ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG CAO ĐẲNG LÝ TỰ TRỌNG THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

LY TU TRONG
COLLEGE

TẬP BÀI GIẢNG

TOÁN

Khối 22T4 – học kì 3 năm học 2023 – 2024

NGÀNH/NGHỀ: Dùng cho các ngành đào tạo

TRÌNH ĐỘ: Trung cấp chuyên nghiệp

Tài liệu lưu hành nội bộ

Thành phố Hồ Chí Minh tháng 01/2024

Chương I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Mục tiêu

Sau khi nghiên cứu chương này, học sinh có thể:

- Biết được các khái niệm về đạo hàm cấp hai, tính đơn điệu của hàm số, cực trị của hàm số, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, tiệm cận, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
- Giải được các bài tập về đạo hàm cấp hai, tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất, tiệm cận, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
- Xác định được đạo hàm cấp hai, các khoảng đơn điệu, tìm các điểm cực trị, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn xác định
- Xác định được các đường tiệm cận, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số
- Say mê và yêu thích tìm hiểu các bài toán về hàm số, ứng dụng đạo hàm.

☞**Nhắc lại**: Các công thức đạo hàm cơ bản:

1. $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$;
2. $\left(ku\right)' = k.u'$;
3. $\left(u.v\right)' = u'v + v'u$;
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;
5. $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{v'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$)
6. $y'_x = y'_u.u'_x$

Bảng đạo hàm

Đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản	Đạo hàm của các hàm số hợp u = u(x)
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}.u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Tính đơn điệu của hàm số

1.1. Nhắc lại định nghĩa

Kí hiệu *K* là khoảng hoặc đoạn (nửa khoảng). Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên *K*. Ta nói:

- Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** (tăng) trên *K* nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc *K* mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$, tức là

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

- Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** (giảm) trên *K* nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc *K* mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$, tức là

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là hàm số **đơn điệu** trên K.

1.2. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Ta thừa nhận định lí sau đây

Định lí: *Cho hàm số y =f(x) có đạo hàm trên K.*

a) *Nếu* $f'(x) > 0$ *với mọi x thuộc K thì hàm số f(x) đồng biến trên K.*

b) *Nếu* $f'(x) < 0$ *với mọi x thuộc K thì hàm số f(x) nghịch biến trên K.*

2. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

2.*1. Quy tắc*

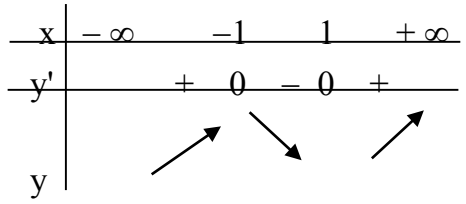
1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$;
2. Tìm các điểm tại *đó* $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định;
3. Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên;
4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

2.2. Áp dụng

Ví dụ 1: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$

Giải

- TXĐ: D = .
- $y' = 3x^2 - 3$.
- $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.
- Bảng biến thiên



Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

3. **Cực trị của hàm số**

3.1. Khái niệm cực đại, cực tiểu

3.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số xác định $y = f(x)$ và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$ và điểm $x_0 \in (a;b)$.

a) Nếu tồn tại số $h > 0$ *sao cho* $f(x) < f(x_0)$ *với mọi* $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.

b) Nếu tồn tại số $h > 0$ *sao cho* $f(x) > f(x_0)$ *với mọi* $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

☞**Chú ý**: - Điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**;

- Giá trị cực đại và cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

3.1.2. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Ta thừa nhận định lý sau đây

Định lí 1. *Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *liên tục trên khoảng* $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ *và có đạo hàm trên* K *hoặc* $K \setminus \{x_0\}$ *với* $h > 0$.

a) *Nếu* $f'(x) > 0$ *trên khoảng* $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ *trên khoảng* $(x_0; x_0 + h)$ *thì* x_0 *là một điểm cực đại của hàm số f(x).*

b) *Nếu* $f'(x) < 0$ *trên khoảng* $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ *trên khoảng* $(x_0; x_0 + h)$ *thì* x_0 *là một điểm cực tiểu của hàm số f(x).*

X	x_0-h	x_0	x_0+h
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗	$f_{CĐ}$	↘

x	x_0-h	x_0	x_0+h
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	f_{CT}	↗

3.2 Quy tắc tìm cực trị

✍**Quy tắc 1**

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$;
2. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định;
3. Lập bảng biến thiên;
4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của các hàm số $y = x^3 - 3x + 1$

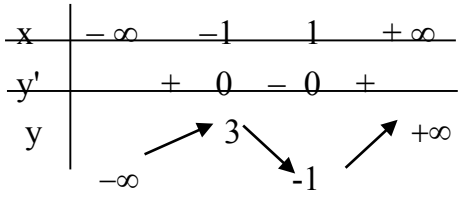
Giải

Tập xác định: D =

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y = -1 \\ y = 3 \end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra x = -1 là điểm cực đại, x = 1 là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

Định lí 2: *Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm cấp hai trong khoảng* $(x_0 - h; x_0 + h)$, *với* $h > 0$. *Khi đó:*

a) *Nếu* $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ *thì* x_0 *là điểm cực tiểu;*

b) *Nếu* $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ *thì* x_0 *là điểm cực đại.*

Áp dụng định lí 2, ta có quy tắc sau đây để tìm các điểm cực trị của một hàm số.

✍**Quy tắc 2**

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$;
2. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i \ (i = 1,2,3.....)$ là các nghiệm của nó;
3. Tính $f'(x)$ *và* $f''(x_i)$;
4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ *suy ra tính chất cực trị của điểm* x_i.

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

Giải

Tập xác định của hàm số: D =

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1; x = 0$

$f''(x) = 12x^2 - 4; f''(\pm 1) = 8 > 0 \Rightarrow x = -1$ và $x = 1$ là hai điểm cực tiểu

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại.

BÀI TẬP

Bài 1. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

c) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$

Bài 2. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

a) $y = \frac{3x+1}{1-x}$; b) $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$; c) $y = \frac{x+1}{2x-5}$;

d) $y = \frac{x^2 - 2x}{1-x}$; e) $y = \frac{2x}{x^2 - 9}$.

Bài 3. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng (-1; 1); nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và nghịch biến trên khoảng (1; 2).

☞**Gợi ý**: Sử dụng định lí sau:

Giả sử hàm số y= f(x) có đạo hàm trên khoảng (a; b).

+) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$ thì f(x) đồng biến trên khoảng (a; b);

+) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$ thì f(x) nghịch biến trên khoảng (a; b);

Bài 5. Áp dụng quy tắc 1, tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$; b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$;

c) $y = x + \frac{1}{x}$; d) $y = x^3(1-x)^2$; e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$;

Bài 6. Áp dụng quy tắc 2, tìm điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$; b) $y = \sin 2x - x$;

c) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$; d) $y = \sin x + \cos x$

Bài 7. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số

$$y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$$

luôn luôn có một điểm cực đại và điểm cực tiểu.

Bài 8. Tìm a và b để các cực trị của hàm số

$$y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

đều là những là số dương và $x_0 = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại.

Bài 9. Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại x = 2.

§2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập *D*.

a) Số *M* được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập *D* nếu $f(x) \le M$ với mọi x thuộc *D* và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max_D f(x);$

b) Số *m* được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập *D* nếu $f(x) \ge m$ với mọi x thuộc *D* và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m.$

Kí hiệu: $m = \min_D f(x).$

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$

Giải

Tập xác định: D =

$y' = 2x - 4$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	-1	↗	

Vậy $\min f(x) = -1.$

2. Cách tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

2.1. Định lí

> Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó

2.2. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn

✍Quy tắc

a) Tìm các điểm $x_1, x_2, ...x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại *đó* $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định;

b) Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), ...f(x_n), f(b);$

c) Tìm số lớn nhất *M* và số nhỏ nhất *m* trong các số trên. Ta có

$$M = \min_{[a;b]} f(x) \;\; ; \;\; m = \min_{[a;b]} f(x).$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$

Giải

Tập xác định: D =

$f'(x) = \dfrac{-8x}{(1+x^2)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f(0) = 4$

$f(1) = 2$

$f(-1) = 2$

$\max f(x) = 4$ trên đoạn $[-1;1]$; $\min f(x) = 2$ trên đoạn $[-1;1]$.

BÀI TẬP

Bài 1. Lập bảng biến thiên và tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau:

a) $y = x^2$ trên $[-3;0]$

b) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ trên $[3;5]$

c) $f(x) = -x^3 + 3x^2$ trên $[-1;1]$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$ trên $[1;3]$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên $[-4;4]$

b) $f(x) = \sqrt{5-4x}$ trên $[-1;1]$

c) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ trên $[-1;3]$.

Bài 3. Tính giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{4}{1+x^2}$

b) $y = 4x^3 - 3x^4$

§3. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

1. **Đường tiệm cận ngang**

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (khoảng dạng $(a;+\infty);(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$).

Đường thẳng $y=y_0$ là *đường* **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0 \ ; \lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0$$

Ví dụ 1: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-5}$

Giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\left(1-\frac{5}{x}\right)}=2;$$

Hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\left(1-\frac{5}{x}\right)}=2$

Vậy y= 2 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

2. **Đường tiệm cận đứng**

Định nghĩa: Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là *đường* **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \ ; \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \ ; \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$$

Ví dụ 2: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-5}$

Giải

$$\lim_{x\to5^+}\frac{2x+3}{x-5}=+\infty; \quad \lim_{x\to5^-}\frac{2x+3}{x-5}=-\infty$$

Vậy x = 5 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

☞**Chú ý** : Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\frac{a}{c}\Rightarrow \text{Tiệm cận ngang: } y=\frac{a}{c}$$

$$\lim_{x\to-\frac{d}{c}^{+}}\frac{ax+b}{cx+d}=\infty \text{ hoặc } \lim_{x\to-\frac{d}{c}^{-}}\frac{ax+b}{cx+d}=\infty\Rightarrow \text{Tiệm cận đứng: } x=-\frac{d}{c}$$

3. <u>Sơ đồ khảo sát hàm số</u>

B1. Tập xác định

Tìm tập xác định của hàm số

B2. Sự biến thiên

- Xét chiều biến thiên của hàm số:

  + Tính đạo hàm y';

  + Tìm các điểm tại đó đạo hàm $y'=0$ hoặc không xác định;

  + Xét dấu đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

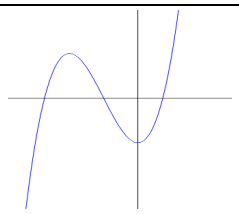
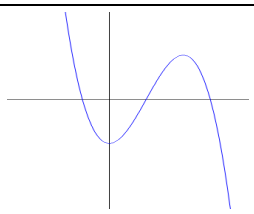
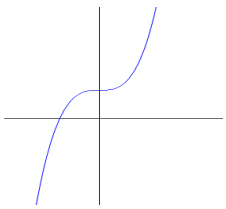
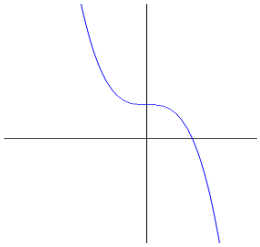
- Tìm cực trị.
- Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
- Lập bảng biến thiên (Ghi các kết quả tìm được vào bảng biến thiên).

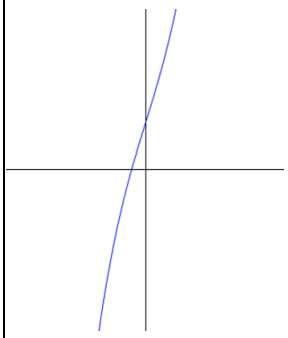
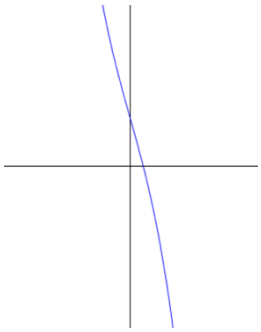
B3. Đồ thị

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

3.2. Khảo sát một số hàm đa thức và hàm phân thức

3.2.1. Hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$

	$a>0$	$a<0$
Phương trình $y''=0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y''=0$ có nghiệm kép		

Phương trình $y'' = 0$ *vô* nghiệm		

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$

Giải

Tập xác định: D =

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -4 \\ x = -2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$ -2 0 $+\infty$
y'	+ 0 - 0 +
y	$-\infty$ ↗ 0 ↘ -4 ↗ $+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty ; -2)$ và $(0; +\infty)$

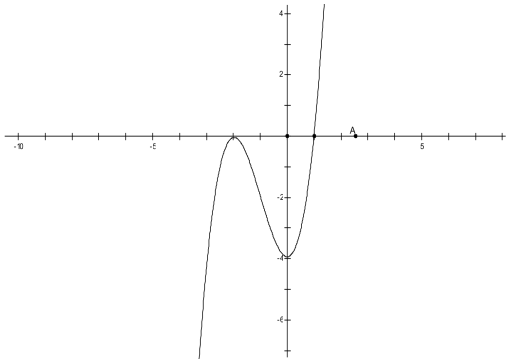
Hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$

Hàm số đạt cực đại tại x = -2 ; $y_{CD}=0$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0; $y_{CT}= -4$

Bảng giá trị:

x	-3	-1	1
y	-4	-2	0



Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

Giải

Tập xác định: D = .

$y' = -3x^2 + 6x - 4$

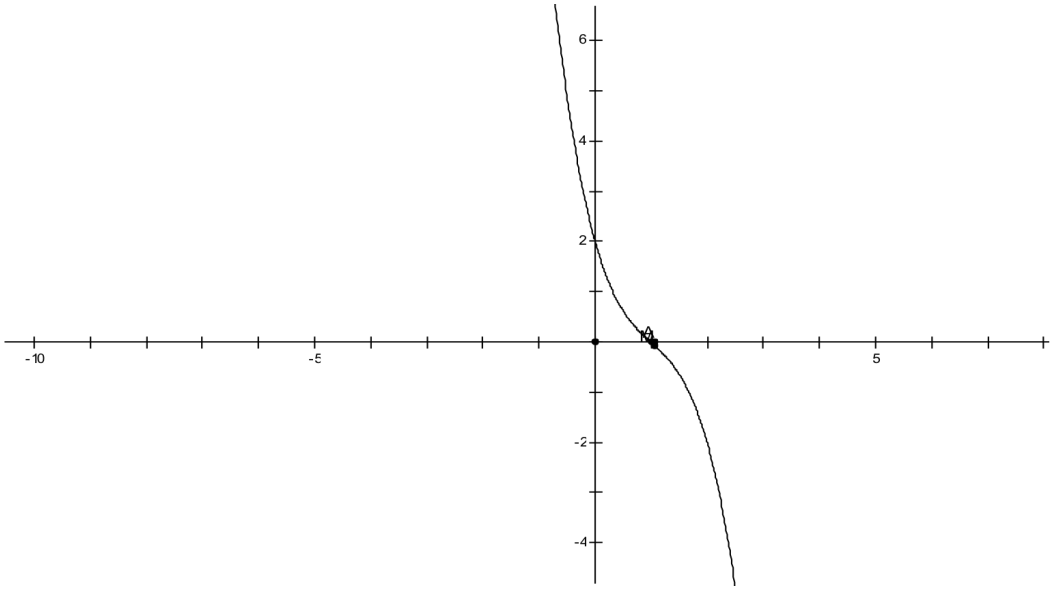
$y' < 0,\ \forall x \in D$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty;\ \lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

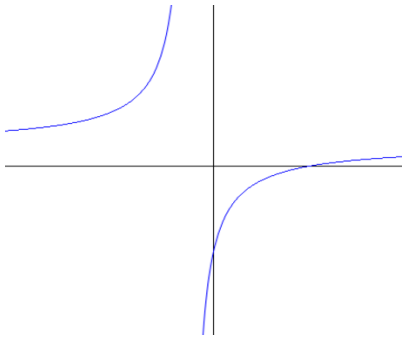
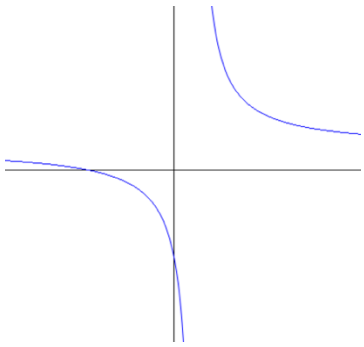
Bảng biến thiên

Điểm đặc biệt: (1; 0); (0; 2)

x	-∞		+∞
y'		-	
y	+∞	↘	-∞



3.2.2. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad (c\neq 0, ad-bc\neq 0)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$

Giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Sự biến thiên:

$$y'=\frac{-4}{(x-1)^2}<0\ ,\forall x\neq 1$$

$\Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên $(-\infty,1);(1,+\infty)$

Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x\to 1^+} y=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+3}{x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} y=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+3}{x-1}=-\infty$$

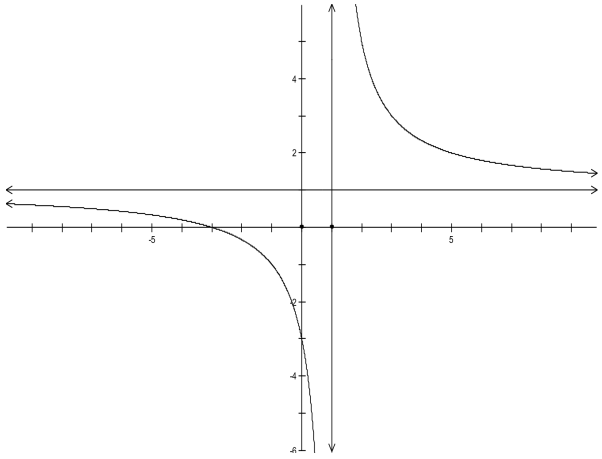
Suy ra x=1 là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=1$$

Suy ra y=1 là tiệm cận ngang.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-		-	
y	1	↘	$+\infty$ || $-\infty$	↘	1

Đồ thị:



Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1-2x}{2x-4}$

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

Sự biến thiên: $y' = \dfrac{6}{(2x-4)^2} > 0, \forall x \neq 2$

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty, 2);(2, +\infty)$

Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x\to 2^+} y = \lim_{x\to 2^+} \frac{1-2x}{2x-4} = +\infty; \qquad \lim_{x\to 2^-} y = \lim_{x\to 2^-} \frac{1-2x}{2x-4} = -\infty$$

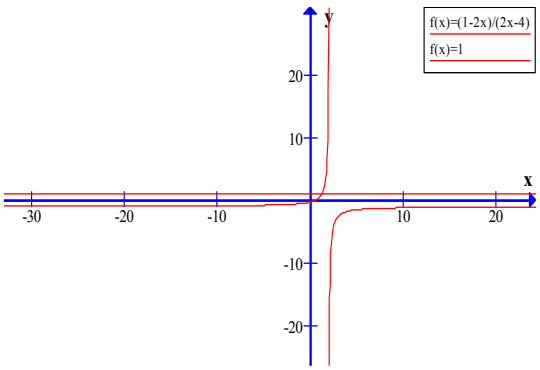
Suy ra x=2 là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -1 \Rightarrow$ y=-1 là tiệm cận ngang.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

Đồ thị



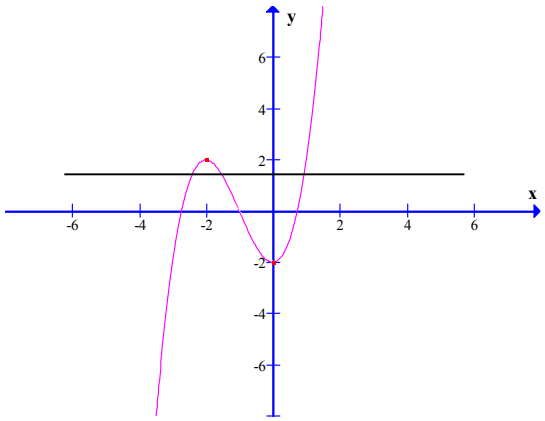
4. Sự tương giao của các đồ thị

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2).
Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2), ta phải giải phương trình
$f(x) = g(x)$.
Giả sử phương trình trên có các nghiệm là $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Khi đó, các giao điểm của (C_1) và (C_2) là $M_0(x_0, f(x_0)), M_i(x_i, f(x_i)), \ldots$.

Ví dụ 3:

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$

Giải



b) Sử dụng đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình: $x^3 + 3x^2 - 2 = m$

Giải

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng
$y = m$.

- $m > 2$: phương trình có một nghiệm
- $m = 2$: phương trình có hai nghiệm
- $-2 < m < 2$: phương trình có ba nghiệm
- $m = -2$: phương trình có hai nghiệm
- $m < -2$: phương trình có một nghiệm

BÀI TẬP

Bài 1. Khảo sát đồ thị hàm số bậc ba sau:

a) $y = 2 + 3x - x^3$ b) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$ d) $y = 2x^3 + 5$

Bài 2. Khảo sát đồ thị hàm phân thức sau:

a) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ b) $y = \dfrac{1-2x}{2x-4}$ c) $y = \dfrac{-x+2}{2x+1}$

Bài 3. Khảo sát đồ thị hàm số. Từ đó tìm số nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ b) $-2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

c) $2x^2 - x^4 = -1$

Bài 4. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$;

b) Dựa vào đồ thị hàm số, biện luận về số nghiệm của phương trình sau theo tham số m: $x^3 - 3x + m = 0$.

§4. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

1. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Với đạo hàm và ứng dụng để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số thường sẽ tính toán giá trị đồng biến, nghịch biến, tính đơn điệu của hàm số để từ đó dễ dàng tính toán được bài toán trong thực tế hiệu quả.

2. Ứng dụng của đạo hàm trong kinh tế

Có một điều thú vị về ứng dụng của đạo hàm chính là được áp dụng cả trong kinh tế, khi chúng hỗ trợ tính toán tốc độ tăng trưởng kinh tế nhằm đưa ra những quyết định đầu tư đúng đắn.

Ví dụ 1:

Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/tháng thì mọi căn hộ sẽ có người thuê và khi tăng giá mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó nên để giá thuê là bao nhiêu?

Giải:

Gọi x là giá thuê thực tế mỗi căn hộ (x >= 2.000.000)

So với giá ban đầu thì số tiền tăng thêm là x – 2.000.000 (đồng)

Cứ tăng 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống. vậy theo quy tắc tam suất

Tăng x – 2.000.000 sẽ có $\frac{2(x-2.000.000)}{100.000} = \frac{x-2.000.000}{50.000}$ căn hộ bị bỏ trống

Số căn hộ được thuê là $50 - \frac{x-2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$

Số tiền thu được khi cho thuê với giá x là: $\left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{x^2}{50.000} + 90x$

Gọi F(x) = $-\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ là hàm lợi nhuận khi cho thuê căn hộ với giá x đồng.

Như vậy bài toán trở thành bài toán tìm GTLN của hàm số f(x) khi x >= 2.000.000

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000		2.250.000	+∞
F'(x)		+	0	−
F(x)		↗	F_{max}	↘

Suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Ví dụ 2:

Một cửa hàng bán bưởi với giá 50.000 đồng/quả. Với giá này cửa hàng bán được 40 quả bưởi. cửa hàng dự định giảm giá, ước tính mỗi quả giảm 5.000 đồng sẽ bán thêm được 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu về lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về của mỗi quả bưởi là 30.000 đồng.

Giải:

Gọi x là bán thực tế mỗi quả bưởi(30.000<=x <= 50.000)

So với giá ban đầu thì số tiền giảm giá là 50.000 – x (đồng)

Cứ giảm 5.000 đồng thì bán thêm được 50 quả. vậy theo quy tắc tam suất

Giảm 50.000 – x thì sẽ bán thêm được $\frac{50(50.000-x)}{5.000} = \frac{50.000-x}{100}$ quả

Số quả bưởi bán được là $40 + \frac{50.000-x}{100} = -\frac{1}{100}x + 540$

Số tiền lời (lợi nhuận) thu được khi bán với giá x là:

$$\left(-\frac{1}{100}x + 540\right)(x - 30.000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$$

Gọi $F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$ là hàm lợi nhuận khi bán 1 quả bưởi với giá x đồng.

Như vậy bài toán trở thành bài toán tìm GTLN của hàm số f(x) trên đoạn

30.000<=x <= 50.000

Bài toán trở thành tìm GTLN của

$F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$, Đk: $30.000 \le x \le 50.000$.

$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000$

Vì hàm F(x) liên tục trên $30.000 \le x \le 50.000$ nên ta có:

$F(30.000) = 0$

$F(42.000) = 1.440.000$

$F(50.000) = 800.000$

Vậy với $x = 42.000$ thì $F(x)$ đạt GTLN.

Bài 3: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30 - \frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

đáp số: 40 người

3. Ứng dụng đạo hàm trong vật lý

Vận tốc tức thời

Một chuyển động thẳng có phương trình biểu diễn dưới dạng **s = s(t)** sẽ được xem như là một hàm số có đạo hàm, lúc này vận tốc tức thời sẽ được xác định dựa trên công thức sau:

$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ trong đó nếu $t \to t_0 \Leftrightarrow |t - t_0|$ sẽ có độ chính xác càng cao

Cường độ tức thời của dòng điện

Điện lượng Q truyền trong dây dẫn cũng được xem như là một hàm số thời gian của t hay **Q = Q(t)** tương ứng với cường độ trung bình của một dòng điện được xác định tại mốc thời gian nhất định.

Công thức tính cường độ tức thời của dòng điện được áp dụng đạo hàm được tính như sau:

$|t - t_0|$ là $I = \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ hoặc đơn giản chỉ là $I(t_0) = Q'(t_0)$

Gia tốc tức thời

Trong đạo hàm cấp 2 ta có phương trình **f''(t)** thì trong vật lý đó chính là gia tốc tức thời của chuyển động **s = f(t)** tại thời điểm t.

Cho một vật chuyển động được biểu diễn dưới dạng phương trình là **s = s(t)**. Lúc này, vận tốc tức thời ở thời điểm t_0 sẽ được xác định dựa trên công thức **$v(t_0) = s'(t_0)$.**

Cho một vật chuyển động được biểu diễn dưới dạng phương trình tương ứng như đạo hàm là **v = v(t)**. Lúc này, để đính gia tốc tức thời ở thời điểm **t_0** sẽ được xác định dựa trên công thức **$a(t_0) = v'(t_0)$.**

Còn đối với cường độ tức thời của một điện lượng cho trước được biểu diễn dưới dạng phương trình là **Q = Q(t)**, thì để tính tại thời điểm tức thời **t_0** ta sẽ áp dụng theo công thức là **$I(t_0) = Q'(t_0)$.**

Ví dụ 1:

Có một xe máy chuyển động được biểu diễn theo phương trình tương ứng cho trước là s(t)= t2 + 6t+ 10. Trong đó s là quãng đường đi được (m) và t là đơn vị thời gian (s). Yêu cầu tính vận tốc tức thời ngay thời điểm t = 3.

Hướng dẫn giải:

Dựa vào phương trình chuyển động trên, ta suy ra được phương trình tính vận tốc của xe tương ứng là v(t)=s' (t)=2t+6 (m/s).

⇒ Vận tốc tức thời của xe tại thời điểm t= 3 là: V(3)= 2. 3+ 6= 12(m/s)

Ví dụ 2:

Có một vật chuyển động được biểu diễn dưới dạng phương trình cho trước là v = 4t + 10 (m/s). Yêu cầu hãy tính gia tốc tức thời tại thời điểm chuyển động tương ứng là t = 10s?

Hướng dẫn giải:

Áp dụng công thức tính gia tốc trong đạo hàm của chuyển động tương ứng là a(t) = v'(t) = 4 (m/s).

Lúc này ta có gia tốc của vật chuyển động tương ứng là 4m/s – không thay đổi.

Ví dụ 3:

Cho một vật di chuyển theo phương trình cho trước là s(t) = t2 – 40t + 10. Trong đó t là thời gian chuyển động (s), s là quãng đường di chuyển của vật (m). Hỏi tại thời điểm nào thì vật sẽ dừng lại?

Hướng dẫn giải

Dựa theo phương trình trên, ta có phương trình tính vận tốc chuyển động tương ứng là v(t)=s' (t)= 2t- 40 (m/s).

Khi vật bắt đầu dừng lại có nghĩa vận tốc tức thời sẽ được tính bằng 0. Lúc này ta sẽ có phương trình tương ứng là 2t – 40= 0 ⇔ t= 20 (s).

Kết luận: sau 20s chuyển động từ khi khởi hành thì vật sẽ dừng lại.

BÀI TẬP

1. Một xe khách đi từ Hà Nội về Hải Phòng chở tối đa 60 hành khách trên một chuyến đi. Nếu một chuyến xe chở m hành khách thì giá vé cho mỗi hành khách được tính là $(30 - \frac{5m}{2})^2$ đồng. Hỏi rằng mỗi chuyến nhà xe chở bao nhiêu hành khách thì thu được lợi nhuận cao nhất?

2. Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100m^2$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ 1kg/m^2 tôm giống và sản lượng khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm ông cho biết cứ thả giảm đi 200gr/m^2 tôm giống thì thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông nên thả bao nhiêu kg tôm giống để thu hoạch sản lượng tôm lớn nhất? giả sử không có dịch bệnh, hao hụt trong quá trình nuôi.

3. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0.25x^2(30 - x)$

Trong đó x > 0 là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân (x có đơn vị là mg). Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu?

4. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t được tính theo công thức $G(t) = 45t^2 - t^3$. Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ là vào ngày thứ bao nhiêu?

5. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. người ta cắt ở bốn góc của hình vuông bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông đó có cạnh là x(cm), rồi gấp tấm nhôm lại để được mộ cái hộp không có nắp. Tìm x để được một cái hộp có thể tích lớn nhất?

6. Mỗi trang trong một cuốn sách giáo khoa cần được trình bày các nội dung trong một khung hình chữ nhật có diện tích là 384cm^2. Khung hình chữ nhật này phải cách lề trên và dưới 3cm, cách lề trái và lề phải 2cm. hãy tính kích thước tối ưu của trang giấy?

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Tìm khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 2x^2 - x - 7$

b) $y = \dfrac{x-5}{1-x}$

Bài 2. Tìm cực đại, cực tiểu của hàm số sau:

$$y = x^4 - 2x^2 + 2$$

Bài 3. Tìm tiệm đứng và tiệm cận ngang của hàm số sau:

$$y = \frac{2x+3}{2-x}$$

Bài 4. Khảo sát các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2;$

b) $y = x^3 + 3x^2 + 1$

Dựa vào đồ thị hàm số, biện luận số nghiệm của phương trình sau:

$$x^3 + 3x^2 + 1 = \frac{m}{2}$$

Bài 5. Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 16cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Bài 6. khi nuôi cá thí nghiệm trong một cái hồ, các nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con đến thời điểm thu hoạch sẽ có cân nặng là P(n) = 480 – 20n (g). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều sản lượng cá nhất?

CHƯƠNG II: NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những vấn đề sau: Nguyên hàm, nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp, tích phân, ứng dụng hình học của tích phân.

BÀI 1. NGUYÊN HÀM. BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP

1. Nguyên hàm và tính chất

1.1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Ví dụ 1:

a) Hàm số $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ vì $F'(x) = (x^2)' = 2x; \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

b) Hàm số $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ vì $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}; \forall x \in (0; +\infty)$.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x) + C, C \in R$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Kí hiệu

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Chú ý: Biểu thức $f(x)dx$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$

$$(\text{Vì } dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx)$$

Ví dụ 2:

a) Với $x \in (-\infty; +\infty)$; $\int 2x\,dx = x^2 + C$;

b) Với $x \in (0; +\infty)$; $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$;

c) Với $x \in (-\infty; +\infty)$; $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

1.2. Tính chất của nguyên hàm

1) $\int f(x)'dx = f(x) + C$;

2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$; k là hằng số khác 0;

3) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Ví dụ 3:

1) $\int (\cos x)'\,dx = \int (-\sin x)\,dx = \cos x + C$

2) Với $x \in (0; +\infty)$ ta có

$$\int \left(5\sin x + \frac{3}{x}\right)dx = 5\int \sin x\,dx + 3\int \frac{1}{x}dx = -5\cos x + 3\ln x + C$$

1.3. Sự tồn tại nguyên hàm

Mọi hàm số f(x) liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

Ví dụ 4:

a) Hàm số $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ có nguyên hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và

$\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

b) Hàm số $g(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ có nguyên hàm trên từng khoảng $(k\pi; (k+1)\pi);\ (k \in \mathbb{Z})$ và

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$

1.4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$\int 0\,dx = C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;\ (a > 0; a \neq 1)$
$\int dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ (n \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$

2. Phương pháp tính nguyên hàm

2.1. Phương pháp đổi biến số

Định lí 1 :

Nếu $\int f(u)\,du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f\big(u(x)\big).u'(x)dx = F\big(u(x)\big) + C.$$

❖ **Hệ quả.** Với $u = ax + b\ (a \neq 0)$, ta có

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Ví dụ 5: Tính $\int \sin(3x-1)\,dx$

Vì

$\int \sin u dx = -\cos u + C$ nên theo hệ quả ta có

$$\int \sin(3x-1)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C$$

2.2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Định lí 2:

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

- **Chú ý:**

Vì $u'(x)dx = du;\ v'(x)dx = dv;$ nên đẳng thức trên còn được viết dưới dạng:

$$\int udv = uv - \int vdv$$

Đây là công thức tính nguyên hàm từng phần.

3. Bài tập áp dụng

Ví dụ 6: Tính $I = \int \cos x \sin^3 x dx$

Giải

Đặt $t = \sin x \Leftrightarrow dt = \cos x dx$

Khi đó

$$I = \int \cos x \sin^3 x dx = \int t^3\, dt = \frac{1}{4}t^4 + C == \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

Ví dụ 7: Tính các tích phân sau

a) $\int xe^x dx$ b) $\int x\cos x dx$ c) $\int \ln x\, dx$

Giải

a) $I = \int xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Do đó $I = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x du = xe^x - e^x + C$

b) $I = \int x\cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x d.x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$I = \int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C.$$

c) $I = \int \ln x\, dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

$I = \int \ln x\, dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

BÀI TẬP

1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}}$; b) $f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$; d) $f(x) = \sin 5x.\cos 3x$

e) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-5)}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{(-2x+3)(2x+9)}$

2. Sử dụng phương pháp đổi biến, hãy tính

a) $\int (3-x)^{10} dx$; b) $\int x(1+x^2)^{20} dx$

c) $\int \cos^2 x.\sin x dx$; d) $\int \dfrac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$

3. Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính:

a) $\int x\sin^2 x dx$; b) $\int x^2 \sin x dx$

c) $\int \dfrac{x}{\sin^2 x} dx$; d) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$

e) $\int x\ln(x+1) dx$; f) $\int x \sin(2x+1) dx$

g) $\int (1-x)\cos x dx$; h) $\int x \sin x \, dx$

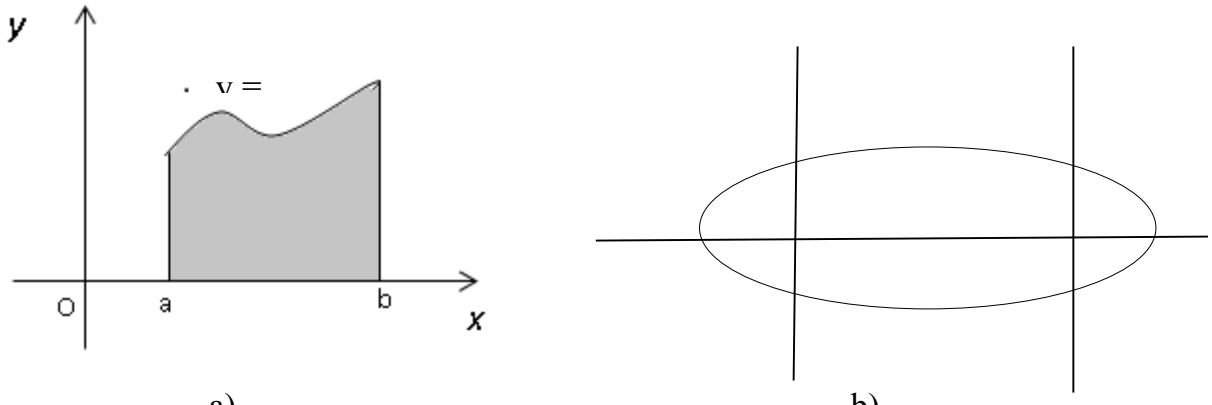
BÀI 2. TÍCH PHÂN. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

1.1. Diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ được gọi là **hình thang cong** (H. 1a)

Ở lớp dưới, ta đã biết cách tính diện tích hình chữ nhật, hình tam giác. Bây giờ, ta xét bài toán tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi một đường cong kín bất kì (H. 1b).



a) b)

Hình 1

Bằng cách kẻ các đường thẳng song song với các trục tọa độ, ta chia D thành những hình nhỏ là những hình thang cong (H.1a). Bài toán trên được đưa về tính diện tích của hình thang cong.

Bài toán tìm diện tích hình thang cong bất kì:

Cho hình thang cong giới hạn bởi các đường thẳng $x = a;\ x = b;\ (a < b)$, trục hoành và đường cong $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên đoạn $[a;\ b]$.

Với mỗi $x \in [a;\ b]$. Kí hiệu $S(x)$ là diện tích của phần hình thang cong đó nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với Ox lần lượt tại a và x (H.2).

Ta chứng minh được $S(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;\ b]$.

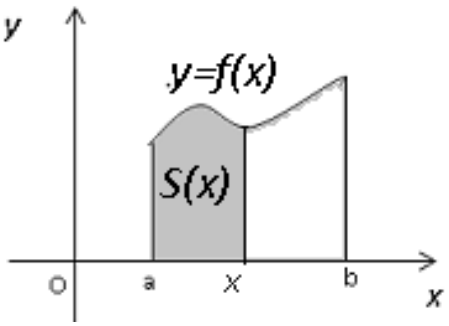
Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì có một hằng số C sao cho $S(x) = F(x) + C$.

Vì $S(a) = 0$ nên $F(a) + C = 0$ hay $C = -F(a)$.

Vậy $S(x) = F(x) - F(a)$.

Thay $x = b$ vào đẳng thức trên, ta có diện tich của hình thang cần tìm là

$$S(b) = F(b) - F(a).$$



Hình 2

1.2. Định nghĩa tích phân

Cho f(x) là hàm số liên tục trên đoạn $[a;\ b]$. Giả sử F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên đoạn $[a;\ b]$.

Hiệu số F(b)-F(a) được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;\ b]$) của hàm số f(x).

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ta gọi a là cận dưới, b là cận trên, f(x)dx là biểu thức dưới dấu tích phân và f(x) là hàm số dưới dấu tích phân.

Chú ý:

Trường hợp a = b hoặc a > b, ta quy ước

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0;\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Ví dụ 1:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3|_1^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}$$

$$\int_1^e \frac{1}{t}dt = \ln t|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Nhận xét:

a) Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)\,dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a; b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t.

b) Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f(x) liên tục và không âm trên đoạn [a;b], thì tích phân $\int_a^b f(x)$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của f(x), trục Ox và hai đường thẳng x = a; x = b (H.1a). Vậy

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Tính chất của tích phân

1) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$; k là hằng số

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx.$

Ví dụ 2: Tính $\int_0^2 (4x^3 - 2x + 5)\,dx$

Giải

$$\int_0^2 (4x^3 - 2x + 5)\,dx = 4\int_0^2 x^3\,dx - 2\int_0^2 x\,dx + 5\int_0^2 dx = (x^4)|_0^2 - (x^2)|_0^2 + 5(x)|_0^2 = 22$$

3. Phương pháp tính tích phân

3.1. Phương pháp đổi biến

Định lí. Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b]. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a;\ \varphi(\beta) = b$ và $a \le \varphi(t) \le b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f((\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt$$

Ví dụ 3: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$

Giải

Đặt $u = \sin x$. Ta có $u' = \cos x$.

Khi $x = 0$ thì $u(0) = 0$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \int_0^1 u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3 |_0^1 = \frac{1}{3}$$

3.2. Phương pháp tính tích phân từng phần

Định lí. Nếu u=u(x) và v=v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn [a; b] thì

$$\int_a^b u(x)\, v'(x) dx = (u(x)v(x))|_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x) dx$$

$$\text{hay } \int_a^b u \, dv = uv|_a^b - \int_a^b v \, du$$

Ví dụ 4: Tính

$$I = \int_1^e \ln x \, dx$$

Giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

Ta có

$$I = \int_1^e \ln x \, dx = x\ln x|_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - 1\ln 1 - x|_1^e = e - e + 1 = 1$$

4. Bài tập áp dụng

Bài 1: Tính

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$$

Giải

Đặt $u = 1 + x^2$; ta có $u' = 2x; u(0) = 1; u(1) = 2$ nên

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{4}.\frac{1}{u^2}\Big|_1^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) = \frac{3}{16}.$$

Bài 2: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

Giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \, dx = (-x\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = (-x\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\sin x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1.$$

Bài 3: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

Giải

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\sin x \end{cases}$

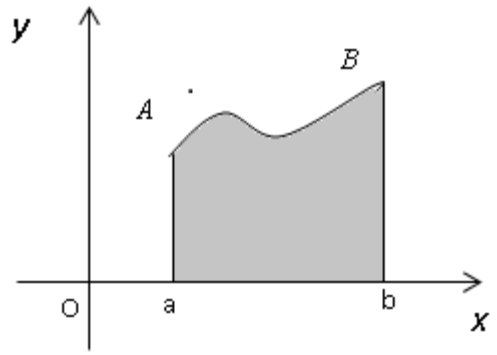
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

5. Tính diện tích hình phẳng

5.1. Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số f(x) liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a;\ x = b$ (H. 4) được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

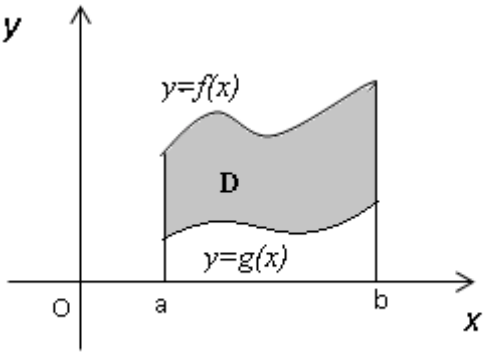


Hình 3

5.2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Cho hai đường cong f(x) và g(x) liên tục trên đoạn [a; b]. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a;\ x = b$ (H. 5) được tính bởi công thức.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \quad (*)$$



Hình 4

Chú ý: Khi áp dụng công thức (*), cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Muốn vậy, ta giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$ trên đoạn [a, b].

Giả sử phương trình có hai nghiệm c; d (c < d). Khi đó, f(x) – g(x) không đổi dấu trên các đoạn [a; c]; [c; d]; [d; b]. Trên mỗi đoạn đó, chẳng hạn trên đoạn [a; c], ta có

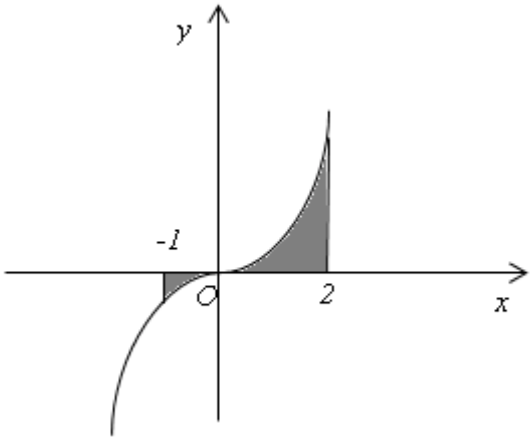
$$\int_a^c |f(x) - g(x)|\,dx = \left|\int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx\right|$$

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1;\ x = 2$ (H.6)

Giải

$$S = \int_{-1}^{2} |x^3|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)^3\,dx + \int_{0}^{2} x^3\,dx$$

$$= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2} = \frac{17}{4}$$



Hình 5

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số: $y = x^2 - x - 4$ và $y = x - 1$.

Giải

Ta có: hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^2 - x - 4 = x - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 4 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{-1}^{3} |x^2 - 2x - 3|\,dx$$

Do $x^2 - 2x - 3 < 0;\ \forall x \in [-1; 3]$

Suy ra

$$S = \int_{-1}^{3} |x^2 - 2x - 3|\,dx = S = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\Big|_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

6. Tính thể tích

6.1. Thể tích của vật thể

Vật thể giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a$; $x = b$; $a< b, S(x)$ là diện tích của thiết diện của vật thể trên một mặt phẳng vuông góc với $0x$. $S(x)$ liên tục trên $[a ; b]$.

Thể tích vật thể là

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

6.2. Thể tích của khối chóp và khối chóp cụt

* Thể tích của khối chóp là:

$$V = \frac{Bh}{3}$$

Với khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B.

* Thể tích của khối chóp cụt là:

$$V = \frac{h}{3}(B + \sqrt{B.B'} + B')$$

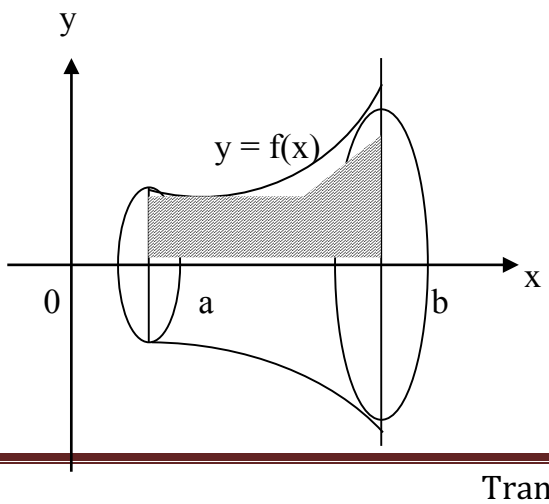
Với khối chóp cụt tạo bởi khối chóp đỉnh S có diện tích hai đáy lần lượt là $B; B'$ và có chiều cao bằng h.

7. Thể tích khối tròn xoay

7.1. Thể tích khối tròn xoay quay quanh trục ox

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi y = f(x) (C); x = a; x = b, y = 0; (a < b), quay quanh Ox

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

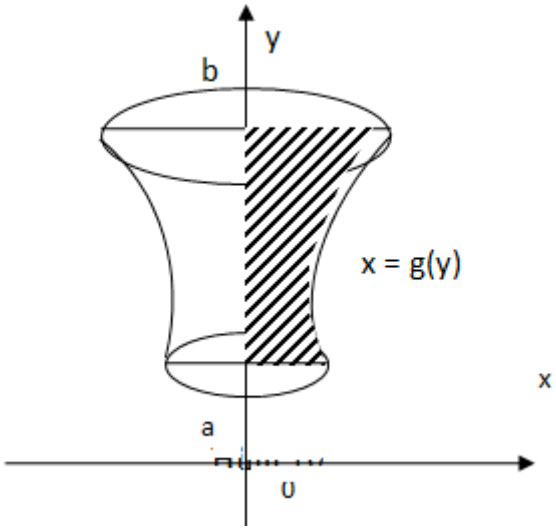


Hình 6

7.2. Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh Oy.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục $Oy, y = a, y = b\ (a < b)$ quay quanh Oy là:

$$V=\pi\int_a^b x^2(y)dy$$



Hình 7

8. Bài tập áp dụng

Bài 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$.

Giải

Ta có: $f(x) - g(x) = (x^3 - x) - (x - x^2) = x^3 + x^2 - 2x$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 0; x_3 = 1.$$

Vậy diện tích hình phẳng đã cho là:

$$S = \int_{-2}^{1} |x^3 + x^2 - 2x|\, dx$$

$$= \left|\int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx\right|$$

$$= \left|\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{0}^{1}\right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$

Bài 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay do phần đường tròn (C): $x^2 + y^2 = R^2$ tâm O khi quay xung quanh trục Ox.

Giải

Khi (C) quay quanh Ox ta có mặt cầu, thể tích khối cầu là

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

BÀI TẬP

1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^2 \left(x\sqrt{x} + 2x^3 + 5\right) dx$

b) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{(1-x)^2}\, dx;$

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x(x+1)} dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx;$

e) $\int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 x\, dx$

b) $\int_0^2 \left(x\sqrt[3]{x} + x^5\sqrt{x} + 7x\right) dx;$

2. Sử dụng phương pháp đổi biến, hãy tính

a) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$

b) $I = \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1} dx;$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos x dx$

d) $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx;$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos^2 x\, dx$

b) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx;$

3. Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần, hãy tính

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x\, dx$

b) $\int_1^e x^2 \ln x\, dx;$

c) $I = \int_1^{\pi} x(1+\cos x) dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3)\sin x\, dx;$

e) $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ b) $\int_0^2 (x^2-2x-1)\,e^{-x}dx;$

4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y = x^2; y = x + 2;$

b) $y = |\ln x|;$

c) $y = (x-6)^2;\ y = 6x - x^2.$

5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm $M(2;5)$ và trục Oy.

6. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau khi quay xung quanh trục Ox:

a) $y = 1 - x^2; y = 0;$

b) $y = \cos x; y = 0; x = 0; x = \pi;$

c) $y = \tan x; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{4}.$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $F(0) = 2\,023$ là:

A. $x^2 + e^x + 2\,023$. B. $x^2 + e^x + C$.

C. $x^2 + e^x + 2\,022$. D. $x^2 + e^x$.

2. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)]dx$ bằng:

A. $\frac{23}{4}$. B. 7. C. 9. D. $\frac{15}{4}$.

3. Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 2$. Khi đó, $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. 1. B. 4. C. 2. D. 0.

4. Tìm:

a) $\int 2x(x^3 - x + 2)dx$; b) $\int\left(2x + \frac{1}{x^3}\right)dx$; c) $\int(3 + 2\tan^2 x)dx$;

d) $\int(1 - 3\cot^2 x)dx$; e) $\int(\sin x + 2^{-x+1})dx$; g) $\int(2.6^{2x} - e^{-x+1})dx$.

5. a) Cho hàm số $f(x) = x^2 + e^{-x}$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $F(0) = 2\,023$.

b) Cho hàm số $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$. Tìm nguyên hàm $G(x)$ của hàm số $g(x)$ trên khoảng $(0\,; +\infty)$ sao cho $G(1) = 2\,023$.

6. Tính:

a) $\int_{-1}^1 (x + 2)^3 dx$; b) $\int_1^2 \frac{2}{x^2}dx$; c) $\int_1^4 x^2\sqrt{x}\,dx$;

d) $\int_{-1}^0 2^{3x+2}dx$; e) $\int_0^2 2^x \cdot 3^{x+1}dx$; g) $\int_0^1 \frac{7^x}{11^x}dx$.

7 Tích phân $\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{6}$. C. $\frac{19}{648}$. D. $-\frac{19}{648}$.

8 Tích phân $\int_{\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{5}} \sin x dx$ có giá trị bằng:

A. $\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{7}$. B. $\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{5}$.

C. $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{7}$. D. $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{5}$.

9 Tích phân $I=\int_0^1 \frac{3^x}{2}dx$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{1}{\ln 3}$. B. $\frac{1}{\ln 3}$. C. -1 D. 1.

10 Cho $\int_{-2}^{3} f(x)dx=-10$, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$, $F(3)=-8$. Tính $F(-2)$.

11 Tính:

a) $\int_0^1 (x^6-4x^3+3x^2)dx$; b) $\int_1^2 \frac{1}{x^4}dx$; c) $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x+3\cos x)dx$; e) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x dx$; g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$;

h) $\int_{-1}^{0} e^{-x}dx$; i) $\int_{-2}^{-1} e^{x+2}dx$; k) $\int_0^1 (3.4^x-5e^{-x})dx$.

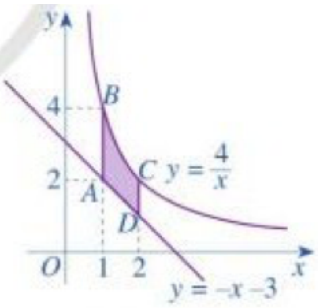
12 Hình thang cong $ABCD$ ở *Hình 28* có diện tích bằng:

A. $\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - x + 3\right) dx$.

B. $\int_1^2 \left(\frac{4}{x} + x + 3\right) dx$.

C. $\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - x - 3\right) dx$.

D. $\int_2^4 \left(\frac{4}{x} + x + 3\right) dx$.



Hình 28

13 Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ quay quanh trục Ox là:

A. $\pi \int_0^2 \sqrt{x}\, dx$.

B. $\pi \int_0^2 x\, dx$.

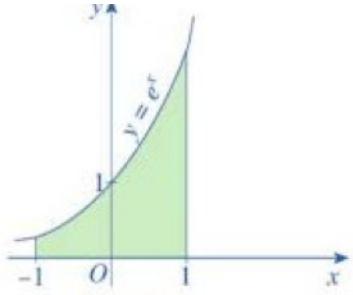
C. $\int_0^2 \sqrt{x}\, dx$.

D. $\int_0^2 x\, dx$.

13 Cho đồ thị hàm số $y = e^x$ và hình phẳng được tô màu như *Hình 29*.

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.

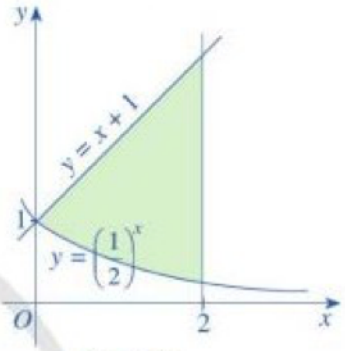


Hình 29

14 Cho đồ thị các hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = x + 1$ và hình phẳng được tô màu như *Hình 30*.

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.

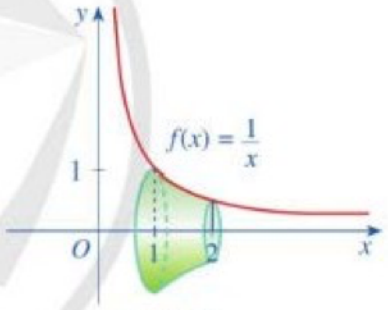


Hình 30

15 Cho đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và khối tròn xoay như *Hình 31*.

a) Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như *Hình 31*?

b) Tính thể tích khối tròn xoay đó.

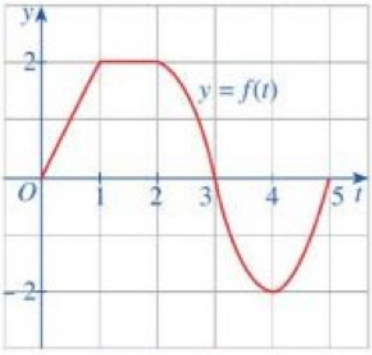


Hình 31

16 Cho đồ thị hàm số $y = f(t)$ như *Hình 32*.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 0$, $t = 2$.

b) Hỏi $\int_0^1 f(u)\,du$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường nào trong *Hình 32*?



Hình 32

CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Mục tiêu

Sau khi nghiên cứu xong chương này, học sinh có thể:

- Học sinh nắm được các kiến thức cơ bản về phương trình mặt phẳng; phương trình đường thẳng trong không gian;

- Trình bày được các công thức về phương trình mặt phẳng; phương trình đường thẳng trong không gian;

- Mô tả được dạng hình học của phương trình mặt phẳng và phương trình đường thẳng trong không gian;

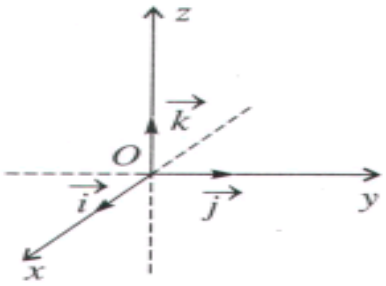
- Áp dụng và giải được các bài tập về Học sinh nắm được các kiến thức cơ bản về phương trình mặt phẳng; phương trình đường thẳng trong không gian;

§1. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ ĐỐI VỚI MỘT HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1. Tọa độ của điểm và của vectơ

1.1. Hệ toạ độ

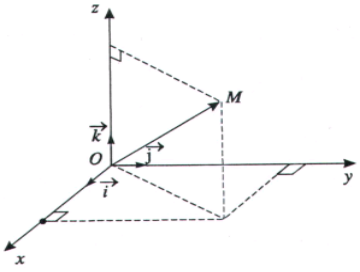
Hệ toạ độ Đề–các vuông góc trong không gian là hệ gồm 3 trục x′Ox, y′Oy, z′Oz vuông góc với nhau từng đôi một, với các vectơ đơn vị i , j , k .



$i^2 = j^2 = k^2 = 1$

$i.j = j.k = k.i = 0$

- **Toạ độ của một điểm**



M(x; y; z) $\Leftrightarrow OM = xi + yj + zk$

Ví dụ 1: Xác định các điểm M(0;0;0), A(0; 1; 2), B(1; 0; 2), C(1; 2; 0) trong không gian Oxyz.

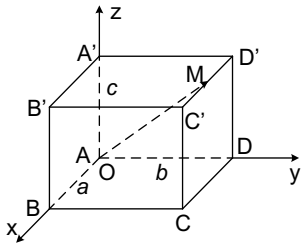
1.2. Toạ độ của vectơ

$a=(a_1;a_2;a_3) \Leftrightarrow a=a_1 i+a_2 j+a_3 k$

■Nhận xét

- $M(x;y;z) \Leftrightarrow OM=(x;y;z)$
- Toạ độ của các vectơ đơn vị: $i=(1;0;0), j=(0;1;0), k=(0;0;1)$
- Véc tơ- Không: $0=(0;0;0)$

Ví dụ 2: Trong KG Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có đỉnh A trùng với O, các vectơ AB, AD, AA' theo thứ tự cùng hướng với i, j, k và AB = a, AD = b, AA′ = c. Tính toạ độ các vectơ AB, AC, AC', AM, với M là trung điểm của cạnh C′D′.



2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Định lí: *Trong KG Oxyz, cho* $a=(a_1;a_2;a_3), b=(b_1;b_2;b_3)$. *Khi đó:*

i) $a+b=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$

ii) $a-b=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$

iii) $ka=k(a_1;a_2;a_3)=(ka_1;ka_2;ka_3)$ *(*$k \in$ *)*

Hệ quả

- $a=b \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ a_3=b_3 \end{cases}$
- *Với* $b \neq 0$

  a, b *cùng phương*

  $\Leftrightarrow \exists k \in \; : \begin{cases} a_1=kb_1 \\ a_2=kb_2 \\ a_3=kb_3 \end{cases}$

- *Cho* $A(x_A;y_A;z_A); B(x_B;y_B;z_B)$

  $AB=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

M là trung điểm của đoạn AB: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

3. Tích vô hướng

3.1. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Định lí: Trong không gian Oxyz, cho: $a=(a_1;a_2;a_3)$, $b=(b_1;b_2;b_3)$.

$$a.b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

3.2.Ứng dụng

a) Độ dài của một vectơ: $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

b) Khoảng cách giữa hai điểm: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

c) Góc giữa hai vectơ

$$\boxed{\cos(a,b)=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}$$

Từ đó suy ra $a\perp b\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

Ví dụ 3: Trong KG Oxyz, cho A(1;1;1), B(–1;2;3), C(0;4;–2).

a) Tìm toạ độ các vectơ AB, AC, BC, AM (M là trung điểm của BC).

b) Tìm toạ độ của vectơ $AC+3AB$, $AB-2AC$;

c) Tính các tích vô hướng $AB.AC$, $AB.(2AC)$

BÀI TẬP

Bài 1: Cho ba vectơ $a=(2;-5;3), b=(0;2;-1), c=(1;7;2)$.

a) Tính tọa độ của vectơ $d=4a-\frac{1}{3}b+3c$;

b) Tính tọa độ của vectơ $e=a-4b-2c$.

Bài 2: Cho ba điểm A = (1; -1; 1), B = (0; 1; 2), C = (1; 0; 1).

Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết A = (1; 0; 1), B = (2; 1; 2), D = (1; -1; 1), $C'=(4;5;-5)$.

Tính tọa độ còn lại của hình hộp.

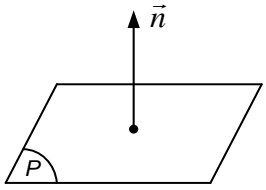
Bài 4: Tính

a) $a.b$ với $a=(3;0;-6)$, $b=(2;-4;0)$; b) $c.d$ với $c=(1;-5;2)$, $d=(4;3;-5)$.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

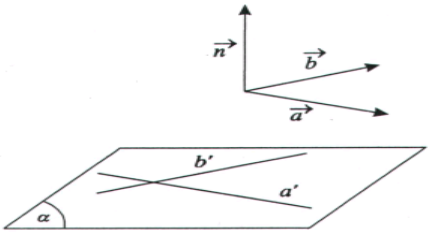
1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

1.1. Định nghĩa: Cho mp (P). Nếu vectơ $n \neq 0$ và có giá vuông góc với (P) thì n đgl **vectơ pháp tuyến** của (P).



Chú ý: Nếu n là VTPT của (P) thì kn (k ≠ 0) cũng là VTPT của (P).

Vectơ n xác định $n=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ đgl **tích có hướng** (hay **tích vectơ**) của hai vectơ a và b. Kí hiệu: $n=[a,b]$ hoặc $n=a\wedge b$.



1.2. Nhận xét:

- Tích có hướng của hai vectơ cũng là một vectơ.
- Cặp vectơ a, b ở trên đgl **cặp VTCP** của (P).

Ví dụ 1: Tìm một VTPT của mặt phẳng:

a) Qua A(2; –1; 3), B(4; 0; 1), C(–10; 5; 3).

b) Qua A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2).

Giải

a) $AB=(2;1;-2)$; $AC=(-12;6;0)$; $BC=(-14;5;2)$

$\Rightarrow [\mathrm{AB},\mathrm{AC}]=[\mathrm{AB},\mathrm{BC}]=(12;24;24)=(1;2;2).$

b) $AB=(-2;2;0); AC=(-2;0;2); BC=(-2;2;0)$

$[AB,AC]=[AB,BC]=(12;24;24)$

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

2.1. Định nghĩa: Phương trình $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó $A^2+B^2+C^2\neq 0$, được gọi là **phương trình tổng quát** của mặt phẳng.

- **Nhận xét:**

a) (P): $Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow$ (P) có 1 VTPT là $n=(A;B;C)$.

b) PT của (P) qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTPT $n=(A;B;C)$ là: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Ví dụ 2: Hãy tìm một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α): 4x – 2y - 6z + 7 = 0.

Ví dụ 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (MNP) với M(1; 1; 1), N(4; 3; 2), P(5; 2; 1).

Giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (3;2;1); \overrightarrow{MP} = (4;1;0)$.

Gọi $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = (-1;4;-5)$.

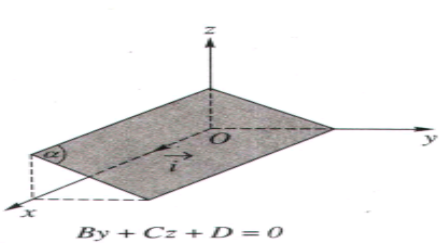
Phương trình mặt phẳng (MNP) đi qua M(1; 1; 1) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1;4;-5)$ là: -1(x-1) + 4(y-1) -5(z-1) = 0 $\Leftrightarrow$ -x +4y -5z + 2 = 0

2.2. Các trường hợp riêng

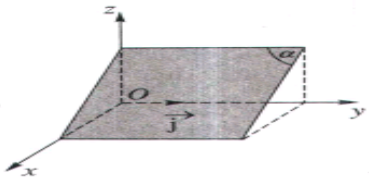
a) D = 0 $\Leftrightarrow$ (P) đi qua O.

b) A = 0 $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (P) \supset Ox \\ (P) \quad Ox \end{bmatrix}$

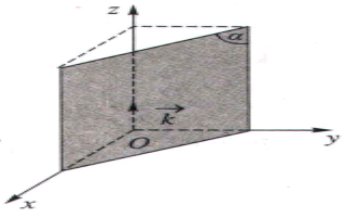
c) A = B = 0 $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (P) \quad (Oxy) \\ (P) \equiv (Oxy) \end{bmatrix}$



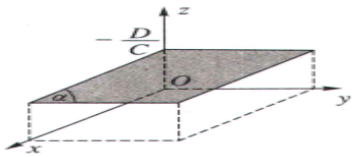
$By + Cz + D = 0$



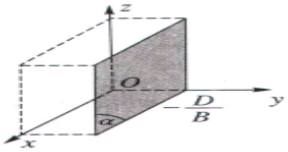
$Ax + Cz + D = 0$



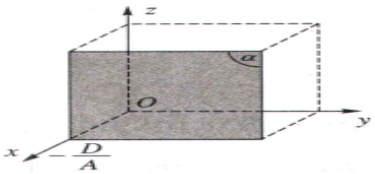
$Ax + By + D = 0$



$Cz + D = 0$



$By + D = 0$

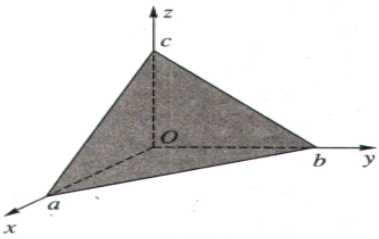


$Ax + D = 0$

Nhận xét: Nếu các hệ số A, B, C, D đều khác 0 thì có thể đưa phương trình của (P) về dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (2)$$

(2) được gọi là **phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn.**



3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

3.1. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong KG cho 2 mp (P_1), (P_2):

$(P_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$(P_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

- $(P_1) \quad (P_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1;B_1;C_1) = k(A_2;B_2;C_2) \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$

- $(P_1) \equiv (P_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1;B_1;C_1) = k(A_2;B_2;C_2) \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$

- (P_1) cắt (P_2)

$\Leftrightarrow (A_1;B_1;C_1) \neq k(A_2;B_2;C_2)$

Ví dụ 4: Cho hai mp (P_1) và (P_2):

(P_1): $x - my + 4z + m = 0$

(P_2): $x - 2y + (m+2)z - 4 = 0$

Tìm m để (P_1) và (P_2):

a) song song

b) trùng nhau

c) cắt nhau.

Ví dụ 5: Viết PT mp (P) đi qua điểm M(1; –2; 3) và song song với mp (Q): $2x - 3y + z + 5 = 0$.

Giải

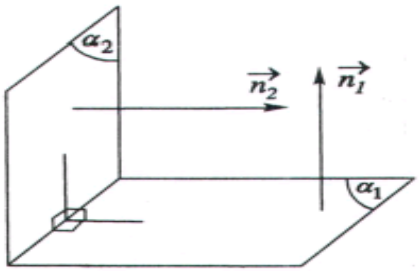
Vì (P) // (Q) nên (P) có VTPT $n = (2;-3;1)$.

$\Rightarrow$ (P): $2(x-1) - 3(y+2) + 1(z-3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 3y + z - 11 = 0$.

3.2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

$(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$



Ví dụ 6: Xác định m để hai mp sau vuông góc với nhau:

(P): $2x - 7y + mz + 2 = 0$

(Q): $3x + y - 2z + 15 = 0$

Giải

$(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 7: Viết phương trình mp (P) đi qua hai điểm A(3; 1; –1), B(2; –1; 4) và vuông góc với mp (Q): $2x - y + 3z - 1 = 0$.

Giải

(P) có cặp VTCP là:

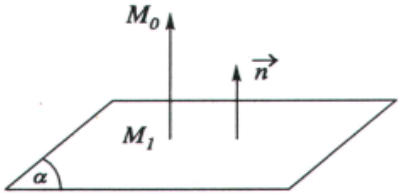
$AB=(-1;-2;5)$ và $n_Q=(2;-1;3)$; $n_P=\left[AB,n_Q\right]=(-1;13;5)$

$\Rightarrow$ (P): $x-13y-5z+5=0$.

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Định lí: Trong KG Oxyz, cho (P): $Ax+By+Cz+D=0$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

$$d(M_0;(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Ví dụ 8: Tính khoảng cách từ điểm M đến mp(P):

a) M(1; –2; 13) ; (P): $2x-2y-z+3=0$ b) M(2; –3; 5); (P): $2x-y+2z-6=0$

c) M(1; –4; –2); (P): $x+y+5z-14=0$ d) M(3; 1; –2); (P) ≡ (Oxy)

Giải

a) $d(M,(P))=\frac{4}{3}$; b) $d(M,(P))=\frac{11}{3}$

c) $d(M,(P))=\sqrt{27}$; d) $d(M,(P))=2$

Ví dụ 9: Tính khoảng cách giữa hai mp song song (P) và (Q):

a) (P): $x+2y+2z+11=0$; (Q): $x+2y+2z+2=0$

b) (P): $4x-y+8z+1=0$; (Q): $4x-y+8z+5=0$

Giải

Bằng khoảng cách từ 1 điểm trên mp này đến mp kia.

a) Lấy M(0; 0; –1) ∈ (Q).

$d((P),(Q))=d(M,(P))=3$

b) Lấy M(0; 1; 0) ∈ (P)

$$d((P),(Q))=d(M,(Q))=\frac{4}{9}$$

Ví dụ 10: Viết pt mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mp (P):

a) $\begin{cases}I(3;-5;-2)\\(P):2x-y-3z+1=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}I(1;4;7)\\(P):6x+6y-7z+42=0\end{cases}$

Giải

R = $d(I,(P))$

a) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=\frac{162}{7}$

b) $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=\left(\frac{23}{11}\right)^2$

Ví dụ 11: Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M:

a) $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$
$M(-1;3;0)$

b) $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$
$M(7;-1;5)$

Giải

Ta có: $n=IM$

a) (P): $-4(x+1)+2(y-3)+2z=0$

b) $(P):6(x-7)+2(y+1)+3(z-5)=0$.

VI. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG THỰC TIỄN

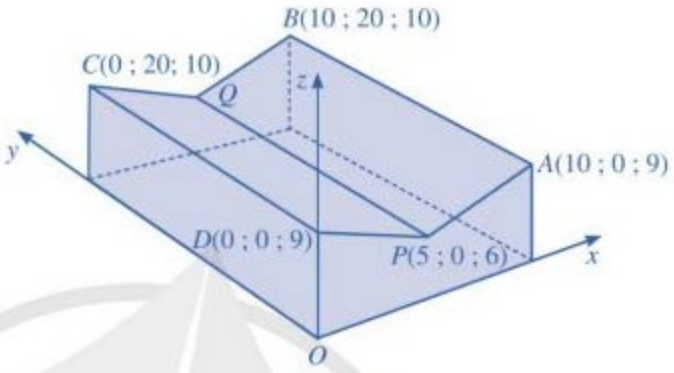
Phương trình mặt phẳng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn như trong thiết kế xây dựng, tính toán các yếu tố kĩ thuật, ... Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 15 *Hình 17* minh hoạ hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất.

a) Lập phương trình của hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà.

b) Tìm toạ độ của điểm Q.

c) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{PQ}$.



Hình 17

Giải

a) Hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà là (ABP) và (CDP).

• Do mặt phẳng (ABP) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0 ; 20 ; 1)$, $\overrightarrow{AP} = (-5 ; 0 ; -3)$ nên có một vectơ pháp tuyến là:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}\right] = \left(\begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 20 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-60 ; -5 ; 100).$$

Mà mặt phẳng (ABP) đi qua điểm $A(10 ; 0 ; 9)$ nên có phương trình là:

$$-60(x-10) - 5(y-0) + 100(z-9) = 0 \Leftrightarrow 12x + y - 20z + 60 = 0.$$

• Do mặt phẳng (CDP) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{DP} = (5 ; 0 ; -3)$, $\overrightarrow{DC} = (0 ; 20 ; 1)$ nên có một vectơ pháp tuyến là:

$$\left[\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{DC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 20 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{vmatrix}\right) = \left(60 ; -5 ; 100\right).$$

Mà mặt phẳng (CDP) đi qua điểm $D(0 ; 0 ; 9)$ nên có phương trình là:

$$60(x-0) - 5(y-0) + 100(z-9) = 0 \Leftrightarrow 12x - y + 20z - 180 = 0.$$

b) Vì các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất nên với hệ toạ độ trên ta có $Q(x ; 20 ; z)$.

Do điểm Q thuộc mặt phẳng (ABP) nên toạ độ của điểm Q thoả mãn:

$$12x + 20 - 20z + 60 = 0, \text{ tức là } 3x - 5z = -20.$$

VI. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG THỰC TIỄN

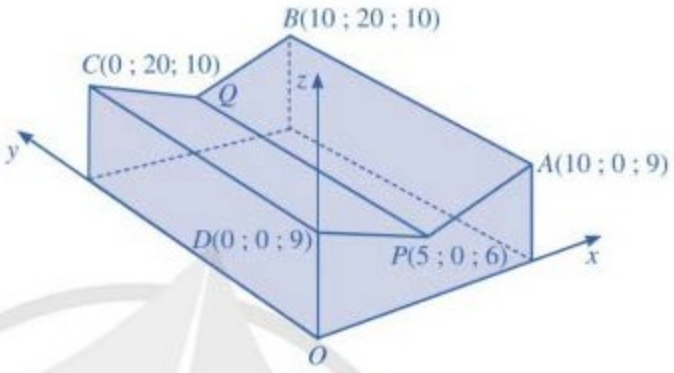
Phương trình mặt phẳng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn như trong thiết kế xây dựng, tính toán các yếu tố kĩ thuật, ... Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 15 *Hình 17* minh hoạ hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất.

a) Lập phương trình của hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà.

b) Tìm toạ độ của điểm Q.

c) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{PQ}$.



Hình 17

Giải

a) Hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà là (ABP) và (CDP).

• Do mặt phẳng (ABP) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0 ; 20 ; 1)$, $\overrightarrow{AP} = (-5 ; 0 ; -3)$ nên có một vectơ pháp tuyến là:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}\right] = \left(\begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 20 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-60 ; -5 ; 100).$$

Mà mặt phẳng (ABP) đi qua điểm $A(10 ; 0 ; 9)$ nên có phương trình là:

$$-60(x - 10) - 5(y - 0) + 100(z - 9) = 0 \Leftrightarrow 12x + y - 20z + 60 = 0.$$

• Do mặt phẳng (CDP) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{DP} = (5 ; 0 ; -3)$, $\overrightarrow{DC} = (0 ; 20 ; 1)$ nên có một vectơ pháp tuyến là:

$$\left[\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{DC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 20 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{vmatrix}\right) = \left(60 ; -5 ; 100\right).$$

Mà mặt phẳng (CDP) đi qua điểm $D(0 ; 0 ; 9)$ nên có phương trình là:

$$60(x - 0) - 5(y - 0) + 100(z - 9) = 0 \Leftrightarrow 12x - y + 20z - 180 = 0.$$

b) Vì các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất nên với hệ toạ độ trên ta có $Q(x ; 20 ; z)$.

Do điểm Q thuộc mặt phẳng (ABP) nên toạ độ của điểm Q thoả mãn:

$$12x + 20 - 20z + 60 = 0, \text{ tức là } 3x - 5z = -20.$$

Mặt khác, vì $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ cùng hướng nên tồn tại số thực $t > 0$ sao cho $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$. Do

$\overrightarrow{AC} = (x_C - 3 ; y_C + 2,5 ; z_C - 0,5)$;

$\overrightarrow{AB} = (3-3 ; 7,5+2,5 ; 0-0,5) = (0 ; 10 ; -0,5)$

nên $\begin{cases} x_C - 3 = 0t \\ y_C + 2,5 = 10t \\ z_C - 0,5 = -0,5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 10t - 2,5 \\ z_C = -0,5t + 0,5. \end{cases}$

Vì $C \in (\alpha)$ nên $3 - (10t - 2,5) + 10(-0,5t + 0,5) = 9 \Leftrightarrow t = 0,1$. Suy ra $C(3 ; -1,5 ; 0,45)$.

Vậy tại vị trí C, độ cao của máy bay là 0,45 km.

BÀI TẬP

1. Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $-x^2 + 2y + 3z + 4 = 0$.

B. $2x - y^2 + z + 5 = 0$.

C. $x + y - z^2 + 6 = 0$.

D. $3x - 4y - 5z + 1 = 0$.

2. Mặt phẳng $x + 2y - 3z + 4 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}_1 = (2 ; -3 ; 4)$.

B. $\vec{n}_2 = (1 ; 2 ; 3)$.

C. $\vec{n}_3 = (1 ; 2 ; -3)$.

D. $\vec{n}_4 = (1 ; 2 ; 4)$.

3. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(3 ; -4 ; 5)$ và nhận $\vec{n} = (2 ; 7 ; -1)$ làm vectơ pháp tuyến.

4. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $K(-1 ; 2 ; 3)$ và nhận hai vectơ $\vec{u} = (1 ; 2 ; 3)$, $\vec{v} = (4 ; 5 ; 6)$ làm cặp vectơ chỉ phương.

5. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua:

a) Điểm $I(3 ; -4 ; 1)$ và vuông góc với trục Ox;

b) Điểm $K(-2 ; 4 ; -1)$ và song song với mặt phẳng (Ozx);

c) Điểm $K(-2 ; 4 ; -1)$ và song song với mặt phẳng (Q): $3x + 7y + 10z + 1 = 0$.

6. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(0 ; 4 ; 0)$, $C(2 ; 2 ; 0)$.

7. Lập phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn của mặt phẳng (P), biết (P) đi qua ba điểm $A(5 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 3 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 6)$.

8.Viết phương trình của mặt phẳng:

a) Đi qua điểm M(1; -2; 4) và nhận $n=(2;3;5)$ làm vectơ pháp tuyến;

b) Đi qua điểm A(0; -1; 2) và song song với giá của mỗi vectơ $u=(3;2;1)$ và $v=(-3;0;1)$

c) Đi qua 3 điểm A(-3; 0; 0), B(0; -2; 0) và C(0; 0; -1).

9. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với A(2; 3; 7), B(4; 1; 3).

10.

a) Lập phương trình của các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Oxz).

b) Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm M(2; 6; -3) và lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ.

11. Lập phương trình của mặt phẳng:

a) Chứa trục Ox và điểm P(4; -1; 2);

b) Chứa trục Oy và điểm Q(1; 4; -3);

c) Chứa trục Oz và điểm R(3; -4; 7).

12. Cho tứ diện có các đỉnh là A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6).

a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD).

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD.

13. Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M(2; -1; 2) và song song với mặt phẳng (β): 2x –y + 3z + 4 = 0.

14. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A(1; 0; 1), B(5; 2; 3) và vuông góc với mặt phẳng (β): 2x –y + z -7 =0.

15. Xác định các giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây là một cặp mặt phẳng song song với nhau:

a) 2x+ my +3z -5 = 0 và nx – 8y -6z + 2 = 0;

b) 3x -5y + mz -3 = 0 và 2x + ny – 3z +1 = 0.

16. Tính khoảng cách từ điểm A(2; 4; -3) lần lượt đến các mặt phẳng sau:

a) 2x – y + 2z - 9 = 0;

b) 12x – 5z +5 = 0;

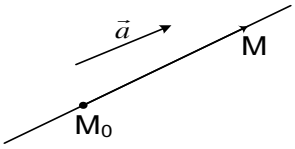
c) x = 0.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Phương trình tham số của đường thẳng

1.1. Định lí: Trong KG Oxyz, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $a=(a_1;a_2;a_3)$ làm VTCP. Điều kiện cần và đủ để điểm M(x; y; z) nằm trên Δ là có một số thực t sao cho:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$



1.2. Định nghĩa: Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $a=(a_1;a_2;a_3)$ là phương trình có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

trong đó t là tham số.

Chú ý: Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì có thể viết phương trình của Δ dưới dạng chính tắc:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}.$$

Ví dụ 1: Viết PTTS của đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 và có VTCP a, với:

a) $M(1;2;-3), a=(-1;3;5)$ b) $M(0;-2;5), a=(0;1;4)$

c) $M(1;3;-1), a=(1;2;-1)$ d) $M(3;-1;-3), a=(1;-2;0)$

Ví dụ 2: Cho các điểm A(2;3;–1), B(1; 2; 4), C(2; 1; 0), D(0;1;2). Viết PTTS của các đường thẳng AB, AC, AD, BC.

Giải

$AB=(-1;-1;5)$, A(2;3;–1)

$\Rightarrow$ PTTS của AB: $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 3-t \\ z = -1+5t \end{cases}$

Các phương trình đường thẳng còn lại HS tự giải tương tự.

Ví dụ 3: Viết PTTS của Δ đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P):

a) $A(-2;4;3), (P): 2x-3y+6z+19=0$; b) $A(3;2;1), (P): 2x-5y+4=0$;

c) A(1; –1; 0), (P)≡(Oxy); d) A(2; –3; 6), (P)≡(Oyz);

Giải

a) Vì Δ ⊥ (P) nên $a=n=(2;-3;6)$

$\Rightarrow$ PTTS của Δ: $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 4-3t \\ z = 3+6t \end{cases}$

Ví dụ 4: Cho đường thẳng Δ có PTTS. Hãy xác định một điểm M ∈ Δ và một VTCP của Δ.

$$\Delta: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

Giải

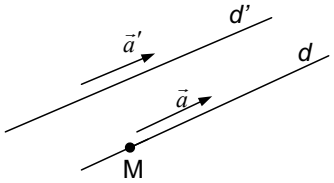
Cho $t = t_0$, thay vào PT của Δ. Với $t = 0 \Rightarrow M(-1; 3; 5) \in \Delta$.

2. Điều kiện để hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau

2.1. Điều kiện để hai đường thẳng song song

Gọi $a = (a_1; a_2; a_3), a' = (a_1'; a_2'; a_3')$ lần lượt là VTCP của d và d′. Lấy $M(x_0; y_0; z_0) \in d$.

$$d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = ka' \\ M \notin d' \end{cases}$$



Đặc biệt: $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = ka' \\ M \in d' \end{cases}$

Ví dụ 5: Chứng minh hai thẳng sau song song song:

a) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}; d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 2 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases}$

b) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}; d': \begin{cases} x = -1 - 2t' \\ y = 2 - t' \\ z = -3 - 2t' \end{cases}$

c)

$$d: \frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{3}$$

$$d': \frac{x-7}{6} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-5}{2}$$

Giải

a) $a = (1; 2; -1)$, $a' = (2; 4; -2)$

$\Rightarrow a, a'$ cùng phương.

Ví dụ 6: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d cho trước:

a) A(2; –5; 3), d: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$

b) A(1; –3; 2), d: $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$

c) A(4; –2; 2), d: $\frac{x+2}{4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{3}$

d) A(5; 2; –3), d: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4}$

Giải

Vì Δ // d nên Δ cũng nhận VTCP của d làm VTCP.

a) Phương trình đường thẳng đi qua A(2; –5; 3) và có VTCP $u_d = (-3;4;-2)$ là:

$$\begin{cases} x = 2-3t \\ y = -5+4t \\ z = 3-2t \end{cases}$$

b) , c) , d) giải tương tự như câu a).

2.2. Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau

Cho 2 đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, \ d': \begin{cases} x = x_0' + t'a_1' \\ y = y_0' + t'a_2' \\ z = z_0' + t'a_3' \end{cases}$$

d và d′ cắt nhau ⇔ hệ pt ẩn t, t′ sau có đúng 1 nghiệm:

$$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x_0' + t'a_1' \\ y_0 + ta_2 = y_0' + t'a_2' \\ z_0 + ta_3 = z_0' + t'a_3' \end{cases} (*)$$

Ví dụ 7: Tìm giao điểm của hai đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+3t \\ z = 3-t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 2-2t' \\ y = -2+t' \\ z = 1+3t' \end{cases}$

b) $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 1-t \end{cases}$

$d': \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

c) $d: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1-2t \\ z = 3+t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 1+t' \\ y = 2t' \\ z = 4+t' \end{cases}$

d) $d: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -2+3t \\ z = 6+4t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 5+t' \\ y = -1-4t' \\ z = 20+t' \end{cases}$

Ví dụ 8: Tìm m để hai đường thẳng d và d′ cắt nhau. Khi đó tìm toạ độ giao điểm của chúng

a) $d: \begin{cases} x = 1+mt \\ y = t \\ z = -1+2t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 1-t' \\ y = 2+2t' \\ z = 3-t' \end{cases}$

b) $d: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+2t \\ z = m+t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 2+t' \\ y = 1+t' \\ z = 2-3t' \end{cases}$

2.3. Điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau

Cho 2 đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, \ d': \begin{cases} x = x_0' + t'a_1' \\ y = y_0' + t'a_2' \\ z = z_0' + t'a_3' \end{cases}$$

d và d′ chéo nhau ⇔ hai VTCP không cùng phương và hệ pt ẩn t, t′ sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x_0^{'} + t^{'}a_1^{'} \\ y_0 + ta_2 = y_0^{'} + t^{'}a_2^{'} \\ z_0 + ta_3 = z_0^{'} + t^{'}a_3^{'} \end{cases} (*)$$

- $d \perp d' \Leftrightarrow a \perp a'$.

Ví dụ 9: Chứng tỏ các cặp đường thẳng sau chéo nhau:

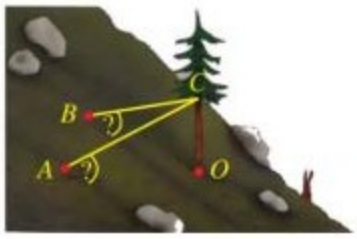
a) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$

b) $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 + t' \\ z = 3 - 2t' \end{cases}$

c) $d: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2}$
$d': \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{4}$

d) $d: \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$
$d': \dfrac{x-3}{-7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

Ví dụ 12 Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như *Hình 34*. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ toạ độ phù hợp, các điểm O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có toạ độ tương ứng là $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $A(3\ ;\ -4\ ;\ 2)$, $B(-5\ ;\ -2\ ;\ 1)$, đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $(0\ ;\ 0\ ;\ 5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng.



Hình 34

a) Tính độ dài của mỗi dây neo được sử dụng.

b) Tính góc tạo bởi mỗi dây neo và mặt phẳng sườn núi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

Giải

a) Do điểm $C(0\ ;\ 0\ ;\ 5)$ nên $AC = \sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2+(2-5)^2} = \sqrt{34}$ (m);

$$BC = \sqrt{(-5-0)^2+(-2-0)^2+(1-5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ (m)}.$$

b) Ta có: $\overrightarrow{OA} = (3\ ;\ -4\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{OB} = (-5\ ;\ -2\ ;\ 1)$ nên

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = \left(\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}\right) = (0\ ;\ -13\ ;\ -26).$$

Vì thế, vectơ $\vec{n} = (0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OAB).

Mặt khác, do $\overrightarrow{CA} = (3\ ;\ -4\ ;\ -3)$, $\overrightarrow{BC} = (5\ ;\ 2\ ;\ 4)$ nên ta có:

- $\sin(CA, (OAB)) = \left|\cos(\overrightarrow{CA}, \vec{n})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{CA} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\left|3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-3) \cdot 2\right|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{170}}$,

suy ra $(CA, (OAB)) \approx 50^\circ$. Vậy góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là khoảng 50°.

- $\sin(BC, (OAB)) = \left|\cos(\overrightarrow{BC}, \vec{n})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\left|5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2\right|}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{2}{3}$,

suy ra $(BC, (OAB)) \approx 42^\circ$. Vậy góc tạo bởi dây neo BC và mặt phẳng sườn núi là khoảng 42°.

Ví dụ 13 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10\ ;\ 3\ ;\ 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2\ ;\ -2\ ;\ 1)$ với tốc độ là 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét) (*Hình 35*).

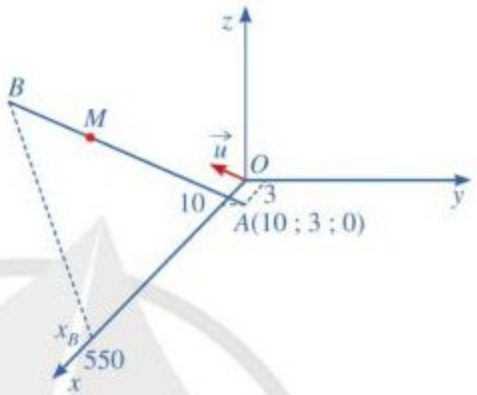
a) Viết phương trình đường cáp.

b) Giả sử sau t (s) kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M. Tìm toạ độ của điểm M.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Tìm độ dài quãng đường AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) góc bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)



Hình 35

Giải

a) Phương trình chính tắc của đường cáp là: $\frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$.

b) Do tốc độ chuyển động của cabin là 4,5 m/s nên độ dài AM bằng $4{,}5t$ (m). Vì vậy $|\overrightarrow{AM}| = 4{,}5t$ ($t \geq 0$).

Do hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{u}$ là cùng phương và cùng hướng nên $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ với k là số thực dương nào đó. Suy ra: $|\overrightarrow{AM}| = k|\vec{u}| = k \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 3k$. Do đó $3k = 4{,}5t$. Suy ra $k = \frac{3t}{2}$. Vì thế, ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{3t}{2}\vec{u} = \left(3t\,;-3t\,;\frac{3t}{2}\right)$.

Gọi toạ độ của điểm M là $(x_M\,;y_M\,;z_M)$.

Do $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A\,;\,y_M - y_A\,;\,z_M - z_A) = \left(3t\,;-3t\,;\frac{3t}{2}\right)$

nên $\begin{cases} x_M = 3t + x_A \\ y_M = -3t + y_A \\ z_M = \frac{3t}{2} + z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3t + 10 \\ y_M = -3t + 3 \\ z_M = \frac{3t}{2}. \end{cases}$

Vậy điểm M có toạ độ là $\left(3t+10\,;-3t+3\,;\frac{3t}{2}\right)$.

BÀI TẬP

1. Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm M(5; 4; 1) và có vectơ chỉ phương $\mathrm{a} = (2;-3;1)$;

b) d đi qua điểm A(2; -1; 3) và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x+ y – z + 5 = 0$;

c) d đi qua điểm B(2; 0; -3) và song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3+3t \\ z = 4t \end{cases}$;

d) d đi qua hai điểm P(1; 2 ; 3) và Q(5; 4; 4).

2. Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$

lần lượt trên các mặt phẳng sau:

a) (Oxy); b) (Oyz).

3. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau:

a) $d: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -2+3t \\ z = 6+4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 5+t' \\ y = -1-4t' \\ z = 20+t' \end{cases}$

b) $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3-t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1+2t' \\ y = -1+2t' \\ z = 2-2t' \end{cases}$.

4. Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau:

$d: \begin{cases} x = 1+at \\ y = t \\ z = -1+2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1-t' \\ y = 2+2t' \\ z = 3-t' \end{cases}$.

5. Tìm số giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) $d: \begin{cases} x = 12+4t \\ y = 9+3t \\ z = 1+t \end{cases}$ và (α): $3x+ 5y- z- 2 = 0$;

b) $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+2t \end{cases}$ và (α): $x+ 3y + z + 1 = 0$;

c) $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2-3t \end{cases}$ và (α): $x+ y + z - 4 = 0$;

6. Tính khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -1+3t \\ z = -1+2t \end{cases}$ và mặt phẳng

(α): $2x - y + z + 3 = 0$.

7. Cho điểm A(1; 0 ; 0) và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$.

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ.

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ.

8. Cho điểm M(1; 4; 2) và mặt phẳng (α): $x + y + z - 1 = 0$.

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α).

b) Tìm tọa độ điểm M đối xứng với M qua mặt phẳng (α).

c) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

9. Cho hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1 \end{cases}.$$

Chứng minh d và d' chéo nhau.

Bài 4: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

(Nguồn:https://shutterstock.com)

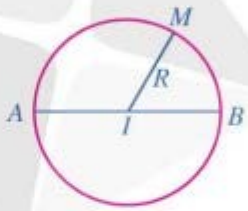
Hình 38

Hình 38 mô tả một mặt cầu trong không gian.

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, phương trình của mặt cầu được lập như thế nào?

I. ĐỊNH NGHĨA MẶT CẦU

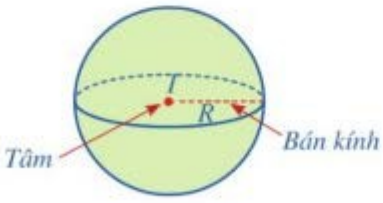
1 Nếu quay đường tròn tâm I bán kính R quanh đường kính AB một vòng (*Hình 39*) thì hình tạo thành được gọi là mặt cầu. Những điểm thuộc mặt cầu đó cách I một khoảng bằng bao nhiêu?

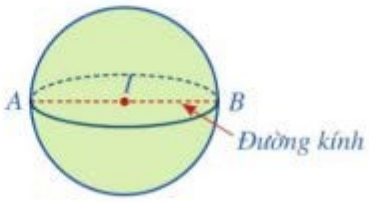


Hình 39

(Nguồn: https://www.shutterstock.com)

Cho trước điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng bằng R.





Nhận xét

- Điểm M thuộc mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM = R$.
- Điểm M nằm trong mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM < R$.
- Điểm M nằm ngoài mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM > R$.

B

Ví dụ 1 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(-2\,;\,1\,;\,5)$ bán kính 3. Các điểm $A(10\,;\,1\,;\,2)$, $B(0\,;\,1\,;\,4)$ và $C(0\,;\,3\,;\,4)$ nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu đó?

Giải

Do $IA = \sqrt{(10-(-2))^2+(1-1)^2+(2-5)^2} = \sqrt{153} > 3$ nên điểm $A(10\,;\,1\,;\,2)$ nằm ngoài mặt cầu đó.

Vì $IB = \sqrt{(0-(-2))^2+(1-1)^2+(4-5)^2} = \sqrt{5} < 3$ nên điểm $B(0\,;\,1\,;\,4)$ nằm trong mặt cầu đó.

Do $IC = \sqrt{(0-(-2))^2+(3-1)^2+(4-5)^2} = \sqrt{9} = 3$ nên điểm $C(0\,;\,3\,;\,4)$ nằm trên mặt cầu đó.

1 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $I(1\,;\,2\,;\,3)$ và mặt cầu tâm I đi qua điểm $A(0\,;\,4\,;\,5)$. Tính bán kính R của mặt cầu đó.

Trong bài học này, nếu không có chú ý gì thêm thì ta hiểu các bài toán được xét trong không gian với hệ toạ độ Oxyz.

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Cho hai điểm $M(x\,;\,y\,;\,z)$ và $I(a\,;\,b\,;\,c)$.

a) Viết công thức tính khoảng cách giữa hai điểm M và I.

b) Nêu mối liên hệ giữa x, y và z để điểm M nằm trên mặt cầu tâm I bán kính R.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(a\,;\,b\,;\,c)$ bán kính R là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Ví dụ 2 Viết phương trình của mặt cầu, biết:

a) Tâm $I(1\,;\,2\,;\,3)$ bán kính $R = 10$;

b) Tâm $I(3\,;\,-1\,;\,-5)$ và đi qua điểm $B(0\,;\,2\,;\,1)$.

Giải

a) Phương trình của mặt cầu tâm $I(1\,;\,2\,;\,3)$ bán kính $R = 10$ là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=100$.

b) Bán kính mặt cầu là:

$R = IB = \sqrt{(0-3)^2+(2+1)^2+(1+5)^2} = \sqrt{54}$.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(3\,;\,-1\,;\,-5)$ bán kính $R = \sqrt{54}$ là: $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+5)^2=54$.

2 Tìm tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình: $x^2+(y+5)^2+(z+1)^2=2$.

3 Viết phương trình của mặt cầu, biết:

a) Tâm O bán kính R với O là gốc toạ độ;

b) Đường kính AB với $A(1\,;\,2\,;\,1)$, $B(3\,;\,4\,;\,7)$.

Nhận xét

• Cho mặt cầu tâm $I(a\,;\,b\,;\,c)$ bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Ta có thể viết phương trình đó về dạng:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \text{ với } d=a^2+b^2+c^2-R^2.$$

Vậy mỗi mặt cầu đều có phương trình dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

• Ngược lại, xét phương trình có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Ta có: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2+z^2-2cz+c^2=a^2+b^2+c^2-d$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d.$

Do đó, phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ xác định một mặt cầu khi và chỉ khi $a^2+b^2+c^2-d>0$. Ngoài ra, nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì phương trình đó xác định mặt cầu tâm $I(a\,;\,b\,;\,c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Ví dụ 3 Mỗi phương trình sau có là phương trình mặt cầu hay không? Vì sao?

a) $2x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$;

b) $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$.

Giải

a) Phương trình $2x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì các hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

b) Phương trình $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì không có biểu thức z^2.

Ví dụ 4 Phương trình nào sau đây là phương trình của một mặt cầu? Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (nếu có).

a) $x^2+y^2+z^2-4x+10y-2z+14=0$;

b) $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+20=0$.

4 Chứng minh rằng phương trình $x^2+y^2+z^2-6x-2y-4z-11=0$ là phương trình của một mặt cầu. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

Giải

a) Ta có: $x^2+y^2+z^2-4x+10y-2z+14=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\,.\,2\,.\,x+2\,.\,5\,.\,y-2\,.\,1\,.\,z+14=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=16.$

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(2\ ;\ -5\ ;\ 1)$ bán kính $R=\sqrt{16}=4$.

b) Ta có: $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+20=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\,.\,1\,.\,x+2\,.\,2\,.\,y-2\,.\,3\,.\,z+20=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=-6<0.$

Vậy phương trình đã cho không là phương trình mặt cầu.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Phương trình mặt cầu có nhiều ứng dụng trong thực tiễn như trong thiết kế xây dựng, tính toán các yếu tố kĩ thuật,... Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ dưới đây.

Ví dụ 5 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (*Hình 40*) được đặt ở vị trí $I(-3\ ;\ 2\ ;\ 7)$.

(*Nguồn:https://shutterstock.com*)
Hình 40

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

b) Điểm $A(-2\ ;\ 1\ ;\ 8)$ nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu đó? Nếu người dùng điện thoại ở điểm $A(-2\ ;\ 1\ ;\ 8)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

c) Điểm $B(2\,;3\,;4)$ nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu đó? Nếu người dùng điện thoại ở điểm $B(2\ ;\ 3\ ;\ 4)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

Giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=9.$$

b) Ta có: $IA=\sqrt{[-2-(-3)]^2+(1-2)^2+(8-7)^2}=\sqrt{3}<3.$

Vì $IA<R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở điểm $A(-2\ ;\ 1\ ;\ 8)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

c) Ta có: $IB=\sqrt{[2-(-3)]^2+(3-2)^2+(4-7)^2}=\sqrt{35}>3.$

Vì $IB>R$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở điểm $B(2\,;3\,;4)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Ví dụ 6 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng (*Hình 41*) được đặt ở vị trí $I(21 ; 35 ; 50)$.

(*Nguồn:https://shutterstock.com*)

Hình 41

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km.

b) Nếu người đi biển ở vị trí $C(42 ; 37 ; 0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng hay không?

c) Nếu người đi biển ở vị trí $D(5\,121 ; 658 ; 0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng hay không?

Giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là:

$$(x-21)^2+(y-35)^2+(z-50)^2=4\,000^2.$$

b) Ta có: $IC=\sqrt{(42-21)^2+(37-35)^2+(0-50)^2}$

$=\sqrt{2\,945}<4000.$

Vì $IC < R$ nên điểm C nằm trong mặt cầu. Vậy người đi biển ở điểm $C(42 ; 37 ; 0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Ta có: $ID=\sqrt{(5\,121-21)^2+(658-35)^2+(0-50)^2}$

$=\sqrt{26\,400\,629}>4\,000.$

Vì $ID > R$ nên điểm D nằm ngoài mặt cầu.Vậy người đi biển ở điểm $D(5\,121 ; 658 ; 0)$ không thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

5 Trong *Ví dụ 6*, giả sử người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21 ; 35 ; 50)$ đến vị trí $D(5\,121 ; 658 ; 0)$. Tìm vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng ID sao cho người đi biển còn có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

BÀI TẬP

1. Tâm của mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=16$ có toạ độ là:

A. $(-2 ; -3 ; 4)$. B. $(2 ; 3 ; -4)$. C. $(2 ; -3 ; -4)$. D. $(2 ; -3 ; 4)$.

2. Bán kính của mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ bằng:

A. 3 B. 9. C. 81. D. $\sqrt{3}$.

3. Mặt cầu (S) tâm $I(-5;-2;3)$ bán kính 4 có phương trình là:

A. $(x-5)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$. B. $(x-5)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$.

C. $(x+5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. D. $(x+5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

4. Cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-7)^2=100$.

a) Xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

b) Mỗi điểm $A(1;1;1)$, $B(9;4;7)$, $C(9;9;10)$ nằm trong, nằm ngoài hay nằm trên mặt cầu đó?

5. Cho phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-2y-10z+2=0$.

Chứng minh rằng phương trình trên là phương trình của một mặt cầu. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

6. Lập phương trình mặt cầu (S) trong mỗi trường hợp sau:

a) (S) có tâm $I(3;-7;1)$ và bán kính $R=2$;

b) (S) có tâm $I(-1;4;-5)$ và đi qua điểm $M(3;1;2)$;

c) (S) có đường kính là đoạn thẳng CD với $C(1;-3;-1)$ và $D(-3;1;2)$.

7. Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (*Hình 42*).

Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.
(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)
Hình 42

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, toạ độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm toạ độ. Như vậy, điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Ta xét một ví dụ cụ thể như sau:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(3;-1;6)$, $B(1;4;8)$, $C(7;9;6)$, $D(7;-15;18)$. Tìm toạ độ của điểm M trong không gian biết khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$.

ÔN TẬP CHƯƠNG

1. Mặt phẳng (P): $3x - 4y + 5z - 6 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}_1 = (3\,;\,4\,;\,5)$. B. $\vec{n}_2 = (3\,;\,-4\,;\,5)$.

C. $\vec{n}_3 = (-3\,;\,4\,;\,5)$. D. $\vec{n}_4 = (3\,;\,4\,;\,-5)$.

2. Đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{6} = \dfrac{z-1}{9}$ có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}_1 = (2\,;\,3\,;\,1)$. B. $\vec{u}_2 = (6\,;\,3\,;\,9)$.

C. $\vec{u}_3 = (3\,;\,9\,;\,6)$. D. $\vec{u}_4 = (1\,;\,2\,;\,3)$.

3. a) Mặt cầu (S): $(x-11)^2 + (y-12)^2 + (z-13)^2 = 100$ có bán kính là:

A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

b) Toạ độ tâm của mặt cầu (S): $(x-5)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 8$ là:

A. $(-5\,;\,6\,;\,7)$. B. $(5\,;\,6\,;\,-7)$. C. $(5\,;\,-6\,;\,7)$. D. $(-5\,;\,6\,;\,7)$.

4. Khoảng cách từ điểm $M(a\,;\,b\,;\,c)$ đến mặt phẳng $x - a - b - c = 0$ là:

A. $|a+b|$. B. $|b+c|$. C. $|c+a|$. D. $\dfrac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

5. Cho bốn điểm $A(0\,;\,1\,;\,3)$, $B(-1\,;\,0\,;\,5)$, $C(2\,;\,0\,;\,2)$ và $D(1\,;\,1\,;\,-2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và một vectơ vuông góc với cả hai vectơ đó.

b) Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của các đường thẳng AB và AC.

c) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC).

d) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

e) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC).

6. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) đi qua điểm $M(-3\,;\,1\,;\,4)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2\,;\,-4\,;\,1)$;

b) (P) đi qua điểm $N(2\,;\,-1\,;\,5)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1\,;\,-3;\,-2)$ và $\vec{u}_2 = (-3\,;\,4\,;\,1)$;

7.Cho bốn điểm A(-2; 6; 3), B(1; 0; 6), C(0; 2; -1), D(1; 4; 0).

a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD). Suy ra ABCD là một tứ diện.
b) Tính chiều cao AH của tứ diện ABCD.
c) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD.

8.Lập phương trình tham số của đường thẳng:

a) Đi qua hai điểm A(1; 0; -3), B(3; -1; 0).

b) Đi qua điểm M(2; 3; -5) và song song với đường thẳng Δ có phương trình

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -5t \end{cases}$$

9.Cho mặt phẳng (α) có phương trình $3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng d có phương trình

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

a) Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa điểm M và vuông góc với đường thẳng d.

10.Cho điểm A(-1; 2; -3), vectơ $a = (6; -2; -3)$ và đường thẳng d có phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t. \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm A và vuông góc với giá của a.

b) Tìm giao điểm M của d và (α).

c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với giá của a và cắt đường thẳng d.

11.Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M(1;-1; 2) trên mặt phẳng (α): $2x - y + 2z + 11 = 0$.

12.Cho diểm M(2; 1; 0) và mặt phẳng (α): $x + 3y - z - 27 = 0$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (α).

13.Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) và cắt hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 4 - 5t' \end{cases}.$$

14. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình sau:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$;

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$.

15. Lập phương trình mặt cầu trong hai trường hợp sau:

a) Có đường kính AB với A = (4; -3; 7), B = (2; 1; 3);

b) Đi qua điểm A = (5; -2; 1) và có tâm C = (3; -3; 1) .

CHƯƠNG IV: THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT (PHẦN 3)

§1 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Một lớp học có 17 học sinh nữ và 13 học sinh nam. Ở lớp học đó, có 3 học sinh tên là Thanh, trong đó có 1 học sinh nữ và 2 học sinh nam. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên một học sinh lên bảng. Xét hai biến cố sau:

A: "Học sinh được gọi lên bảng có tên là Thanh";

B: "Học sinh được gọi lên bảng là học sinh nữ".

Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được tính như thế nào?

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

I. ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

1 Trong bài toán ở phần mở đầu, hãy tính:

a) Xác suất để học sinh được gọi lên bảng có tên là Thanh, biết rằng học sinh đó là nữ;

b) Tỉ số $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Từ đó, hãy so sánh xác suất tính được ở câu a) với tỉ số $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là *xác suất của A với điều kiện B*, kí hiệu là $P(A \mid B)$.

Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Nhận xét

• Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra: Nếu $P(B) > 0$ thì

$$P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A \mid B).$$

• Người ta chứng minh được rằng: Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B \mid A) = P(B) \,.\, P(A \mid B).$$

Công thức trên được gọi là *công thức nhân xác suất*.

Ví dụ 1 Cho hai biến cố A, B có $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \cap B) = 0{,}2$. Tính các xác suất sau: $P(A \mid B)$; $P(B \mid A)$.

Giải

Ta có: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$; $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$.

Ví dụ 2 Trong kì kiểm tra môn Toán của một trường trung học phổ thông có 200 học sinh tham gia, trong đó có 95 học sinh nam và 105 học sinh nữ. Khi công bố kết quả của kì kiểm tra đó, có 50 học sinh đạt điểm giỏi, trong đó có 24 học sinh nam và 26 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong số 200 học sinh đó. Tính xác suất để học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Giải

Xét hai biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi";

B: "Học sinh được chọn ra là học sinh nữ".

Khi đó, xác suất để học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ, chính là xác suất của A với điều kiện B.

Do có 26 học sinh nữ đạt điểm giỏi nên

$$P(A \cap B) = \frac{26}{200} = 0{,}13.$$

Do có 105 học sinh nữ nên $P(B) = \dfrac{105}{200} = 0{,}525$. Vì thế, ta có:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}13}{0{,}525} \approx 0{,}25.$$

Vậy xác suất để học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ, là 0,25.

Nhận xét: Cho hai biến cố A và B với $P(B) > 0$. Khi đó, ta có: $P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$ (*).

1 Một hộp có 6 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng trong hộp, lấy không hoàn lại. Tìm xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng màu đỏ, biết rằng lần thứ nhất đã lấy được quả bóng màu xanh.

Ví dụ 3 Trong 10 000 áo sơ mi xuất khẩu của một doanh nghiệp dệt may có 1 000 áo sơ mi trắng. Các áo sơ mi trắng đó gồm ba cỡ: 40, 41, 42, trong đó có 200 áo cỡ 40. Chọn ra ngẫu nhiên một chiếc áo trong 10 000 áo sơ mi xuất khẩu. Giả sử chiếc áo sơ mi được chọn ra là áo sơ mi trắng. Tính xác suất để chiếc áo sơ mi đó có cỡ 40.

Giải

Xét hai biến cố sau:

A: "Áo được chọn ra có cỡ 40";

B: "Áo được chọn ra là áo sơ mi trắng".

Khi đó, xác suất để chiếc áo sơ mi được chọn ra có cỡ 40, biết rằng chiếc áo sơ mi đó là áo sơ mi trắng, chính là xác suất có điều kiện $P(A \mid B)$.

Áp dụng công thức (*), ta có:

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{200}{1000} = 0,2.$$

Vậy xác suất để chiếc áo sơ mi được chọn ra có cỡ 40, biết rằng chiếc áo sơ mi đó là áo sơ mi trắng, là 0,2.

2 Trong hộp đựng 500 chiếc thẻ cùng loại có 200 chiếc thẻ màu vàng. Trên mỗi chiếc thẻ màu vàng có ghi một trong năm số: 1, 2, 3, 4, 5. Có 40 chiếc thẻ màu vàng ghi số 5. Chọn ra ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp đựng thẻ. Giả sử chiếc thẻ được chọn ra có màu vàng. Tính xác suất để chiếc thẻ đó ghi số 5.

Xác suất có điều kiện có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Chẳng hạn, ta có thể làm quen với ứng dụng của xác suất có điều kiện trong Y học, Kinh tế qua những ví dụ sau.

Ví dụ 4 Một công ty dược phẩm giới thiệu một dụng cụ kiểm tra sớm bệnh sốt xuất huyết. Về kiểm định chất lượng của sản phẩm, họ cho biết như sau: Số người được thử là 9 000, trong số đó có 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết và có 7 500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết. Khi thử bằng dụng cụ của công ty, trong 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 76% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Mặt khác, trong 7 500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 7% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính khi kiểm tra.

a) Chọn số thích hợp cho ? trong *Bảng 1* (đơn vị: người). So sánh số người có kết quả dương tính khi thử nghiệm với số người bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết.

Kết quả thử nghiệm / Tình trạng bệnh	Dương tính	Âm tính
Nhiễm bệnh	?	?
Không nhiễm bệnh	?	?

Bảng 1

b) Chọn ngẫu nhiên một người trong số những người thử nghiệm. Tính xác suất để người được chọn ra bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, biết rằng người đó có kết quả thử nghiệm dương tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

c) Nhà sản xuất khẳng định dụng cụ cho kết quả đúng với hơn 90% số trường hợp có kết quả dương tính. Khẳng định đó có đúng không?

Giải

a) • Trong 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, số người cho kết quả dương tính (khi kiểm tra) là: 76% . 1 500 = 1 140 (người).

Trong 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, số người cho kết quả âm tính (khi kiểm tra) là: 1 500 – 1 140 = 360 (người).

• Trong 7 500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, số người cho kết quả dương tính (khi kiểm tra) là: 7% . 7 500 = 525 (người). Do đó, số người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết cho kết quả âm tính (khi kiểm tra) là: 7 500 – 525 = 6 975 (người).

Từ đó, *Bảng 1* được hoàn thiện bởi *Bảng 2* (đơn vị: người).

Kết quả thử nghiệm / Tình trạng bệnh	Dương tính	Âm tính
Nhiễm bệnh	1 140	360
Không nhiễm bệnh	525	6 975

Bảng 2

Từ *Bảng 2* ta thấy số người có kết quả dương tính khi thử nghiệm là:

$$525 + 1\,140 = 1\,665 > 1\,500.$$

b) Xét các biến cố sau:

A: "Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm là bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết";

B: "Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm cho kết quả dương tính (khi kiểm tra)".

Từ các dữ liệu thống kê ở *Bảng 2*, ta có:

$$P(B) = \frac{1\,665}{9\,000} = \frac{37}{200};$$

$$P(A \cap B) = \frac{1\,140}{9\,000} = \frac{19}{150}.$$

Vậy $P(A \mid B) = \frac{19}{150} : \frac{37}{200} = \frac{76}{111} \approx 68{,}5\%$.

c) Do 68,5% < 90% nên khẳng định của nhà sản xuất là không đúng.

3 Với các giả thiết như ở *Ví dụ 4*, chọn ngẫu nhiên một người trong số những người thử nghiệm. Tính xác suất để người được chọn ra bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, biết rằng người đó có kết quả thử nghiệm âm tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Chú ý: Người ta chứng minh được tính chất sau chỉ ra mối liên hệ giữa xác suất có điều kiện và biến cố độc lập:

Cho A và B là hai biến cố với $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$. Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi

$$P(A) = P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) \text{ và } P(B) = P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A}).$$

Nhận xét: Tính chất trên giải thích vì sao hai biến cố là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

II. SỬ DỤNG SƠ ĐỒ HÌNH CÂY ĐỂ TÍNH XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

2 Bác An cưa một khúc gỗ thành ba khối nhỏ. Mỗi khối nhỏ được sơn bằng một trong hai màu xanh hoặc vàng. Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng mà bác An có thể sơn màu cho khúc gỗ đó.

Ví dụ 5 Một hộp có 8 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Có 5 viên bi trong hộp được đánh số, trong đó có 3 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để viên bi được lấy ra có màu đỏ, biết rằng viên bi đó được đánh số.

Giải

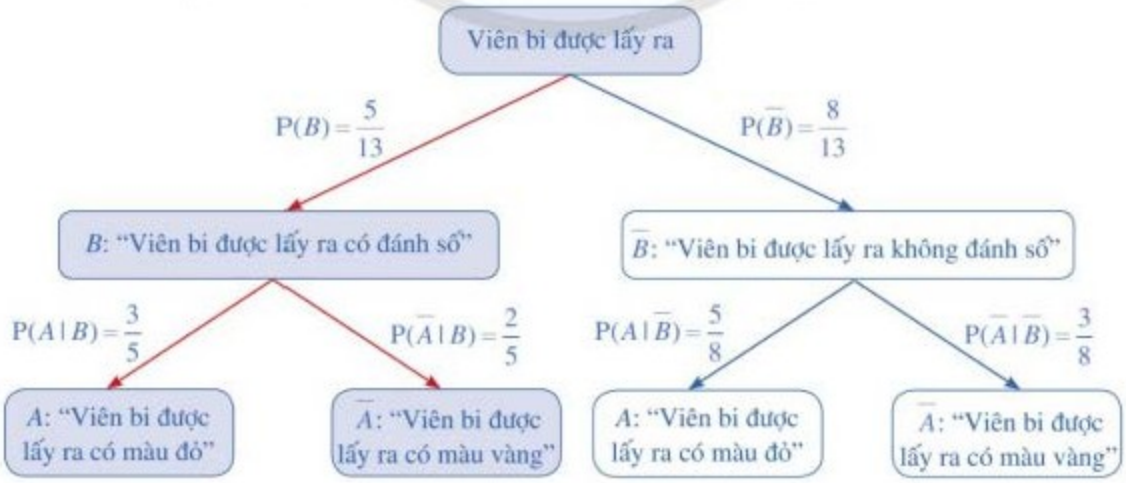
Xét hai biến cố sau:

A: "Viên bi được lấy ra có màu đỏ";

B: "Viên bi được lấy ra có đánh số".

Khi đó, xác suất để viên bi được lấy ra có màu đỏ, biết rằng viên bi đó được đánh số, chính là xác suất có điều kiện $P(A \mid B)$.

Sơ đồ hình cây biểu thị cách tính xác suất có điều kiện $P(A \mid B)$, được vẽ như sau:



Vậy xác suất để viên bi được lấy ra có màu đỏ, biết rằng viên bi đó có đánh số, là 0,6.

Chú ý: Áp dụng công thức (*), ta có thể tính:

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

4 Một túi có 10 hộp sữa chua dâu và 10 hộp sữa chua nha đam; các hộp sữa chua có kích thước và khối lượng như nhau. Có 12 hộp sữa chua trong túi là sữa chua không đường, trong đó có 6 hộp sữa chua dâu và 6 hộp sữa chua nha đam. Lấy ngẫu nhiên một hộp sữa chua trong túi. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để hộp sữa chua được lấy ra là hộp sữa chua dâu, biết rằng hộp sữa chua đó là sữa chua không đường.

BÀI TẬP

1. Cho hai biến cố độc lập A, B với $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,25$. Khi đó, $P(A \mid B)$ bằng:

A. 0,2. B. 0,8. C. 0,25. D. 0,75.

2. Cho hai biến cố A, B có $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,8$; $P(A \cap B) = 0,4$. Tính các xác suất sau:

a) $P(B \mid A)$; $P(\overline{B} \mid A)$. b) $P(A \cap \overline{B})$.

3. Một hộp có 3 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy bóng ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét các biến cố:

A: "Quả bóng màu xanh được lấy ra ở lần thứ nhất";

B: "Quả bóng màu đỏ được lấy ra ở lần thứ hai".

Chứng minh rằng A, B là hai biến cố độc lập.

4. Cho hai xúc xắc cân đối và đồng chất. Gieo lần lượt từng xúc xắc trong hai xúc xắc đó. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc bằng 6, biết rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm.

5. Một doanh nghiệp trước khi xuất khẩu áo sơ mi phải qua hai lần kiểm tra chất lượng sản phẩm, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ nhất sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tính xác suất để một chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu.

6. Một lô sản phẩm có 20 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm chất lượng thấp. Lấy liên tiếp 2 sản phẩm trong lô sản phẩm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất

không được bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp.

7. Trên giá sách có 10 quyển sách Khoa học và 15 quyển sách Nghệ thuật. Có 9 quyển sách viết bằng tiếng Anh, trong đó 3 quyển sách Khoa học và 6 quyển sách Nghệ thuật, các quyển sách còn lại viết bằng tiếng Việt. Lấy ngẫu nhiên một quyển sách. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để quyển sách được lấy ra là sách viết bằng tiếng Việt, biết rằng quyển sách đó là sách Khoa học.

8. Có 2 linh kiện điện tử, xác suất để mỗi linh kiện hỏng trong một thời điểm bất kì lần lượt là: 0,01; 0,02. Hai linh kiện đó được lắp vào một mạch điện theo sơ đồ ở *Hình 1a, 1b*. Trong mỗi trường hợp, hãy tính xác suất để trong mạch điện có dòng điện chạy qua.

a) *b)*

Hình 1

BÀI 2: CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT
(CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN. CÔNG THỨC BAYES)

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Dây chuyền lắp ráp ô tô điện gồm các linh kiện là sản phẩm do hai nhà máy sản xuất ra. Số linh kiện nhà máy I sản xuất ra chiếm 55% tổng số linh kiện, số linh kiện nhà máy II sản xuất ra chiếm 45% tổng số linh kiện; tỉ lệ linh kiện đạt tiêu chuẩn của nhà máy I là 90%, của nhà máy II là 87%. Lấy ra ngẫu nhiên một linh kiện từ dây chuyền lắp ráp đó để kiểm tra.

Xác suất để linh kiện được lấy ra đạt tiêu chuẩn là bao nhiêu?

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

I. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN

1 Một hộp có 24 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 24; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3" và biến cố B: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 4".

a) Viết các tập con của không gian mẫu tương ứng với các biến cố A, B, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$ (*Hình 2*).

b) So sánh:

$n(A)$ và $n(A \cap B) + n(A \cap \overline{B})$.

Từ đó, hãy chứng tỏ rằng:

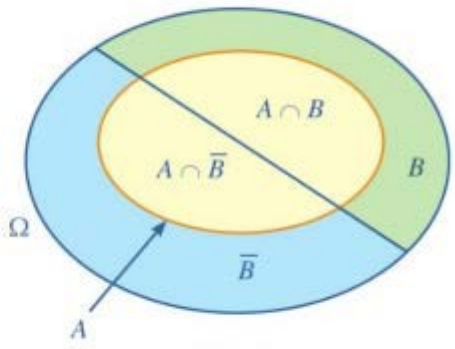
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}).$$

c) So sánh: $P(A \cap B)$ và $P(B) \cdot P(A \mid B)$;

$P(A \cap \overline{B})$ và $P(\overline{B}) \cdot P(A \mid \overline{B})$.

Từ đó, hãy chứng tỏ rằng:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(A \mid \overline{B}).$$



Hình 2

Ta có công thức sau (gọi là *công thức xác suất toàn phần*):

Cho hai biến cố A, B với $0 < P(B) < 1$, ta có:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \,.\, P(A \mid B) + P(\overline{B}) \,.\, P(A \mid \overline{B}).$$

Ví dụ 1 Theo một số liệu thống kê, năm 2004 ở Canada có 65% nam giới là thừa cân và 53,4% nữ giới là thừa cân. Nam giới và nữ giới ở Canada đều chiếm 50% dân số cả nước (*Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics – Understanding why and how, Springer, 2005*). Hỏi rằng, trong năm 2004, xác suất để một người Canada được chọn ngẫu nhiên là người thừa cân bằng bao nhiêu?

Giải

Xét hai biến cố sau:

A: "Người được chọn ra là người thừa cân";

B: "Người được chọn ra là nam giới" (biến cố $\overline{B}$: "Người được chọn ra là nữ giới").

Từ giả thiết ta có:

$$P(B) = P(\overline{B}) = 50\% = 0,5;\ P(A \mid B) = 65\% = 0,65;\ P(A \mid \overline{B}) = 53,4\% = 0,534.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A) = P(B) \,.\, P(A \mid B) + P(\overline{B}) \,.\, P(A \mid \overline{B}) = 0,5 \,.\, 0,65 + 0,5 \,.\, 0,534 = 0,592.$$

Vậy xác suất để một người Canada được chọn ngẫu nhiên là người thừa cân bằng 0,592.

Nói cách khác, tỉ lệ người Canada thừa cân là 59,2%.

Ví dụ 2 Một hộp có 60 viên bi màu xanh và 40 viên bi màu đỏ; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi thống kê, người ta thấy: có 50% số viên bi màu xanh có dán nhãn và 75% số viên bi màu đỏ có dán nhãn; những viên bi còn lại không dán nhãn.

a) Chọn số thích hợp cho ? trong *Bảng 3* (đơn vị: viên bi).

Dán nhãn / Màu bi	Có dán nhãn	Không dán nhãn
Đỏ	?	?
Xanh	?	?

Bảng 3

b) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Sử dụng công thức xác suất toàn phần, tính xác suất để viên bi được lấy ra có dán nhãn.

Giải

a) Số viên bi màu đỏ có dán nhãn là: 75% . 40 = 30 (viên bi).

Số viên bi màu xanh có dán nhãn là: 50% . 60 = 30 (viên bi).

Dán nhãn / Màu bi	Có dán nhãn	Không dán nhãn
Đỏ	30	10
Xanh	30	30

Bảng 4

Sau khi hoàn thiện *Bảng 3*, ta nhận được *Bảng 4* (đơn vị: viên bi).

b) Xét hai biến cố sau:

A: "Viên bi được chọn ra có dán nhãn";

B: "Viên bi được chọn ra có màu đỏ".

Khi đó, ta có:

$$P(B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5};\qquad P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5};$$

$$P(A\mid B)=\frac{30}{40}=\frac{3}{4};\qquad P(A\mid \overline{B})=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}.$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A)=P(B)\,.\,P(A\mid B)+P(\overline{B})\,.\,P(A\mid \overline{B})=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{5}.$$

Vậy xác suất để viên bi được lấy ra có dán nhãn bằng $\frac{3}{5}$.

1 Hãy giải bài toán trong phần mở đầu bằng cách lập bảng thống kê như trong *Ví dụ 2*, biết rằng cả hai nhà máy sản xuất được 10 000 linh kiện.

Ví dụ 3 Trong trò chơi hái hoa có thưởng của lớp 12A, cô giáo treo 10 bông hoa trên cành cây, trong đó có 5 bông hoa chứa phiếu có thưởng. Bạn Bình hái bông hoa đầu tiên, sau đó bạn An hái bông hoa thứ hai.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.

b) Từ đó, tính xác suất bạn An hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng.

Giải

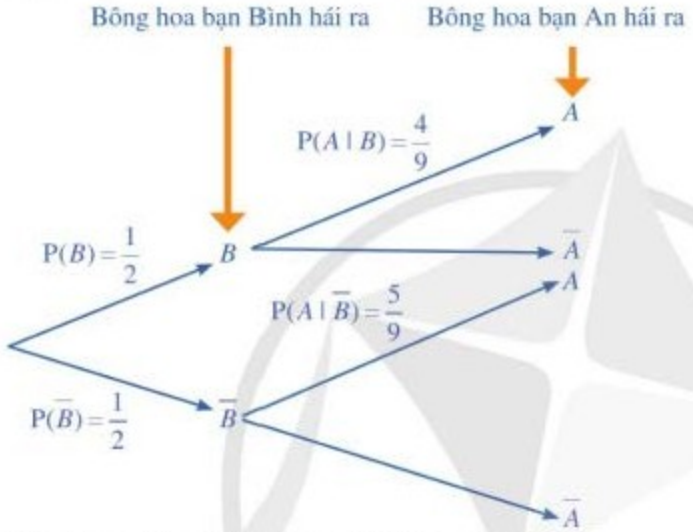
Xét hai biến cố: A: "Bông hoa bạn An hái được chứa phiếu có thưởng";

B: "Bông hoa bạn Bình hái được chứa phiếu có thưởng".

Khi đó, ta có:

$$P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ P(A\mid B)=\frac{4}{9},\ P(A\mid \overline{B})=\frac{5}{9}.$$

a) Sơ đồ hình cây biểu thị tình huống đã cho là:



2 Hãy giải bài toán trong phần mở đầu bằng phương pháp sử dụng sơ đồ hình cây như trong *Ví dụ 3*.

b) Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A)=P(B)\,.\,P(A\mid B)+P(\overline{B})\,.\,P(A\mid \overline{B})=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{2}.$$

Vậy xác suất bạn An hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng bằng $\frac{1}{2}$.

II. CÔNG THỨC BAYES

2 Xét hai biến cố A, B trong Hoạt động 1.

a) Tính: $P(A)$, $P(B)$, $P(A\mid B)$ và $P(B\mid A)$.

b) So sánh: $P(B\mid A)$ và $\dfrac{P(B)\,.\,P(A\mid B)}{P(A)}$

Ta có công thức sau (gọi là *công thức Bayes*):

Với hai biến cố A, B mà $P(A)>0$, $P(B)>0$, ta có: $P(B\mid A)=\dfrac{P(B)\,.\,P(A\mid B)}{P(A)}$.

Nhận xét: Cho hai biến cố A, B với $P(A) > 0$, $0 < P(B) < 1$. Do

$$P(A) = P(B) \,.\, P(A \mid B) + P(\overline{B}) \,.\, P(A \mid \overline{B})$$

nên công thức Bayes còn có dạng: $P(B \mid A) = \dfrac{P(B) \,.\, P(A \mid B)}{P(B) \,.\, P(A \mid B) + P(\overline{B}) \,.\, P(A \mid \overline{B})}$.

Ví dụ 4 Cho hai biến cố A, B sao cho $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \mid B) = 0{,}3$. Tính $P(B \mid A)$.

Giải

Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \,.\, P(A \mid B)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \,.\, 0{,}3}{0{,}6} = 0{,}2.$$

3 Cho hai biến cố A, B sao cho $P(A) = 0{,}4$ $P(B) = 0{,}8$; $P(B \mid A) = 0{,}3$. Tính $P(A \mid B)$.

Ví dụ 5 Giả sử có một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,1%. Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ phản ứng dương tính giả là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh có 5% số người xét nghiệm lại có phản ứng dương tính).

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.

b) Khi một người xét nghiệm có phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Giải

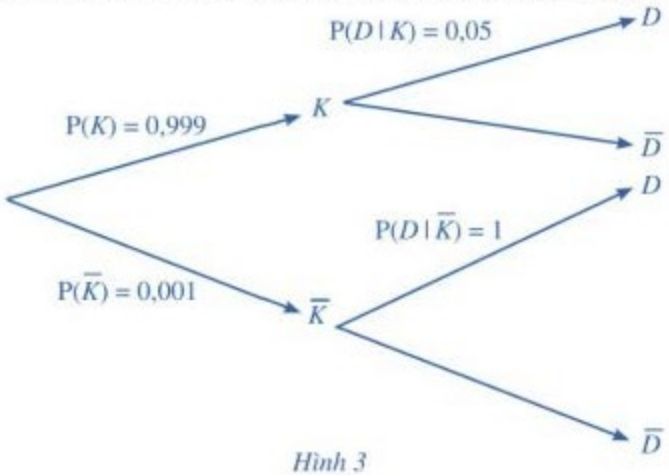
a) Xét hai biến cố: K: "Người được chọn ra không mắc bệnh";

D: "Người được chọn ra có phản ứng dương tính".

Do tỉ lệ người mắc bệnh là 0,1% = 0,001 nên $P(K) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$.

Trong số những người không mắc bệnh có 5% số người có phản ứng dương tính nên $P(D \mid K) = 5\% = 0{,}05$. Vì ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính nên $P(D \mid \overline{K}) = 1$.

Sơ đồ hình cây ở *Hình 3* biểu thị tình huống đã cho.



Hình 3

4 Được biết có 5% đàn ông bị mù màu, và 0,25% phụ nữ bị mù màu (*Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics - Understanding why and how, Springer, 2005*). Giả sử số đàn ông bằng số phụ nữ. Chọn một người bị mù màu một cách ngẫu nhiên. Hỏi xác suất để người đó là đàn ông là bao nhiêu?

b) Ta thấy: Khả năng mắc bệnh của một người xét nghiệm có phản ứng dương tính chính là $P(\overline{K} \mid D)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(\overline{K} \mid D) = \frac{P(\overline{K}) \cdot P(D \mid \overline{K})}{P(\overline{K}) \cdot P(D \mid \overline{K}) + P(K) \cdot P(D \mid K)} = \frac{0{,}001}{0{,}001 + 0{,}999 \cdot 0{,}05} \approx 1{,}96\%.$$

Vậy xác suất mắc bệnh của một người xét nghiệm có phản ứng dương tính là 1,96%.

BÀI TẬP

1. Cho hai biến cố A, B với $P(B) = 0{,}6$; $P(A \mid B) = 0{,}7$ và $P(A \mid \overline{B}) = 0{,}4$. Khi đó, $P(A)$ bằng:

A. 0,7. B. 0,4. C. 0,58. D. 0,52.

2. Có hai chiếc hộp, hộp I có 5 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen, hộp II có 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II.

a) Tính xác suất để viên bi được lấy ra là viên bi màu trắng.

b) Giả sử viên bi được lấy ra là viên bi màu trắng. Tính xác suất viên bi màu trắng đó thuộc hộp I.

3. Một loại linh kiện do hai nhà máy số I, số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là: 4%; 3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó.

a) Tính xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt.

b) Giả sử linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm. Xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là cao nhất?

4. Một chiếc hộp có 20 chiếc thẻ cùng loại, trong đó có 2 chiếc thẻ màu xanh và 18 chiếc thẻ màu trắng. Bạn Châu rút thẻ hai lần một cách ngẫu nhiên, mỗi lần rút một thẻ và thẻ được rút ra không bỏ lại hộp. Tính xác suất để cả hai lần bạn Châu đều rút được thẻ màu xanh.

5. Năm 2001, Cộng đồng châu Âu có làm một đợt kiểm tra rất rộng rãi các con bò để phát hiện những con bị bệnh bò điên. Không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, mà ở đây ta gọi là xét nghiệm A, cho kết quả như sau: khi con bò bị bệnh bò điên thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 70%, còn khi con bò không bị bệnh thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 10%. Biết rằng tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1 000 000 con (*Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics – Understanding why and how, Springer, 2005*). Hỏi khi một con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm A thì xác suất để nó bị mắc bệnh bò điên là bao nhiêu?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

1. Cho hai biến cố xung khắc A, B với $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,4$. Khi đó, $P(A \mid B)$ bằng:

A. 0,5. B. 0,2. C. 0,4. D. 0.

2. Một cửa hàng kinh doanh tổ chức rút thăm trúng thưởng cho hai loại sản phẩm. Tỉ lệ trúng thưởng của các loại sản phẩm I, II lần lượt là: 6%; 4%. Trong một hộp kín gồm các thăm cùng loại, người ta để lẫn lộn 200 chiếc thăm cho sản phẩm loại I và 300 chiếc thăm cho sản phẩm loại II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên 1 chiếc thăm từ chiếc hộp đó.

a) Tính xác suất để chiếc thăm được lấy ra là trúng thưởng.

b) Giả sử chiếc thăm được lấy ra là trúng thưởng. Xác suất chiếc thăm đó thuộc loại sản phẩm nào là cao nhất?

3. Một xạ thủ bắn vào bia số 1 và bia số 2. Xác suất để xạ thủ đó bắn trúng bia số 1, bia số 2 lần lượt là 0,8; 0,9. Xác suất để xạ thủ đó bắn trúng cả hai bia là 0,8. Xét hai biến cố sau:

A: "Xạ thủ đó bắn trúng bia số 1";

B: "Xạ thủ đó bắn trúng bia số 2".

a) Hai biến cố A và B có độc lập hay không?

b) Biết xạ thủ đó bắn trúng bia số 1, tính xác suất xạ thủ đó bắn trúng bia số 2.

c) Biết xạ thủ đó không bắn trúng bia số 1, tính xác suất xạ thủ đó bắn trúng bia số 2.

4. Một chiếc hộp có 40 viên bi, trong đó có 12 viên bi màu đỏ và 28 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân lấy ngẫu nhiên viên bi từ chiếc hộp đó hai lần, mỗi lần lấy ra một viên bi và viên bi được lấy ra không bỏ lại hộp. Tính xác suất để cả hai lần bạn Ngân đều lấy ra được viên bi màu vàng.

5. Giả sử trong một nhóm người có 2 người nhiễm bệnh, 58 người còn lại là không nhiễm bệnh. Để phát hiện ra người nhiễm bệnh, người ta tiến hành xét nghiệm tất cả mọi người của nhóm đó. Biết rằng đối với người nhiễm bệnh, xác suất xét nghiệm có kết quả dương tính là 85%, nhưng đối với người không nhiễm bệnh thì xác suất để bị xét nghiệm có phản ứng dương tính là 7%.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.

b) Giả sử X là một người trong nhóm bị xét nghiệm có kết quả dương tính. Tính xác suất để X là người nhiễm bệnh.