tương ứng các đường vuông góc với $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$. Giao điểm của chúng là tâm vận tốc P (H.4 - 9a).

Trường hợp 2. Biết vận tốc hai điểm A và B, chúng có phương song song với nhau.



Hình 4-9

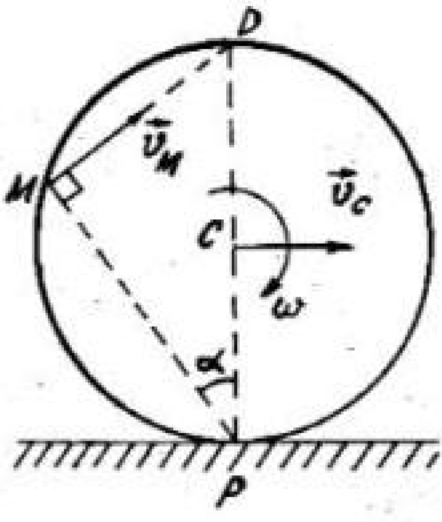
Dựa vào tính chất $\dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{PA}{PB}$

Ta thấy tâm vận tốc tức thời P chính là giao điểm của đường AB với đường nối các đầu mút các vectơ $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$, (H.4-9b và 4-9c). Trường hợp giao điểm ở vô cùng, tấm phẳng thực hiện chuyển động tịnh tiến tức thời (H.4-9d và 4-9đ).

Trường hợp 3. Biết một điểm của hình phẳng có vận tốc bằng không.

Khi chuyển động phẳng là chuyển động lăn không trượt của thiết diện phẳng S trên một đường cố định thì điểm tiếp xúc có vận tốc tức thời bằng không. (Vì các tiếp điểm của hai vật khi không trượt trên nhau phải có cùng một vận tốc, mà vật thứ hai cố định). Vì vậy điểm của vật tiếp xúc với mặt tựa chính là tâm P (H.4-9e).

Thí dụ 4 - 1. Tìm vận tốc của điểm M trên vành của bánh xe bán kính R lăn không trượt trên đường thẳng. Cho biết vận tốc tâm C của bánh xe là $\vec{v}$.



Hình 4-10

Bài giải

Vì bánh xe lăn không trượt trên đường thẳng, nên điểm tiếp xúc giữa bánh xe và mặt đường là tâm vận tốc tức thời P (H.4-10).

Vận tốc góc của bánh xe là :

$$\omega = \frac{v_c}{PC} = \frac{v_c}{R}$$

Vận tốc của điểm M :

$$v_M = \omega PM = \frac{v_c 2R\cos\alpha}{R} = 2v_c\cos\alpha$$

4.3.3. GIA TỐC CÁC ĐIỂM

1. Biểu thức giải tích xác định gia tốc của một điểm

Đạo hàm biểu thức vận tốc (4 - 6) hoặc (4 - 7) ta được :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_B \\ \ddot{y}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \end{bmatrix} = \left(\ddot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix} - \dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \zeta_B \\ \eta_B \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

Hay :

$$\ddot{x}_B = \ddot{x}_A - \ddot{\varphi}(\zeta_B \sin\varphi + \eta_B \cos\varphi) - \dot{\varphi}^2(\zeta_B \cos\varphi - \eta_B \sin\varphi) \quad (4-12)$$
$$\ddot{y}_B = \ddot{y}_A + \ddot{\varphi}(\zeta_B \cos\varphi - \eta_B \sin\varphi) - \dot{\varphi}^2(\zeta_B \sin\varphi + \eta_B \cos\varphi)$$

2. Quan hệ gia tốc giữa hai điểm

Định lí 4. *Gia tốc của điểm B tùy ý thuộc hình phẳng S chuyển động phẳng, bằng tổng hình học gia tốc của điểm cực A và gia tốc của điểm B trong chuyển động quay của hình phẳng S quanh A.*

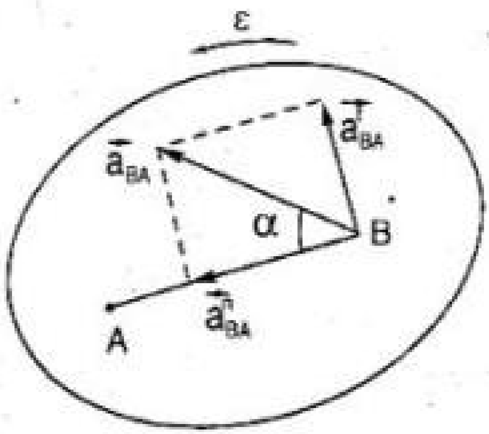
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}^t_{BA} + \vec{a}^n_{BA} \quad (4-13)$$

Chứng minh. Lập luận tương tự như khi chứng minh định lí 1 về quan hệ vận tốc giữa hai điểm của hình phẳng S, ta áp dụng định lí hợp gia tốc (công thức 3-8 chương 3) :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

$\vec{a}_c = 0$ vì hệ động Ax'y' chuyển động tịnh tiến.

Ở đây $\vec{a}_a = \vec{a}_B$, $\vec{a}_c = \vec{a}_{B^*} = \vec{a}_A$.



Hình 4-11

Còn a_r là gia tốc của điểm B trong chuyển động quay tương đối của hình phẳng S quanh A. Ta kí hiệu gia tốc này là $\vec{a}_{BA}$. Theo chương 2 thì :

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}^t_{BA} + \vec{a}^n_{BA}.$$

Vậy ta có :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}^t_{BA} + \vec{a}^n_{BA}$$

Định lí được chứng minh.

Chú ý 1. Từ các hệ thức (4 - 12) ta có thể nhận được hệ thức (4 - 13) bằng một vài biến đổi toán học không phức tạp.

Chú ý 2. Từ cách xác định các thành phần gia tốc tiếp, gia tốc pháp của một điểm thuộc vật rắn quay quanh một trục cố định, ta dễ dàng xác định các vectơ $\vec{a}^t_{BA}$, $\vec{a}^n_{BA}$ bằng hình học (H.4 - 11).

$$\vec{a}^t_{BA} \begin{cases} \text{Phương} \perp AB \\ \text{Chiều phù hợp chiều của } \bar{\varepsilon} \\ \text{Trị số } a^t_{BA} = \varepsilon . AB \end{cases}$$

$$\vec{a}^n_{BA} \begin{cases} \text{Hướng từ B đến A} \\ \text{Trị số } a^n_{BA} = \omega^2 AB. \end{cases}$$

Theo các công thức (2 - 15) của chương 2 ta có các biểu thức giải tích :

$$\vec{a}_{AB} = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{AB} \; ; \quad \vec{a}^n_{BA} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{BA}$$

3. Tâm gia tốc tức thời

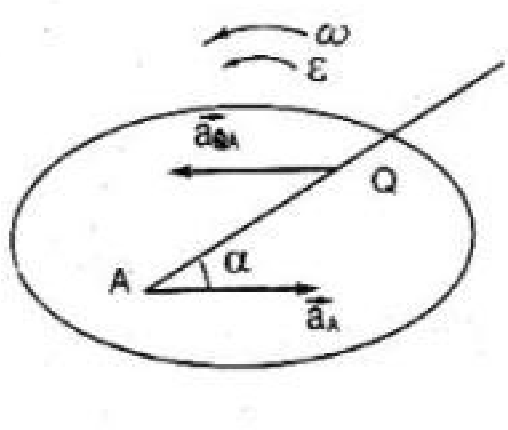
Định nghĩa : *Điểm Q trên hình phẳng S mà tại thời điểm khảo sát có gia tốc bằng không, gọi là tâm gia tốc tức thời.*

Định lí 5. *Ở mỗi thời điểm nếu ω và ε không đồng thời triệt tiêu, có một điểm duy nhất thuộc hình phẳng S có gia tốc bằng không.*

Chứng minh. Sự tồn tại của tâm Q. Giả sử biết $\vec{a}_A$, $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$..

Quay vectơ $\vec{a}_A$ quanh A theo chiều $\bar{\varepsilon}$ đi một góc α.

$$\mathrm{tg}\alpha = \varepsilon / \omega^2$$



Hình 4-12

ta được nửa đường thẳng AB (H.4-12). Trên AB lấy một điểm Q sao cho :

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}$$

Như thế $\vec{a}_{QA} = -\vec{a}_A$. Vậy ta có :

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA} = \vec{0}$$

Ta chứng minh sự duy nhất của tâm Q bằng phương pháp phản chứng. Giả sử có hai điểm Q_1 và Q_2 mà tại thời điểm khảo sát :

$$\vec{a}_{Q_1} = \vec{a}_{Q_2} = \vec{0}.$$

Khi đó hệ thức :

$$a_{Q_2} = a_{Q_1} + a_{Q_1Q_2}$$

là điều vô lí, vì : $a_{Q_1Q_2} \neq 0$. Vậy $Q_1 = Q_2$

Chú ý :

– Khi ω và ε không đồng thời triệt tiêu thì Q là một điểm giới nội;

– Khi ω và ε đồng thời triệt tiêu thì $Q \to \infty$;

– Nói chung, tâm vận tốc tức thời P và tâm gia tốc tức thời Q của hình phẳng S không trùng nhau.

Thí dụ 4 - 2. Tại một thời điểm nào đó, tâm O của bánh xe lăn không trượt trên đường ray thẳng có vận tốc $v_o = 1$m/s và gia tốc $a_o = 1,5$m/ s^2, (H.4-13). Bán kính bánh xe R = 0,5m. Hãy xác định tâm gia tốc tức thời Q tại thời điểm đó.

Bài giải

Do P là tâm vận tốc tức thời, ta có :

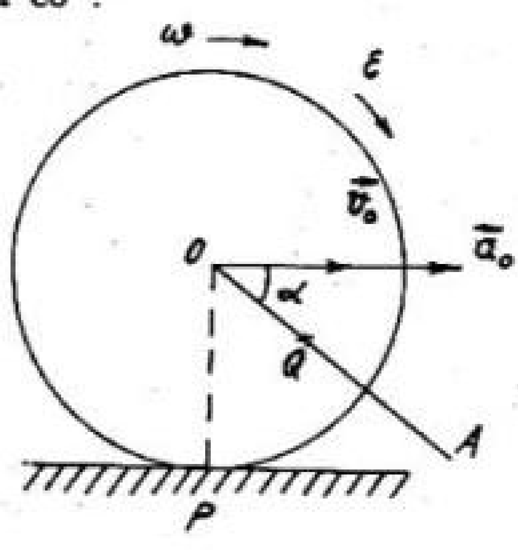
$$\omega = \frac{v_o}{R} = 2/s$$

Gia tốc góc của bánh xe :

$$\varepsilon = \frac{a_o}{R} = 3/s^2$$

Chiều của ω và ε cho trên hình 4 - 13.

Quay vectơ $\vec{a}_o$ theo chiều của $\bar{\varepsilon}$ đi một góc α :



Hình 4-13

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{3}{4} = 0,75\ (\alpha \approx 37^o)$$

ta được nửa đường thẳng OA. Trên đó lấy một điểm Q mà

$$OQ = \frac{a_o}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = 0,4 \text{ m}$$

Điểm Q đó là tâm gia tốc tức thời.

Chú ý : Khi $a_o = 0$ thì $\varepsilon = 0$ và do đó $\alpha = 0^o$; $OQ = 0$. Như vậy khi vận tốc tâm O của bánh xe luôn không đổi thì điểm O đó là gia tốc tức thời.

4.4. TỔNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG TỪ CÁC CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN

Ở các phần trên chúng ta đã chứng minh rằng chuyển động phẳng của vật rắn luôn có thể phân tích thành hai chuyển động cơ bản là chuyển động quay quanh một trục cố định và chuyển động tịnh tiến. Ngược lại, từ hai chuyển động cơ bản đó, ta có thể tổng hợp thành chuyển động song phẳng hay không?

Trước khi xét bài toán trên, chúng ta đưa ra các khái niệm chuyển động tương đối, chuyển động tuyệt đối và chuyển động theo vật rắn. Chuyển động của vật rắn đối với hệ quy chiếu động được gọi là chuyển động tương đối, chuyển động của vật rắn đối với hệ quy chiếu cố định là chuyển động tuyệt đối. Chuyển động của hệ quy chiếu động đối với hệ quy chiếu cố định là chuyển động theo.

Dưới đây ta sẽ xét một số bài toán tổng hợp chuyển động song phẳng hay gặp trong kĩ thuật.

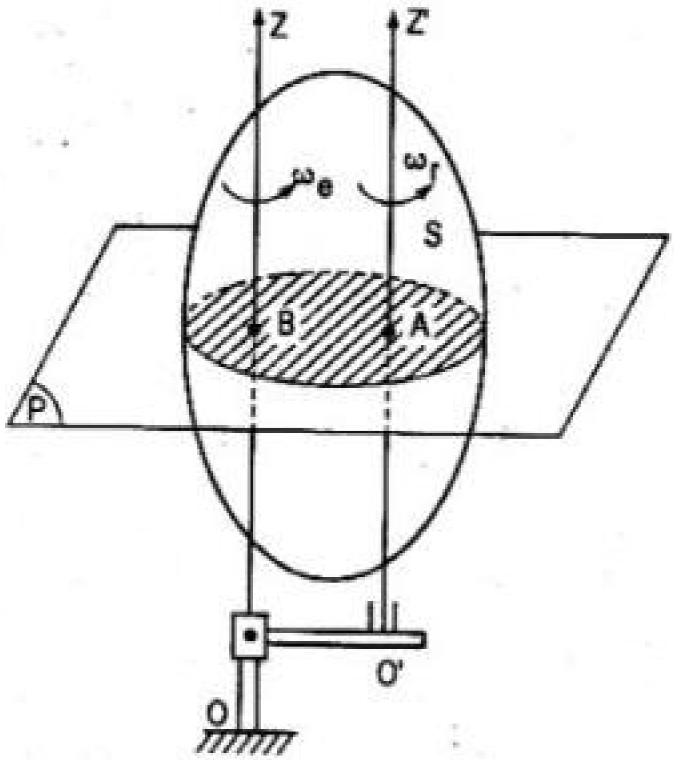
4.4.1. TỔNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG QUAY QUANH HAI TRỤC SONG SONG

Giả sử vật rắn quay với vận tốc góc $\overline{\omega}_r$ quanh trục O'z' đối với hệ tọa độ động O'x'y'z'. Hệ tọa độ động O'x'y'z' lại quay với vận tốc góc $\overline{\omega}_e$ quanh trục Oz đối với hệ tọa độ cố định Oxyz. Hai trục Oz và O'z' song song với nhau. Xét chuyển động của vật rắn đối với hệ tọa độ cố định Oxyz, ta có định lí :

Định lí 6. *Tổng hợp hai chuyển động quay quanh hai trục song song của vật rắn, ta được chuyển động tuyệt đối là chuyển động song phẳng có mặt phẳng quy chiếu vuông góc với trục quay. Vận tốc góc tuyệt đối bằng tổng đại số vận tốc góc tương đối và vận tốc góc theo :*

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r$$

Trường hợp đặc biệt khi hai chuyển động quay cùng tốc độ nhưng ngược chiều nhau thì chuyển động tuyệt đối là chuyển động tịnh tiến.



Hình 4-14

Chứng minh. Xét một thiết diện S của vật rắn mà vuông góc với trục Oz (H. 4 - 14). Đối với hệ quy chiếu cố định, khi vật rắn chuyển động, thiết diện S chỉ chuyển động trong mặt phẳng P chứa nó. Vậy chuyển động tuyệt đối của vật rắn là chuyển động song phẳng mà mặt phẳng quy chiếu vuông góc với trục quay. Vì vậy ta chỉ cần xét chuyển động của thiết diện phẳng S trong mặt phẳng P.

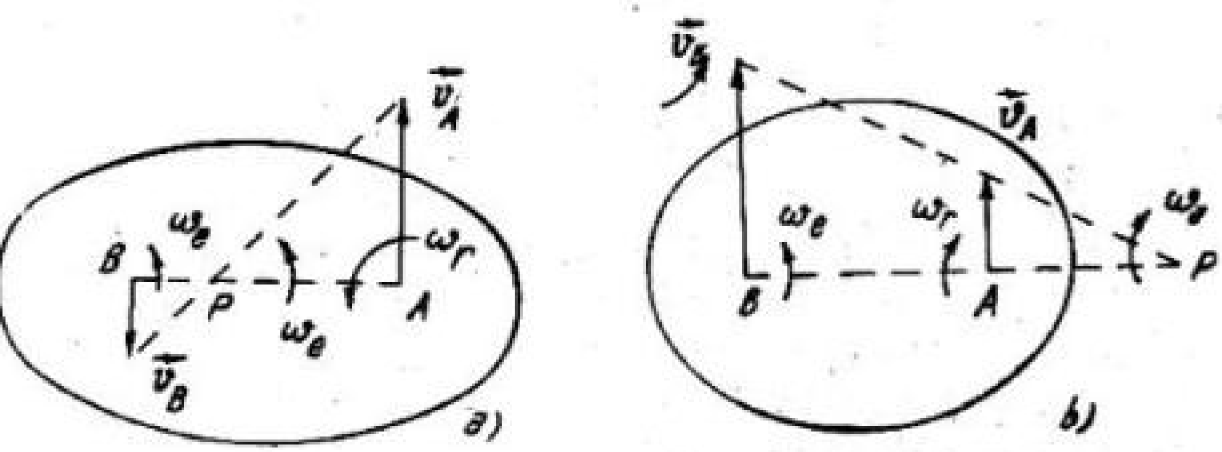
Gọi giao điểm của các trục O'z' và Oz với thiết diện phẳng S là A và B. Ta xét ba trường hợp có thể xảy ra :

a) $\bar{\omega}_r$ và $\bar{\omega}_e$ cùng chiều quay (H. 4 - 15a). Ta có :

$$v_A = AB.\omega_e \; ; \; v_B = AB.\omega_r.$$

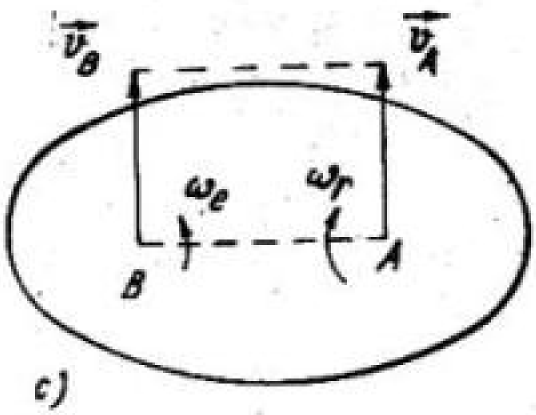
Dễ dàng xác định được tâm vận tốc tức thời của hình phẳng là P. Từ hình vẽ 4 - 15a ta có :

$$\frac{PA}{PB} = \frac{v_A}{v_B} = \frac{AB.\omega_e}{AB.\omega_r}$$



Do đó : $\omega_r = \dfrac{PB}{PA}\omega_e$

Gọi ω_a là vận tốc góc tuyệt đối của hình phẳng S. Ta có :



Hình 4-15

$$\omega_a = \frac{v_A}{PA} = \frac{BA}{PA}\omega_e = \frac{PA+PB}{PA}\omega_e$$

$$= \omega_e + \frac{PB}{PA}\omega_e = \omega_e + \omega_r$$

Vậy, trong trường hợp này, ta nhận được hệ thức : $\omega_a = \omega_e + \omega_r$

b) $\overline{\omega}_r$ và $\overline{\omega}_e$ ngược chiều quay và có trị số khác nhau (H. 4-15b). Không giảm tổng quát, giả sử $\omega_r > \omega_e$. Khi đó do BA = PB − PA, nên tính toán tương tự như trên ta sẽ có :

$$\omega_a = \omega_r - \omega_e$$

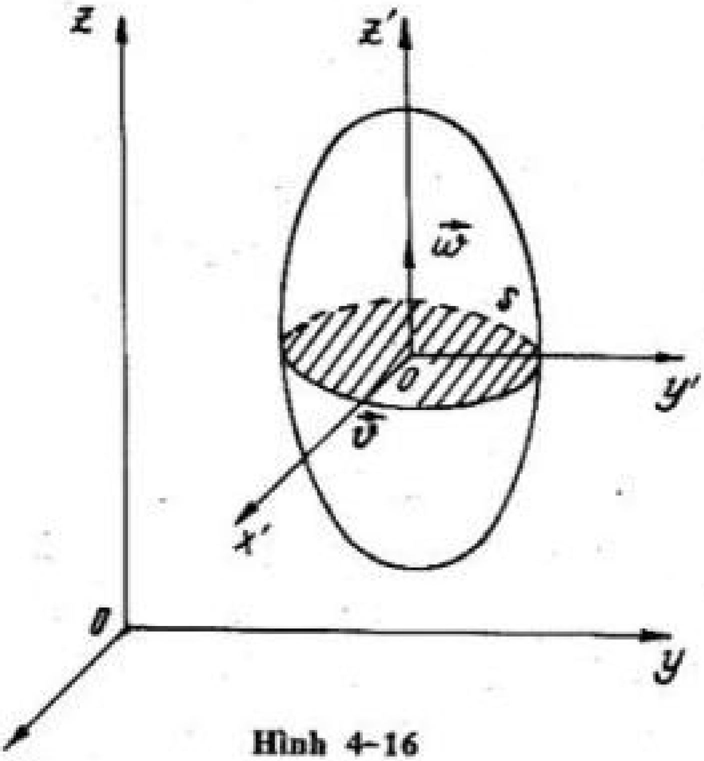
Kết hợp hai trường hợp a) và b) ta được : $\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r$

c) $\overline{\omega}_r = -\overline{\omega}_e$ (H.4 − 15c). Trong trường hợp này $\vec{v}_B = \vec{v}_A$. Do đó chuyển động tuyệt đối của vật rắn là chuyển động tịnh tiến.

4.4.2. TỔNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN VÀ CHUYỂN ĐỘNG QUAY KHI $\vec{v} \perp \vec{\omega}$

Gọi $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của chuyển động quay (tương đối hoặc theo) quanh một trục cố định, $\vec{v}$ là vận tốc của chuyển động tịnh tiến (theo hoặc tương đối). Giả thiết $\vec{v} \perp \vec{\omega}$. Ta có định lí :

Định lí 7 : *Tổng hợp chuyển động quay quanh một trục với vận tốc góc $\vec{\omega}$ và chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}$ của vật rắn mà $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ ta được chuyển động tuyệt đối là chuyển động song phẳng có mặt phẳng quy chiếu vuông góc với trục quay.*



Hình 4-16

Chứng minh

Giả sử vật rắn quay với vận tốc góc $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}$ quanh trục O'z' đối với hệ tọa độ động O'x'y'z'. Hệ tọa độ động O'x'y'z' lại chuyển động tịnh tiến đối với hệ tọa độ cố định Oxyz với vận tốc $\vec{v} \perp \vec{\omega}$.

Xét một thiết diện phẳng S của vật rắn và vuông góc với O'z'. Khi vật rắn chuyển động, đối với hệ quy chiếu cố định, thiết diện phẳng S chỉ chuyển động trong mặt phẳng P của nó. Vậy chuyển động tuyệt đối của vật rắn là chuyển động song phẳng mà mặt phẳng quy chiếu vuông góc với trục quay. Lấy o' làm cực, ta có : $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}$; $\vec{v}_{O'} = \vec{v}$.

Đối với trường hợp chuyển động tương đối là tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}$ còn chuyển động theo là chuyển động quay quanh một trục với vận tốc góc $\vec{\omega} \perp \vec{v}$, ta chứng minh hoàn toàn tương tự.

4.5. CÁC THÍ DỤ ÁP DỤNG

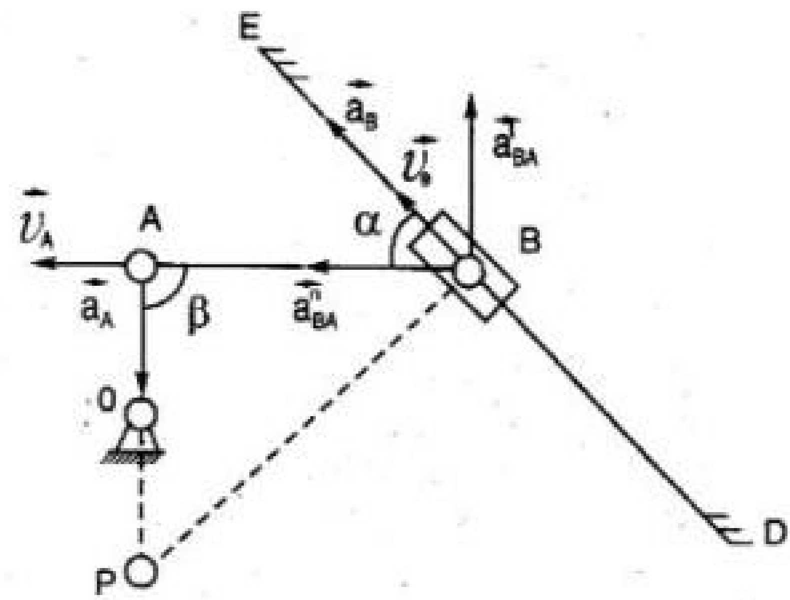
Trong các bài toán áp dụng, ta thường phải tính toán động học hệ các vật rắn chuyển động phẳng. Các phương pháp giải các bài toán động học vật rắn và hệ vật rắn chuyển động có thể phân thành bốn loại : phương pháp đồ thị, phương pháp đồ thị – tính toán, phương pháp giải tích, phương pháp số trên máy tính điện tử.

Các phương pháp đồ thị và đồ thị – tính toán dựa trên quan hệ vận tốc, quan hệ gia tốc giữa hai điểm bất kì của hình phẳng, hoặc dựa trên việc xác định tâm vận tốc và tâm gia tốc tức thời. Các phương pháp giải tích và phương pháp số dựa trên các biểu thức giải tích xác định phương trình chuyển động, vận tốc, gia tốc của một điểm bất kì thuộc hình phẳng. Dưới đây nêu ra một số thí dụ áp dụng ba phương pháp sau.

Thí dụ 4 – 3. Cần lắc OA dài 40 cm có thể quay quanh trục O và làm cho thanh truyền AB dài 80cm chuyển động. Con trượt B trượt dọc theo hướng ED nghiêng với phương nằm ngang một góc $\alpha = 45^o$. Tại thời điểm khảo sát $\beta = 90^o$, $\omega_{OA} = 2s^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 0$, hãy xác định : vận tốc góc, gia tốc góc thanh AB, vận tốc và gia tốc con trượt B.

Bài giải

Phân tích : Hệ khảo sát là cơ cấu OAB ở vị trí như hình 4 – 17, trong đó : OA chuyển động quay quanh O, AB chuyển động phẳng, con trượt B chuyển động tịnh tiến dọc theo DE.



Hình 4-17

Bài toán vận tốc : Trước hết tìm tâm vận tốc tức thời thanh truyền AB. Tâm này nằm trên giao của hai đường thẳng vuông góc vận tốc các điểm A và B (H. 4 – 17). Tam giác ABP là tam giác vuông cân nên : AB = AP = 80cm, BP = $80\sqrt{2}$ cm.

Vận tốc góc thanh AB được xác định bởi biểu thức :

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_{OA} \cdot OA}{AP} = 1s^{-1}$$

Vận tốc con trượt B : $v_B = \omega_{AB}.BP = 80\sqrt{2}$ cm/ s

Bài toán gia tốc : Sử dụng công thức :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^t_{BA} + \vec{a}^n_{BA} \qquad (a)$$

trong đó : $\vec{a}_A$ hướng từ A về O và có trị số $a_A = \omega^2_{OA}OA =$ $= 160$cm/s, $\vec{a}^n_{BA}$ hướng từ B về A và có trị số : $a^n_{BA} =$ $= \omega^2_{AB}.AB = 80$ cm/s ; $\vec{a}^t_{BA}$ hướng vuông góc với AB, $\vec{a}_B$ hướng dọc theo DE. Hai véctơ này chưa biết về trị số và chiều. Chiếu phương trình (a) lên BA và lên phương vuông góc với BA ta được :

$$a_B\cos45^o = a^n_{BA} \,;\; a_B\cos45^o = -a_A + a^t_{BA}$$

Từ đó suy ra : $a_B = 80\sqrt{2}$ cm/s^2; $a^t_{BA} = 240$ cm/s^2.

Gia tốc góc thanh AB : $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a^t_{BA}}{AB} = 3s^{-2}$

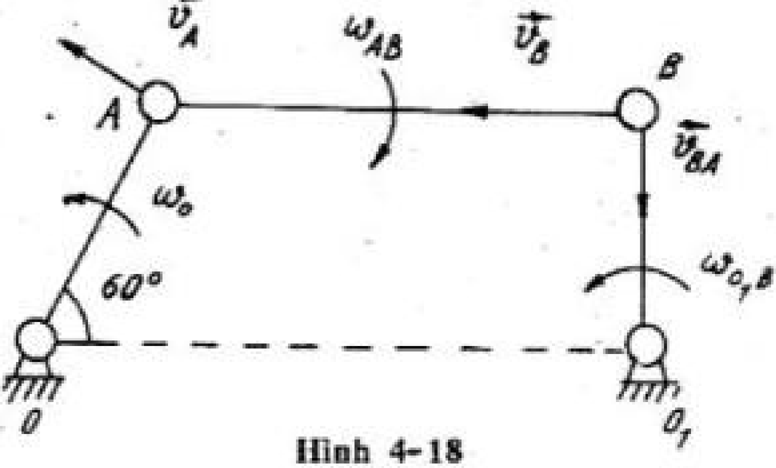
Thí dụ 4 – 4 : Tay quay OA = 0,2m quay đều với vận tốc góc $\omega_o = 20\pi$1/s. Thanh truyền AB = 0,4m. Tại thời điểm cơ cấu có vị trí như hình 4–18, tìm :

– Vận tốc điểm B, vận tốc góc thanh AB và cần lắc O_1B.

– Gia tốc điểm B, gia tốc góc thanh AB và cần lắc O_1B.

Bài giải

Phân tích : Chọn hệ khảo sát là cơ cấu bốn khâu $OABO_1$ ở vị trí như hình 4–18. Hệ gồm ba vật rắn. Tay quay OA chuyển động quay quanh O. Cần lắc O_1B chuyển động quay quanh



Hình 4-18

O_1. Thanh truyền AB chuyển động phẳng. Sử dụng phương pháp đồ thị – tính toán giải bài toán này.

Bài toán vận tốc : Sử dụng công thức :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \qquad (a)$$

trong đó : $\vec{v}_A$ vuông góc với OA và có trị số $v_A = OA\omega_o = 4\pi$ m/s. $\vec{v}_{BA}$ vuông góc với AB, chưa biết trị số và hướng ; $\vec{v}_B$ vuông góc với O_1B và chưa biết trị số và hướng. Chiếu phương trình (a) lên phương BA ta được :

$$v_B = v_A \cos 30^o = 4\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,\pi \text{ m/s}$$

Từ đó ta có : $\omega_{O_1B} = \dfrac{v_B}{O_1B} = \dfrac{v_B}{OA\sin 60^o} = 20\pi$ 1/ s

Chiếu đẳng thức (a) lên phương O_1B :

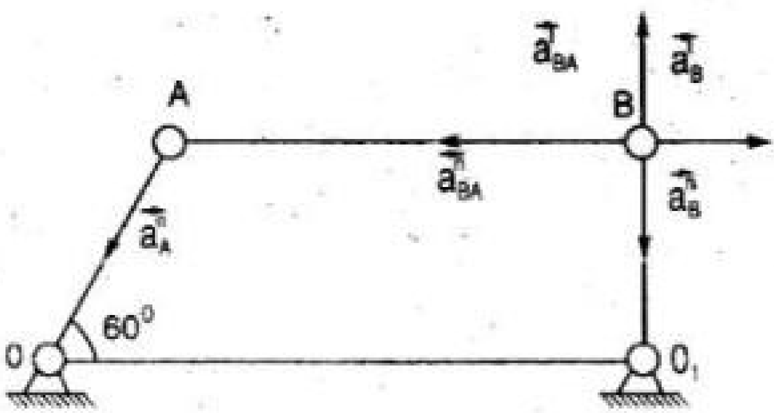
$$v_A \sin 30^o - v_{BA} = O \Rightarrow v_{BA} = 4\pi.\frac{1}{2} = 2\pi \text{ m/s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi \text{ 1/s}$$

Bài toán gia tốc : Áp dụng công thức (H. 4–19) :

$$\vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n \qquad (b)$$

Do tay quay OA quay đều nên $\vec{a}_A^t = 0$, $\vec{a}_A^n$ hướng từ A về O và có trị số $a_A^n = OA\omega_o^2 = 80\pi^2$ m/s^2.



Hình 4–19

$\vec{a}_B^n$ hướng từ B đến O_1 và có trị số :

$$a_B^n = O_1B\omega_{O_1B}^2 = 0{,}1\sqrt{3}\,.\,400\pi^2 = 40\sqrt{3}\pi^2 \text{ m/s}^2.$$

$\vec{a}_B^t$ vuông góc với O_1B, chưa biết trị số và hướng. $\vec{a}_{BA}^n$ hướng từ B về A và có trị số $a_{BA}^n = AB\omega_{AB}^2 = 10\pi^2$ m/s^2. $\vec{a}_{BA}^t$ vuông góc với O_1B, chưa biết trị số và hướng.

Chiếu đẳng thức (b) lên phương AB ta được :

$$a_B^t = -a_A^n\cos60^o - a_{BA}^n = -40\pi^2 - 10\pi^2 = -50\pi^2$$

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^t\right)^2} = 10\pi^2\sqrt{73}$$

Dấu trừ chứng tỏ $\vec{a}_B^t$ phải có hướng ngược lại như trên hình vẽ. Do $a_B^t = \varepsilon_{O_1B}.O_1B$, ta suy ra :

$$\varepsilon_{O_1B} = \frac{a_B^t}{O_1B} = \frac{50\pi^2}{0{,}1\sqrt{3}} = \frac{500\sqrt{3}}{3}\pi^2 \text{ 1/s}^2$$

Chiếu đẳng thức (b) lên phương O_1B :

$$-a_B^n = -a_A^n\sin60^o + a_{BA}^t \Rightarrow a_{BA}^t = a_A^n\sin60^o - a_B^n =$$
$$= 40\sqrt{3}\pi^2 - 40\sqrt{3}\pi^2 = 0$$

Vậy $\qquad \varepsilon_{AB} = 0$

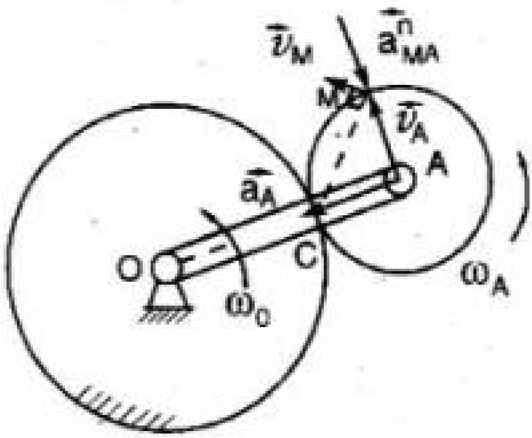
Thí dụ 4 – 5. Khảo sát động học cơ cấu hành tinh như hình 4 – 20. Bánh xe O cố định, bán kính R = 20cm. Tay quay OA = 30cm quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω_o = 10 rad/s. Bánh xe A bán kính r = 10cm, có trục lắp vào đầu A của tay quay và ăn khớp răng với bánh xe cố định O. Tìm :

– Vận tốc góc bánh xe A, vận tốc điểm M ở đầu bán kính thẳng góc với tay quay.

– Gia tốc góc bánh xe A, gia tốc điểm M.

Bài giải

Phân tích : Chọn hệ khảo sát là cơ cấu hành tinh như hình 4 – 20. Do bánh xe O cố định, nên hệ chỉ có hai vật rắn chuyển động. Tay quay OA chuyển động quay quanh O. Bánh xe A chuyển động phẳng, lăn không trượt trên bánh xe O.



Hình 4–20

Bài toán vận tốc : Vì A là một điểm của tay quay OA nên vận tốc $\vec{v}_A$ vuông góc với OA và hướng thuận theo chiều quay của OA. Trị số của nó $v_A = = \widehat{OA}.\omega_o = 30 \times 10 =$ $= 300$ cm/s.

Do bánh xe A lăn không trượt trên bánh xe O, nên điểm ăn khớp C là tâm vận tốc tức thời. Do :

$$v_A = CA.\omega_A \text{ nên } \omega_A = \frac{v_A}{CA} = \frac{300}{10} = 30\text{rad/s}$$

Chiều quay của ω_A được chỉ trên hình 4–20.

Vận tốc điểm M vuông góc với CM và hướng theo chiều quay của ω_A. Trị số của nó $v_M = CM.\omega_A = CA\sqrt{2}.\omega_A = 300\sqrt{2}$cm/s.

Bài toán gia tốc : Chú ý rằng ở các cơ cấu hành tinh quan hệ $\omega_A = \dfrac{v_A}{CA}$ luôn đúng ở mọi vị trí, mọi thời điểm. Do đó ta suy ra :

$$\varepsilon_A = \frac{d\omega_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_A}{CA}\right) = 0$$

Vì v_A luôn là hằng số khi ω_o = const.

Chọn A làm cực, gia tốc điểm M được xác định bởi hệ thức

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA} \qquad (a)$$

Do tay quay OA quay đều quanh O nên $\vec{a}_A^{\tau} = 0$; $\vec{a}_A^n$ hướng từ A về O và có trị số $a_A^n = OA.\omega_o^2 = 3000$ cm/s^2.

Thành phần gia tốc $\vec{a}_{MA}^n$ hướng từ M về A và có trị số $a_{MA}^n = MA.\omega_A^2 = 9000$ cm/s^2. Thành phần $a_{MA}^{\tau} = 0$ do $\varepsilon_A = 0$. Vậy :

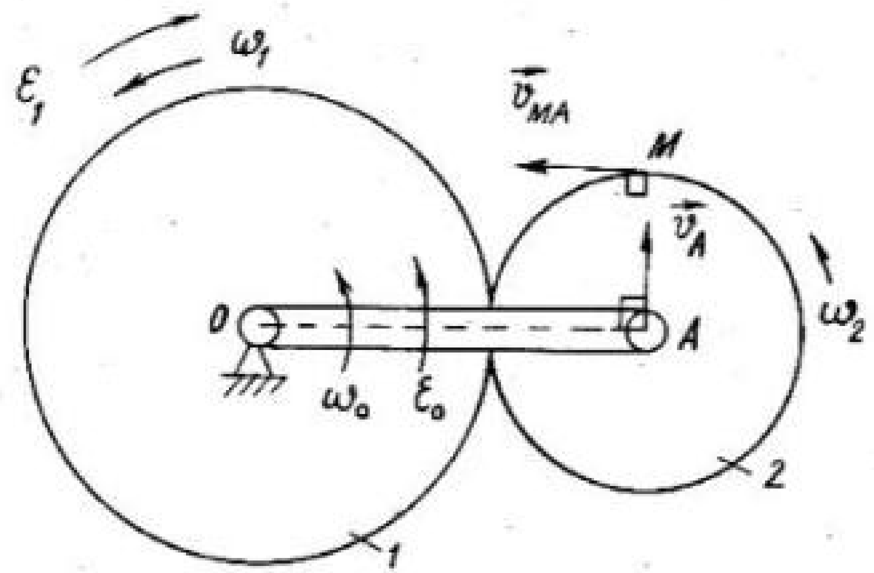
$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^n \qquad (b)$$

Chiếu đẳng thức (b) lên hai trục tọa độ vuông góc nhau. Cuối cùng ta có :

$$a_M^2 = (a_A^n)^2 + (a_{MA}^n)^2 = 3000^2 + 9000^2$$

Vậy : $a_M = 3000\sqrt{10}$ cm/s^2

Thí dụ 4 - 6. Khảo sát động học cơ cấu vi sai cho trên hình 4–21. Bánh răng 1 quay quanh O với vận tốc góc ω_1,



Hình 4–21

gia tốc góc ε_1. Tay quay OA quay quanh O độc lập với bánh răng 1 với vận tốc góc ω_o, gia tốc góc ε_o. Hai bánh răng 1 và 2 lăn không trượt trên nhau và có các bán kính tương ứng là r_1 và r_2. Bánh răng 2 quay được quanh chốt A ở trên tay quay. Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của bánh xe 2. Tìm vận tốc, gia tốc của điểm M ở trên vành bánh xe 2 mà $MA \perp OA$ (H.4–21).

Bài giải

Phân tích : Cơ cấu vi sai trên hình 4 – 21 là cơ cấu phẳng có ba khâu chuyển động. Bánh răng 1 chuyển động quay quanh một trục cố định. Tay quay OA chuyển động quay quanh O. Bánh răng 2 chuyển động phẳng. Sự truyền động từ bánh răng 1 và tay quay OA sang bánh răng 2 thực hiện nhờ sự ăn khớp giữa các bánh răng 1 và 2. Chú ý rằng cơ cấu vi sai trên hình 4 – 21, là cơ cấu hai bậc tự do. Để xác định chuyển động của nó phải cho biết trước vận tốc góc của hai khâu.

Bài toán vận tốc : Ta giải bài toán trên bằng phương pháp Vilit. Ta chọn tay quay OA làm hệ quy chiếu động. Đứng trong hệ quy chiếu này, cặp bánh răng 1 và 2 là một cặp bánh răng ăn khớp ngoài, quay quanh các trục O và A với các vận tốc góc tương đối $\overline{\omega}_{1r}$ và $\overline{\omega}_{2r}$. Theo định lí về tổng hợp hai chuyển động quay quanh hai trục song song, ta có :

$$\overline{\omega}_{1r} = \overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_o \; ; \overline{\omega}_{2r} = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_o$$

Tỉ số truyền động giữa hai bánh răng :

$$\frac{\overline{\omega}_{1r}}{\overline{\omega}_{2r}} = \frac{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_o}{\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_o} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1} \qquad \text{(a)}$$

trong đó : z_1, z_2 là số răng của các bánh răng 1 và 2.

Công thức (a) gọi là công thức Vilit. Phương pháp xác định vận tốc góc của vật rắn chuyển động phẳng nhờ công thức (a) gọi là phương pháp Vilit.

Từ (a) suy ra :

$$\overline{\omega}_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\overline{\omega}_o - \frac{r_1}{r_2}\,\overline{\omega}_1 \qquad \text{(b)}$$

Vận tốc điểm M được tính theo công thức $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$. Trong đó $\vec{v}_A$ vuông góc với OA, hướng theo chiều của ω_o (H. 4–21) và có trị số $v_A = OA.\omega_o = (r_1 + r_2)\omega_o$; $\overrightarrow{v_{MA}}$ vuông góc với AM, hướng theo chiều của ω_2. Trị số của nó $v_{MA} = AM.\ \omega_2 = r_2\ \omega_2$. Giá trị của $\overrightarrow{v_M}$ là :

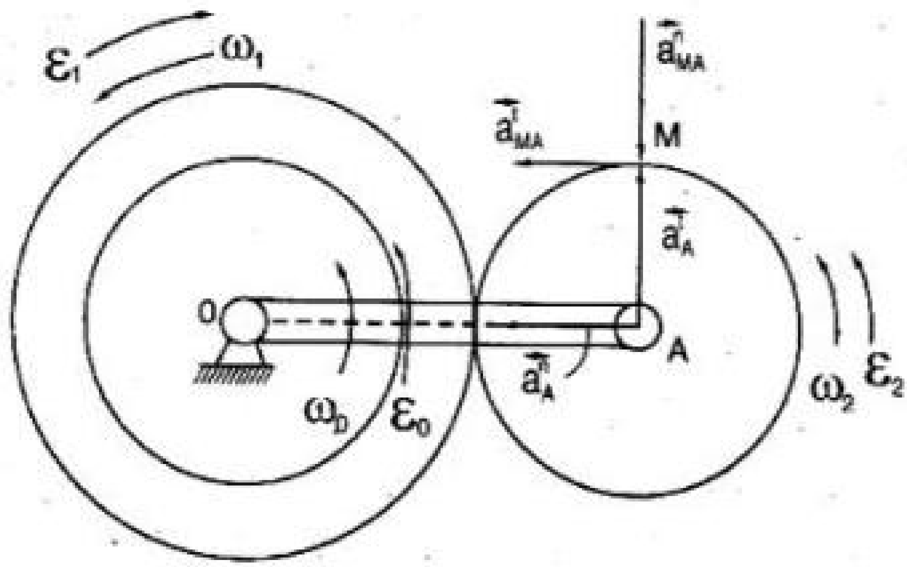
$$v_M = \sqrt{v_A^2 + v_{MA}^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2\omega_o^2 + r_2^2\omega_2^2}$$

Bài toán gia tốc : Do tính đối xứng của cơ cấu, hệ thức (b) luôn luôn đúng tại mọi vị trí của cơ cấu. Đạo hàm hệ thức đó ta được :

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\bar{\varepsilon}_o - \frac{r_1}{r_2}\bar{\varepsilon}_1 \qquad \text{(c)}$$

Lấy A làm cực, gia tốc điểm M được xác định theo công thức :

$$\overrightarrow{a_M} = \overrightarrow{a_A^t} + \overrightarrow{a_A^n} + \overrightarrow{a_{MA}^t} + \overrightarrow{a_{MA}^n} \qquad \text{(d)}$$



Hình 4-22

trong đó :

$a_A^t = OA\ .\ \varepsilon_o = (r_1 + r_2)\ \varepsilon_o$; $a_A^n\ = OA\omega_o^2 = (r_1 + r_2)\omega_o^2$

$a_{MA}^t = AM\ .\ \varepsilon_2 = r_2\ \varepsilon_2$; $a_{MA}^n = AM.\omega_2^2 = r_2\omega_2^2$

Phương và chiều của bốn véctơ này được vẽ trên hình 4-22. Chiếu phương trình véctơ (d) lên các trục của hệ tọa độ vuông góc :

$$a_{Mx} = -\ a_A^n - a_{MA}^t\ ;\ a_{My} = a_A^t - a_{MA}^n$$

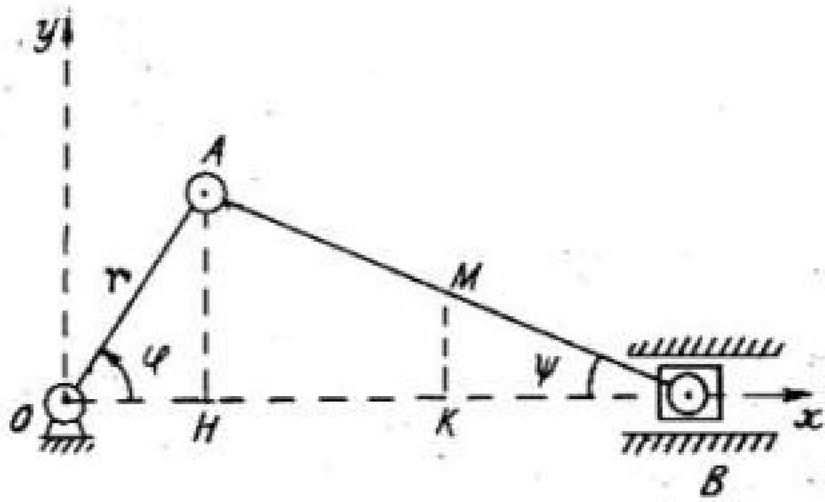
Cuối cùng ta tính được :

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2}$$

Thí dụ 4-7. Cho cơ cấu tay quay – con trượt OAB (H.4-23). Cho biết chiều dài OA là r, chiều dài AB là l. Giả sử chiều dài AB khá lớn so với chiều dài OA sao cho tỉ số $\lambda = \frac{r}{l}$ khá nhỏ. Thiết lập phương trình chuyển động, biểu thức xác định vận tốc, gia tốc của con trượt B và trung điểm M của thanh AB.

Bài giải

Phân tích : Chọn hệ khảo sát là cơ cấu tay quay – con trượt (H. 4- 23). Hệ gồm ba vật rắn. Tay quay OA chuyển động quay quanh O.



Hình 4-23

Thanh truyền AB chuyển động phẳng. Con trượt B chuyển động tịnh tiến.

Khảo sát chuyển động của con trượt B. Vị trí của điểm B được xác định bởi thông số định vị x_B. Theo hình 4-23 :

$$x_B = \overline{OH} + \overline{HB} = r\cos\varphi + l\cos\psi$$

Mặt khác từ hình vẽ ta có :

$$AH = r\sin\varphi = l\sin\psi. \text{ Do đó :}$$

$$\sin\psi = \lambda\sin\varphi \; ; \; \cos\psi = \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi}$$

Do giả thiết λ khá bé, nên ta có :

$$\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi} \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1 - \cos2\varphi}{2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) + \frac{\lambda^2}{4}\cos2\varphi$$

Vậy hoành độ điểm B :

$$x_B \approx r\cos\varphi + l\left[\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) + \frac{\lambda^2}{4}\cos2\varphi\right]$$

$$= l\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) + r\cos\varphi + \frac{r^2}{4l}\cos2\varphi \qquad (a)$$

Từ biểu thức trên, ta dễ dàng xác định biểu thức vận tốc và gia tốc con trượt B :

$$\dot{x}_B = -r\dot{\varphi}\left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin2\varphi\right)$$

$$\ddot{x}_B = -r\ddot{\varphi}\left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin2\varphi\right) - r\dot{\varphi}^2\left(\cos\varphi + \frac{r}{l}\cos2\varphi\right)$$

Khảo sát chuyển động của trung điểm M của AB. Từ hình 4 - 23 ta có :

$$x_M = OH + HK = OH + \frac{1}{2}HB = r\cos\varphi + \frac{l}{2}\cos\psi$$

$$\approx r\cos\varphi + \frac{r^2}{8l}\cos2\varphi + \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)$$

$$y_M = KM = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}r\sin\varphi$$

Vậy phương trình chuyển động của M là :

$$\left.\begin{aligned} x_M &= r\cos\varphi + \frac{r^2}{8l}\cos2\varphi + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \\ y_M &= \frac{1}{2}r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Từ (b) ta có biểu thức xác định vận tốc và gia tốc của điểm M :

$$\dot{x}_M = -r\dot{\varphi}\left(\sin\varphi + \frac{r}{4l}\sin2\varphi\right)$$

$$\dot{y}_M = \frac{r}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

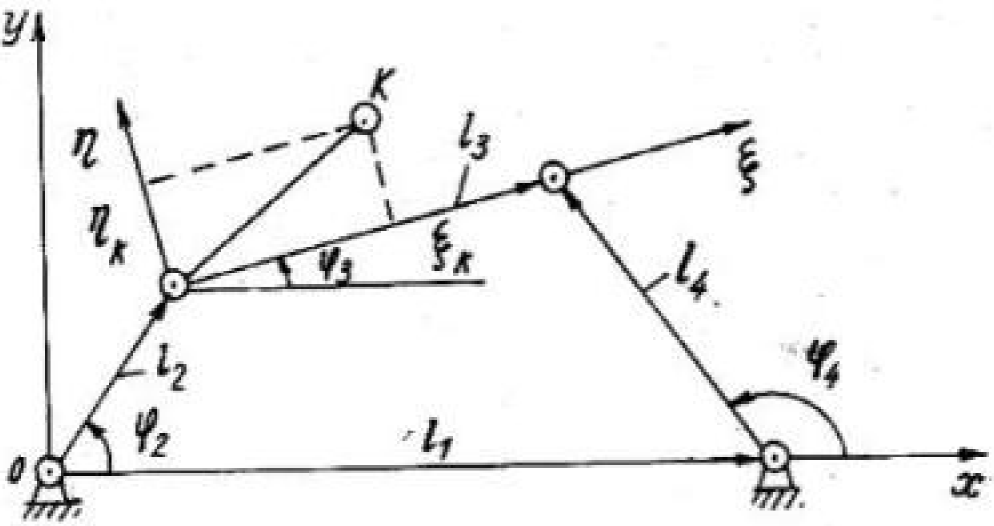
$$\ddot{x}_M = -r\ddot{\varphi}\left(\sin\varphi + \frac{r}{4l}\sin2\varphi\right) - r\dot{\varphi}^2\left(\cos\varphi + \frac{r}{2l}\cos2\varphi\right)$$

$$\ddot{y}_M = \frac{r}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{r}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

Thí dụ 4 – 8. Cho cơ cấu bốn khâu với các kí hiệu và kích thước như hình 4 – 24. Cho biết chiều dài các khâu l_1, l_2, l_3, l_4 tọa độ của điểm K (ξ_k η_k) trong hệ tọa độ gắn liền với khâu 3, góc quay của khâu dẫn φ_2 (t). Hãy xác định :

– Các góc φ_3, φ_4 và các vận tốc góc, gia tốc các khâu 3 và 4,

– Tọa độ của điểm K, vận tốc và gia tốc của điểm đó.



Hình 4-24

Bài giải

Phân tích. Ta khảo sát động học cơ cấu bốn khâu hình 4 – 24. Hệ gồm ba vật rắn động : khâu 2 và khâu 4 chuyển động quay quanh trục cố định, khâu 3 chuyển động phẳng.

Xác định vận tốc góc, gia tốc góc các khâu 3 và 4 : Trước hết, ta tìm các điều kiện ràng buộc của cơ cấu. Từ hình 4–24, ta có :

$$\vec{l_2} + \vec{l_3} - \vec{l_1} - \vec{l_4} = \vec{0} \tag{a}$$

Chiếu phương trình véctơ (a) lên các trục x và y :

$$l_3\cos\varphi_3 - l_4\cos\varphi_4 = -l_2\cos\varphi_2 + l_1 \tag{b}$$

$$l_3\sin\varphi_3 - l_4\sin\varphi_4 = -l_2\sin\varphi_2$$

Đạo hàm các phương trình (b) theo φ_2 ta có :

$$-l_3\sin\varphi_3 \cdot \varphi'_3 + l_4\sin\varphi_4 \cdot \varphi'_4 = l_2 \sin\varphi_2$$
$$l_3\cos\varphi_3 \cdot \varphi'_3 - l_4 \cos\varphi_4 \cdot \varphi'_4 = -l_2 \cos\varphi_2 \qquad (c)$$

Hệ hai phương trình đại số tuyến tính đối với φ'_3, φ'_4 này có nghiệm :

$$\varphi'_3 = \frac{l_2\sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{l_3\sin(\varphi_4 - \varphi_3)} \ ; \ \varphi'_4 = \frac{l_2\sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_4\sin(\varphi_4 - \varphi_3)} \qquad (d)$$

Từ đó ta tính được :

$$\dot\varphi_3 = \varphi'_3 \cdot \dot\varphi_2 \ ; \ \dot\varphi_4 = \varphi'_4 \cdot \dot\varphi_2 \qquad (đ)$$

Để tìm các đạo hàm bậc hai $\ddot\varphi_3$, $\ddot\varphi_4$, ta đạo hàm các phương trình (c) theo φ_2 :

$$-l_3\sin\varphi_3 \cdot \varphi''_3 + l_4 \sin\varphi_4 \cdot \varphi''_4 =$$
$$= l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 \cdot \varphi'^2_3 - l_4\cos\varphi_4 \cdot \varphi'^2_4$$
$$l_3\cos\varphi_3 \cdot \varphi''_3 - l_4\cos\varphi_4 \cdot \varphi''_4 =$$
$$= l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 \cdot \varphi'^2_3 - l_4\sin\varphi_4 \cdot \varphi'^2_4 \qquad (e)$$

Hệ (e) là hệ hai phương trình bậc nhất của hai ẩn φ''_3 và φ''_4. Ta dễ dàng tính được φ''_3 , φ''_4.

Sau đó tính $\ddot\varphi_3$ và $\ddot\varphi_4$ theo công thức :

$$\ddot\varphi_3 = \varphi'_3 \cdot \ddot\varphi_2 + \varphi''_3 \dot\varphi_2^2 \ ; \ \ddot\varphi_4 = \dot\varphi'_4 \cdot \ddot\varphi_2 + \dot\varphi''_4 \cdot \dot\varphi_2^2 \qquad (g)$$

Các góc φ_3, φ_4 có thể xác định gần đúng bằng công thức :

$$\varphi_i [(\varphi_2)_o + \Delta\varphi_2] = (\varphi_i)_o + (\varphi'_i)_o \Delta\varphi_2 + \frac{1}{2}(\varphi''_i)_o \Delta\varphi_2^2 + \ldots \ (i = 3,4) \ (h)$$

Nếu cần giá trị chính xác hơn, ta có thể lấy các giá trị của các hàm φ_3, φ_4 xác định bởi công thức (h) làm các giá trị ban đầu để giải các phương trình (b) bằng phương pháp lặp Niutơn.

Xác định tọa độ, vận tốc, gia tốc điểm K : Từ hình 4-24 ta dễ dàng tìm được biểu thức:

$$x_K = l_2\cos\varphi_2 + \xi_K\cos\varphi_3 - \eta_K\sin\varphi_3$$
$$y_K = l_2\sin\varphi_2 + \xi_K\sin\varphi_3 + \eta_K\cos\varphi_3 \qquad (i)$$

Từ đó sử dụng phép tính đạo hàm, ta có các biểu thức xác định vận tốc, gia tốc điểm K :

$$\dot{x}_K = -l_2\sin\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2 - (\xi_K\sin\varphi_3 + \eta_K\cos\varphi_3)\,\dot{\varphi}_3$$
$$\dot{y}_K = l_2\cos\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2 + (\xi_K\cos\varphi_3 - \eta_K\sin\varphi_3)\,\dot{\varphi}_3 \qquad (k)$$
$$\ddot{x}_K = -l_2\sin\varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - l_2\cos\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 -$$
$$-(\xi_K\sin\varphi_3 + \eta_K\cos\varphi_3)\cdot\ddot{\varphi}_3 - (\xi_K\cos\varphi_3 - \eta_K\sin\varphi_3)\dot{\varphi}_3^2 \qquad (l)$$
$$\ddot{y}_K = l_2\cos\varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - l_2\sin\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 +$$
$$+(\xi_K\cos\varphi_3 - \eta_K\sin\varphi_3)\cdot\ddot{\varphi}_3 - (\xi_K\sin\varphi_3 + \eta_K\cos\varphi_3)\,\dot{\varphi}_3^2$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp vectơ. Nêu các tiêu chuẩn nhận xét chuyển động thẳng và cong, chuyển động đều, nhanh dần, chậm dần.

2. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp tọa độ Đề các và phương pháp tọa độ tự nhiên. Vị trí của các vectơ vận tốc $\vec{v}$ và vectơ gia tốc $\vec{a}$ ở trên quỹ đạo như thế nào? Ý nghĩa của các thành phần gia tốc $\vec{a^\tau}$ và $\vec{a^n}$.

3. Định nghĩa chuyển động tịnh tiến của vật rắn. Đặc điểm của chuyển động tịnh tiến của vật rắn.

4. Định nghĩa chuyển động quay quanh một trục cố định của vật rắn. Khảo sát chuyển động toàn vật, chuyển động các điểm thuộc vật rắn.

5. Thiết lập công thức Ơle $\vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_M$

6. Định nghĩa chuyển động tuyệt đối, chuyển động tương đối và chuyển động theo của điểm M.

7. Phát biểu và chứng minh định lí hợp vận tốc của điểm.

8. Phát biểu và chứng minh định lí hợp gia tốc của điểm, khi hệ quy chiếu động chuyển động tịnh tiến và khi hệ quy

chiều động chuyển động quay quanh một trục cố định. Nêu quy tắc thực hành xác định vectơ gia tốc Côriôlit.

9. Định nghĩa chuyển động song phẳng của vật rắn. Mô hình phẳng của vật rắn chuyển động song phẳng. Thiết lập phương trình chuyển động, vận tốc và gia tốc suy rộng của vật rắn chuyển động phẳng.

10. Thiết lập phương trình chuyển động, biểu thức giải tích xác định vận tốc, gia tốc của một điểm thuộc vật rắn chuyển động phẳng.

11. Phát biểu và chứng minh định lí về quan hệ vận tốc, quan hệ gia tốc giữa hai điểm bất kì của vật rắn chuyển động phẳng.

12. Định nghĩa tâm vận tốc tức thời của hình phẳng chuyển động phẳng. Sự phân bố vận tốc các điểm của hình phẳng. Nêu các quy tắc thực hành xác định tâm vận tốc tức thời.

13. Phát biểu và chứng minh định lí về tổng hợp hai chuyển động quay quanh hai trục song song của vật rắn.

14. Có mấy phương pháp giải các bài toán động học rắn và hệ vật rắn chuyển động song phẳng? Cơ sở của các phương pháp đó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Бутенин Н. В, Луну Я. Л, Меркин Д. Р. Курс теоретической механики, Час 1, Изд 3-е "Наука" Москва 1979.

2. Бухголъ Н. Н. Основной курс теоретической механики, Час 1 ; изд 6-е "Наука", Москва 1965.

3. Добронравов В. В, Никитин Н. Н. Дворников А. А. Курс теоретической механики ; изд 4-е "Высшая щкола" Москва 1983.

4. Килъчевский Н. А. Курс теоретической механики, Час 1, "Наука" Москва 1977.

5. Лойцянский Л. Г, Лурьё А. И. Курс теоретической механики, Час 1, М, Гостехиздат 1955.

6. Суслов К ; Теоретическая механика, Огиз 1946.

7. Goeldner, H. Holzweissig, F. Leitfaden der Technischen Mechanik (8. Auflage), VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1986.

8. Nguyễn Văn Đạo, Nguyễn Trọng Chuyến, Nguyễn Thế Tiến, Ngô Văn Thảo ; Cơ học lí thuyết, NXB Đại học và THCN, Hà Nội 1969.

9. Đào Huy Bích, Phạm Huyền, Phạm Hữu Vĩnh. Giáo trình Cơ học lí thuyết, Trường đại học Tổng hợp, Hà Nội 1977.

10. Magnus. K, Mueller. H. H, Grundlagen der Technischen Mechanik, 6. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart 1990.

MỤC LỤC

Phần hai

ĐỘNG HỌC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập in lần đầu :
PHẠM THANH HƯƠNG

Biên tập tái bản :
TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày bìa :
TRẦN THUÝ HẠNH

Sửa bản in :
TRẦN VĂN THẮNG

Chế bản :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

CƠ HỌC Tập một - TĨNH HỌC VÀ ĐỘNG HỌC
Mã số : 7B001T5 - DAI

In 3.000 bản, khổ 14,5 x 20,5 cm tại Nhà in ĐHQG Hà Nội.
Số xuất bản : 72/17 - 05.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2005.