

Chương I. MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

Mục tiêu

Sau khi học xong chương này, người học có thể:

- Thiết lập và phát biểu được các mệnh đề toán học, bao gồm: mệnh đề phủ định; mệnh đề đảo; mệnh đề tương đương; mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall$; $\exists$ điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ.
- Xác định được tính đúng/sai của một mệnh đề toán học trong những trường hợp đơn giản.
- Nhận biết được các khái niệm cơ bản về tập hợp (tập con, hai tập hợp bằng nhau, tập rỗng) và biết sử dụng các kí hiệu $\subset$, $\supset$, $\emptyset$.
- Thực hiện được phép toán trên các tập hợp (hợp, giao, hiệu của hai tập hợp) và biết dùng biểu đồ Ven để biểu diễn chúng trong những trường hợp cụ thể.
- Tìm được hiệu của hai tập hợp, phần bù của một tập con và biết dùng biểu đồ Ven để biểu diễn chúng trong những trường hợp cụ thể.
- Vận dụng được kiến thức đã học vào giải quyết một số tình huống nảy sinh từ thực tiễn, gắn với phép toán trên tập hợp (ví dụ: những bài toán liên quan đến đếm số phần tử của hợp các tập hợp...).

Bài 1. MỆNH ĐỀ

1. Khái niệm mệnh đề

Mỗi mệnh đề là một câu khẳng định hoặc đúng, hoặc sai.

Mệnh đề khẳng định đúng gọi là **mệnh đề đúng**.

Mệnh đề khẳng định sai gọi là **mệnh đề sai**.

Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

Ví dụ 1:

“Số π lớn hơn 4” (là một mệnh đề sai)

“Số 3 là số lẻ” (là một mệnh đề đúng)

“Hôm nay trời đẹp” (Không phải mệnh đề)

❖ **Chú ý:** Người ta thường sử dụng các chữ cái in hoa P, Q, R, ... để kí hiệu mệnh đề.

2. Mệnh đề chứa biến

- Mệnh đề chứa biến là câu khẳng định mà tính đúng sai còn tùy thuộc vào mỗi giá trị cụ thể của biến.
- Khi gắn thêm kí hiệu: $\forall$ (với mọi); $\exists$ (tồn tại) thì được một mệnh đề.

Ví dụ 2: Xét $P(x) = “x - 5 < 6”$ là mệnh đề chứa biến. Vì khi chọn $x = 1$ có

$P(1) = “1 - 5 < 6$ (đúng)”, $x = 15$ có $P(15) = “15 - 5 < 6”$ (sai).

Khi gắn thêm kí hiệu: $\exists$, “ $\exists x \in \mathbb{R}, x - 5 < 6$ ” là mệnh đề đúng

$\forall$, “ $\forall x \in \mathbb{R}, x - 5 < 6$ ” là mệnh đề sai.

❖ **Chú ý:**

☞ Phủ định của “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là: “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”

☞ Phủ định của “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là: “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”

3. Mệnh đề phủ định

Cho 2 mệnh đề P và Q.

- Mệnh đề phủ định của P: kí hiệu $\overline{P}$ (không P)

Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai và ngược lại

❖ **Chú ý:** Khi phủ định mệnh đề cần chú ý

“ $\geq$ phủ định lại là $<$ ”

“ $>$ phủ định lại là $\leq$ ”

“ $=$ phủ định lại là $\neq$ ”

“ $\forall$ phủ định lại là $\exists$ ”

4. Mệnh đề kéo theo

Mệnh đề kéo theo: kí hiệu $P \Rightarrow Q$ (nếu P thì Q)

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai

5. Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương

- Mệnh đề đảo:

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$

- Mệnh đề tương đương: kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi P và Q cùng đúng hoặc cùng sai

6. Các ví dụ

Ví dụ 3: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề:

- “ Phương trình: $x^2 + 4x + 5 = 0$ có nghiệm ” ;
- “ $x^2 > x$ ” ;
- “ Hình chữ nhật là hình bình hành có 2 đường chéo bằng nhau ”.

Giải

- Mệnh đề sai vì $\Delta' = -1 < 0$ nên phương trình không có nghiệm
- Không là mệnh đề: vì với $x = 2$ có $4 > 2$ (đúng) ; với $x = 1$ có $1 > 1$ (sai)
 $\Rightarrow$ Khẳng định vừa đúng, vừa sai.
- Mệnh đề đúng (theo dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật).

Ví dụ 4 : Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề:

- A = “2008 chia hết cho 9”
- B = “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$ ”
- C = “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 3n - 2$ ”

Giải

- $\bar{A}$ = “2008 không chia hết cho 9”;
- $\bar{B}$ = “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x$ ”
- $\bar{C}$ = “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \neq 3n - 2$ ”.

Ví dụ 5: Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định các mệnh đề sau:

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 4 = 0$

Giải

- Mệnh đề đúng, vì $x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x
Mệnh đề phủ định: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$
- Mệnh đề sai, vì phương trình $x^2 + 3x + 4 = 0$ vô nghiệm
Mệnh đề phủ định: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 4 \neq 0$

BÀI TẬP

Bài 1. Khẳng định nào là mệnh đề? Nếu là mệnh đề, cho biết đúng hay sai:

- $3 + 2 = 7$;
- $\pi < 3,15$;

- c. $|-5| = 5$; d. $4 + x > 3$.
e. Năm 2008 là năm nhuận; f. Lớp chúng ta rất chăm học Toán.

Bài 2. Trong các câu sau câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến:

- a. $x + y \geq 1$; b. $2 - \sqrt{5} \leq 0$;
c. $x^2 + 1 = 0$; d. $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.

Bài 3. Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định các mệnh đề sau :

- a. $A = "\forall x \in \mathbb{R}, x + 3 < 2"$; b. $B = "\forall n \in \mathbb{N}, n^2 = 4n - 3"$;
c. $C = "\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3"$; d. $D = "\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq \frac{1}{x}"$;

Bài 4. Dùng các kí hiệu $\forall, \exists$ để viết các mệnh đề:

- a. Bình phương của mỗi số nguyên đều lớn hơn chính nó ;
b. Mọi số nguyên tố đều là số lẻ ;
c. Có số hữu tỉ mà bình phương của nó bằng 5 ;
d. Có số thực mà số đối bằng với số nghịch đảo của nó.

Bài 5. Cho mệnh đề $P = "\Delta ABC$ cân tại A" và $Q = "\Delta ABC$ có $\hat{B} = \hat{C}"$.

Hãy lập các mệnh đề $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ và $P \Leftrightarrow Q$.

Bài 6. Cho mệnh đề chứa biến $P(x) = "x = x^4"$ với x là số nguyên. Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau :

- a. $P(1)$ b. $P\left(\frac{-1}{2}\right)$
c. $\exists x \in \mathbb{Z}, P(x)$ d. $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$

Bài 2. TẬP HỢP

1. Các khái niệm

- Tập hợp** là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.

Giả sử đã cho tập hợp A . Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A , ta viết: $a \in A$ (đọc là a thuộc A).
Để chỉ a không phải là một phần tử của tập hợp A , ta viết: $a \notin A$ (đọc là a không thuộc A).

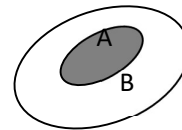
- Cách xác định tập hợp**

Tập hợp thường được biểu diễn dưới dạng: **Liệt kê phần tử** hay **chỉ ra tính chất đặt trưng**.

Ví dụ: Tập hợp A được biểu diễn bằng hai cách

- , Tập hợp A được gọi là tập hợp con của tập B nếu mọi phần tử của tập A đều là phần tử của tập hợp B .

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$$



- Tập hợp bằng nhau**

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A$$

- Tập rỗng**

Tập hợp rỗng, kí hiệu: $\emptyset$, là tập hợp không chứa phần tử nào.

❖ **Chú ý:** Tập hợp rỗng là con của mọi tập hợp.

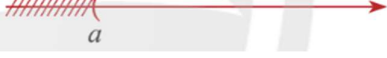
Mọi tập hợp đều là con của chính nó.

Ví dụ 1: Liệt kê các phần tử của tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$

Phương trình: $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm nên tập nghiệm của phương trình là: $S = \emptyset$.

2. Một số tập con của tập hợp số thực $\mathbb{R}$

Người ta thường sử dụng các tập con của tập số thực sau đây (a và b là các số thực, $a < b$)

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số
Tập số thực $(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng $[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng $(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng $[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng $(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng $(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

Kí hiệu: $-\infty$ đọc là âm vô cực; $+\infty$ đọc là dương vô cực

Ví dụ 2: Phân biệt các kí hiệu: $\{1; 2\}; (1; 2); [1; 2]$.

$\{1; 2\}$ là tập hợp rời chỉ chứa hai phần tử là 1 và 2.

$(1; 2)$ là một khoảng chứa vô số phần tử là những số lớn hơn 1 và bé hơn 2.

$[1; 2]$ là một đoạn chứa vô số phần tử gồm 1; 2 và tất cả những số lớn hơn hoặc bằng 1 và bé hơn hoặc bằng 2.

Vậy: $[1; 2] \setminus (1; 2) = \{1; 2\}$

Ví dụ 3: Dùng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết các tập hợp sau đây:

- | | |
|--|---|
| a. $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\};$ | b. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 10\};$ |
| c. $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq \sqrt{3}\};$ | d. $\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \leq x < 4\};$ |
| e. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4}\right\};$ | g. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{\pi}{2}\right\}.$ |

3. Các ví dụ

Ví dụ 4: Hãy liệt kê phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x-1)(x^2-3x-4)=0\}$

Giải

$$\text{Ta có phương trình: } (2x-1)(x^2-3x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x^2-3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=-1 \cup x=4 \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $A = \{-1; 4\}$.

Ví dụ 5: Tìm tất cả các tập con của tập $A = \{a; b; c\}$

Giải

Các tập con của A là:

$$\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}$$

$$\{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; A$$

BÀI TẬP

Bài 1. Viết các tập hợp sau dưới dạng liệt kê phần tử:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 4)(x^2 - 5x + 4) = 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (2x - \sqrt{3})(3x^2 - 2x) = 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^3 + 2x^2 - 5x = 0\} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - 1)(x^2 + x + 1) = 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 \leq 7\} \quad F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$$

Bài 2. Viết các tập hợp sau dưới dạng chỉ ra tính chất đặt trưng cho các phần tử:

- Tập hợp $A = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$;
- Tập hợp B các nghiệm của bất phương trình $2x + 1 > 0$;
- Tập hợp C các nghiệm của phương $2x - y > 6$.

Bài 2. Cho các tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 5 = 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 - x > 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\} \quad D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 3\}$$

- Tập nào là tập rỗng?
- Tìm quan hệ tập con, bằng nhau giữa các tập hợp trên?

Bài 3. Tìm tất cả các tập hợp con của mỗi tập hợp sau:

$$A = \{-1; 0; 1\} \quad B = \{T; O; A; N\} \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$$

Bài 4. Hãy viết tất cả các tập con của tập hợp $B = \{0; 1; 2\}$.

Bài 5. Dùng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng, viết các tập hợp sau đây:

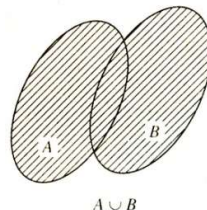
- $\{x \in \mathbb{R} \mid -2\pi < x \leq 2\pi\}$;
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \sqrt{3}\}$;
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$;
- $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 - 3x \leq 0\}$.

Bài 3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1. Phép hợp

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc B được gọi là *hợp của A và B* (phần gạch chéo trong hình).

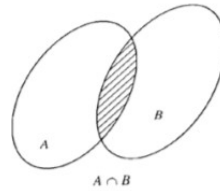
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hay } x \in B\}$$



2. Phép giao

Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là *giao của A và B* (phần gạch chéo trong hình).

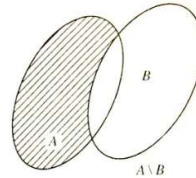
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$



3. Phép hiệu

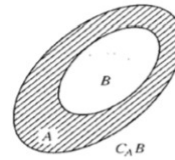
Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là *hiệu của A và B* (phần gạch chéo trong hình).

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$



4. Phần bù

Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là *phần bù của B trong A* , kí hiệu: $C_A B$ (phần gạch chéo trong hình).



5. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho tập hợp $A = \{-1; 3; -5; 7; -9; 11; -13; 15\}$ và $B = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 17\}$.

Xác định: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Giải

$$A \cap B = \{3; 15\};$$

$$A \cup B = \{-1; 3; -5; 7; -9; 11; -13; 15; 0; 6; 9; 12; 17\};$$

$$A \setminus B = \{-1; -5; 7; -9; 11; -13\}; \quad B \setminus A = \{0; 6; 9; 12; 17\}.$$

Ví dụ 2: Viết tập hợp A dưới dạng khoảng, đoạn: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - 3x \geq 10\}$

Giải

$$\text{Ta có: } 4 - 3x \geq 10 \Leftrightarrow -3x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq -2.$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{R} \text{ nên } B = (-\infty; -2].$$

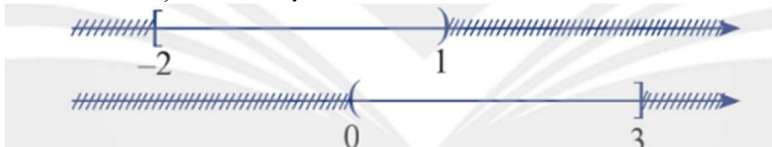
Ví dụ 3: Cho tập hợp:

$$A = [-2; 1); \quad B = (0; 3]$$

- Biểu diễn A ; B trên trục số
- Xác định: $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

Giải

- Biểu diễn A , B trên trục số



b. $A \cap B = (0; 1)$

$$A \cup B = [-2; 3]$$

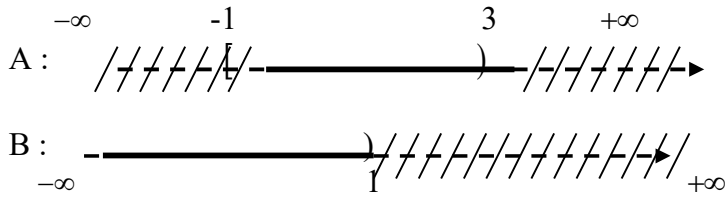
$$A \setminus B = [-2; 0]$$

$$B \setminus A = [1; 3]$$

Ví dụ 4: Cho $A = [-1; 3]$ và $B = (-\infty; 1)$.

Xác định: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_{\mathbb{R}} B$

Giải



$$A \cap B = [-1; 1); \quad A \cup B = (-\infty; 3]; \quad A \setminus B = [1; 3]$$

$$B \setminus A = (-\infty; -1); \quad C_{\mathbb{R}} B = [1; +\infty).$$

Ví dụ 5: Xác định các tập hợp sau đây:

a. $(1; 3) \cup [-2; 2]$ c. $(-\infty; 1) \cap [0; \pi]$

b. $\left[\frac{1}{2}; 3\right) \setminus (1; +\infty)$ d. $C_{\mathbb{R}} [-1; +\infty)$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$; $E = \{0; 2; 4; 6\}$; $F = \{0; 3; 6; 9; 12\}$

- Xác định $D \cap E$; $E \cup F$; $F \cap D$;
- Xác định $E \setminus F$; $D \setminus E$; $F \setminus D$;
- Xác định $(D \cup F) \setminus E$; $(E \cap F) \cup D$; $(E \setminus D) \cap F$.

Bài 2. Xác định $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ với:

- $A = (-5; 3)$ và $B = (-7; 0)$
- $A = [1; 5]$ và $B = (4, 5; +\infty)$
- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \leq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

Bài 3.

- Xác định các tập hợp $C_{\mathbb{R}} A$ và $C_{\mathbb{R}} B$ với
 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x - 5 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - 5x \geq 0\}$
- Xác định các tập hợp: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 2 \neq 0\}$;
 $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4 \text{ và } x^2 - 4x + 3 \neq 0\}$.

Bài 4. Xác định các tập hợp sau đây

- $(-\infty; 0) \cup [-\pi; \pi]$ c. $(-\infty; \sqrt{2}) \cap [1; +\infty)$
- $[-3, 5; 2] \cap (-2; 3, 5)$ d. $(-\infty; \sqrt{2}) \setminus [1; +\infty)$

Bài 5. Trong số 45 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học sinh giỏi, 20 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi:

- Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt?
- Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt?

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, và mệnh đề đó đúng hay sai:

- a. Ở đây là nơi nào?
- b. Phương trình $x^2 + x - 1 = 0$ vô nghiệm
- c. $x + 3 = 5$
- d. 16 không là số nguyên tố

Bài 2. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a. “Phương trình $x^2 - x - 4 = 0$ vô nghiệm”
- b. “6 là số nguyên tố”
- c. “ $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 - 1$ là số lẻ”

Bài 3. Xác định tính đúng sai của mệnh đề A, B và tìm phủ định của nó:

$$A = “ \forall x \in \mathbb{R}: x^3 > x^2 ”$$

$$B = “ \exists x \in \mathbb{N}: x \text{ chia hết cho } x+1 ”$$

Bài 4. Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó và phát biểu mệnh đề đảo:

- a. P: “ABCD là hình chữ nhật” và Q: “AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường”
- b. P: “ $3 > 5$ ” và Q: “ $7 > 10$ ”
- c. P: “Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A” và Q: “Góc B = 45° ”

Bài 5. Cho các mệnh đề:

$$A = “ \exists x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq -2x + 3 ”$$

$$B = “ \forall x \in \mathbb{N}^*; x > \frac{1}{x} ”$$

$$C = “ \exists x \in \mathbb{Z}; n^2 + 1 : 3 ”$$

$$D = “ \forall x \in \mathbb{R}; x^2 - 3x + 5 \neq 0 ”$$

$$E = “ \forall x \in \mathbb{N}, x^3 > x ”$$

$$F = “ \exists x \in \mathbb{Z}, x \notin \mathbb{N} ”$$

- a. Hãy xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề
- b. Lập mệnh đề phủ định của nó.

Bài 6. Cho 2 mệnh đề: P = “Tứ giác ABCD là hình thoi” và Q = “Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường”.

- a. Lập mệnh đề kéo theo “ $P \Rightarrow Q$ ”. Chứng tỏ mệnh đề này là một định lý;
- b. Phát biểu định lý đó theo cách dùng thuật ngữ “điều kiện cần”, “điều kiện đủ”;
- c. Phát biểu định lý đảo của định lý trên.

Bài 7. Xác định các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$

- a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 3x)(2x^2 - 3x + 1) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 3 \text{ và } x < 10\}$;
- b) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 9 - 2x \geq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x - \sqrt{3})(x - 3)(2x - 1) = 0\}$;
- c) $A = [-3; 2)$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$;
- d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}$.

Bài 8. Xác định phần bù của các tập hợp sau trong tập $\mathbb{R}$:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 = 0\}$;
- b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 \leq 0\}$;
- c*) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3\}$;
- d*) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x - 5 \neq 0\}$.

Bài 9. Hãy viết tất cả các tập hợp con của của tập hợp $A = \{a, b, c\}$

Bài 10: Cho hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - 2x \leq 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 < 0\}$$

- a. Biểu diễn A và B trên trục số
- b. Tìm $A \cap B; A \cup B; A \setminus B; B \setminus A$

Bài 11. Cho $A = [x; x+1]$; $B = [2; 5]$

- a. Tìm x để $A \subset B$;
- b. Tìm x để $B \subset A$;
- c. Tìm x để $A \cap B = \emptyset$.

Chương II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Mục tiêu:

Sau khi học xong chương này, người học có thể:

- Nhận biết được bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Biểu diễn được miền nghiệm của bất phương trình trên mặt phẳng tọa độ.
- Biểu diễn được miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ.

BÀI 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax + by + c < 0; ax + by + c > 0; ax + by + c \leq 0; ax + by + c \geq 0,$$

trong đó a, b, c là những số cho trước; a, b không đồng thời bằng 0 và x, y là các ẩn.

Ví dụ 1: Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau đây:

- a) $x - 5y + 2 \leq 0$; b) $9x^2 + 8y - 7 \geq 0$;
c) $3x - 2 > 0$; d) $4y + 11 \leq 0$.

Giải

Các bất phương trình a), c), d) là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình b) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có chứa x^2 .

2. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Xét bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là một **nghiệm** của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 2: Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $20x + 50y - 700 \leq 0$?

- a) (5; 6); b) (9; 11).

Giải

a) Vì $20.5 + 50.6 - 700 = -300 < 0$ nên (5; 6) là nghiệm của bất phương trình $20x + 50y - 700 \leq 0$.

b) Vì $20.9 + 50.11 - 700 = 30 > 0$ nên (9; 11) không phải là nghiệm của bất phương trình $20x + 50y - 700 \leq 0$.

3. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là **miền nghiệm** của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Ví dụ 3: Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

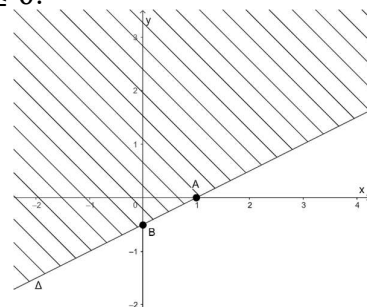
- a) $x - 2y - 1 > 0$; b) $x + y - 1 \leq 0$.

Giải

a) Vẽ đường thẳng $\Delta: x - 2y - 1 = 0$ đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; -\frac{1}{2})$.

Xét gốc tọa độ $O(0; 0)$. Ta thấy $O \notin \Delta$ và $0 - 2.0 - 1 < 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là

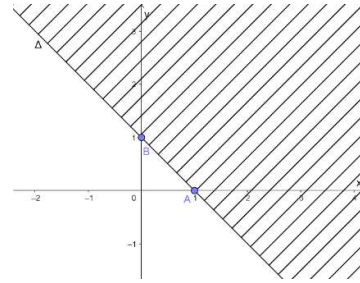


nửa mặt phẳng không kể bờ Δ , không chứa gốc tọa độ O (miền không gạch chéo trên hình).

b) Vẽ đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$ đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; 1)$.

Xét gốc tọa độ $O(0; 0)$. Ta thấy $O \notin \Delta$ và $0 + 0 - 1 < 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ , chứa gốc tọa độ O (miền không gạch chéo trên hình).



BÀI TẬP

Bài 1. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x - 2y + 6 > 0$.

- $(0; 0)$ có phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho không?
- Chỉ ra ba cặp số $(x; y)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng Oxy .

Bài 2. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy :

- $-x + y + 2 > 0$;
- $2x + y - 2 \leq 0$
- $y + 2 \geq 0$;
- $-x + 2 \leq 0$.

Bài 3. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy :

- $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$;
- $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

Bài 4. Bạn Cúc muốn pha hai loại nước cam. Để pha một lít nước cam loại I cần 30g bột cam, còn một lít nước cam loại II cần 20g bột cam. Gọi x và y lần lượt là số lít nước cam loại I và II pha chế được. Biết rằng Cúc chỉ có thể dùng không quá 100g bột cam. Hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước cam loại I và II mà bạn Cúc có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

BÀI 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Khái niệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một **nghiệm** của hệ bất phương trình đã cho.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là **miền nghiệm** của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1: Tìm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các hệ sau:

- $\begin{cases} 3x + y - 1 \leq 0 \\ 2x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 5x + y - 9 = 0 \\ 4x - 7y + 3 = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} y - 1 < 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ -2x + y + 3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Giải

Các hệ a), c), d) là các hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Hệ b) không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì hệ này chỉ gồm các phương trình.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Để **biểu diễn miền nghiệm** của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ Oxy , ta thực hiện như sau:

- Trên cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.
- Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

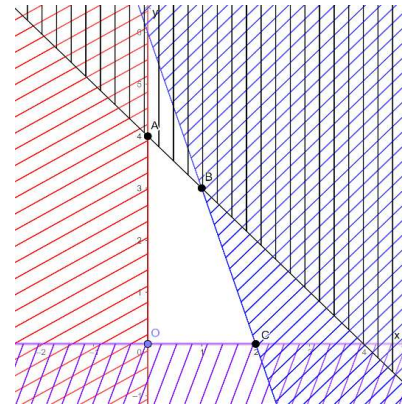
Ví dụ 2: Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Giải

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng Oxy .

Miền không gạch chéo (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) trong hình bên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác

Hệ bất phương trình giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu. Chúng thường được đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác.

Người ta chứng minh được F đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác.

BÀI TẬP

Bài 1. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - 3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x + y - 5 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} ; \quad \text{d) } \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài 2. Bạn Lan thu xếp được không quá 10 giờ để làm hai loại đèn trung thu tặng cho các trẻ em khuyết tật. Loại đèn hình con cá cần 2 giờ để làm xong 1 cái, còn loại đèn ông sao chỉ cần 1 giờ để làm xong 1 cái. Gọi x, y lần lượt là số đèn hình con cá và đèn ông sao bạn Lan sẽ làm. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy :

- a) $-2x + y - 1 \leq 0$; b) $-x + 2y > 0$;
c) $x - 5y < 2$; d) $-3x + y + 2 \leq 0$;
e) $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

Bài 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy :

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 3y < 3 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ 2x + y - 1 < 0 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - y < 0 \\ x - 2y + 5 < 0 \\ 5x + 2y + 10 > 0 \end{cases}$$

Bài 3. Một công ty dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số kilogram dự trữ từng loại nguyên liệu và số kilogram từng loại nguyên liệu cần dùng để sản xuất ra 1 kg sản phẩm được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu		Số kilôgam nguyên liệu dự trữ	Số kilôgam nguyên liệu cần dùng sản xuất 1 kg sản phẩm	
			A	B
I		8	2	1
II		24	4	4
III		8	1	2

Công ty đó nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để tiền lãi thu về lớn nhất? Biết rằng, mỗi kilôgam sản phẩm loại A lãi 30 triệu đồng, mỗi kilôgam sản phẩm loại B lãi 50 triệu đồng.

Chương III. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Mục tiêu

Sau khi học xong chương này, người học có thể:

- Nhận biết được những mô hình thực tế (dạng bảng, biểu đồ, công thức) dẫn đến khái niệm hàm số.
- Mô tả được các khái niệm cơ bản về hàm số: định nghĩa hàm số; tập xác định, tập giá trị của hàm số; hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến, đồ thị của hàm số.
- Mô tả được các đặc trưng hình học của đồ thị hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến.
- Vận dụng được kiến thức đã học vào giải quyết một số tình huống nảy sinh từ thực tiễn, gắn với kiến thức hàm số (ví dụ: xây dựng hàm số bậc nhất trên những khoảng khác nhau để tính số tiền y (phải trả) theo số phút gọi x đối với một gói cước điện thoại,...).
- Thiết lập được bảng giá trị của hàm số bậc hai.
- Vẽ được đồ thị hàm số bậc hai.
- Nhận biết được các tính chất cơ bản của Parabol (là đồ thị hàm số bậc hai) như đỉnh, trục đối xứng.
- Nhận biết và giải thích được các tính chất của hàm số bậc hai thông qua đồ thị.
- Vận dụng được kiến thức về hàm số bậc hai và đồ thị vào giải quyết một số tình huống nảy sinh từ thực tiễn quen thuộc với người học (ví dụ: xác định độ cao của cầu, cổng có hình dạng Parabol,...)
- Giải thích được định lý về dấu của tam thức bậc hai từ việc quan sát đồ thị của hàm và có thể sử dụng định lý này để xét dấu tam thức bậc hai.
- Giải được bất phương trình bậc hai.
- Vận dụng được bất phương trình bậc hai một ẩn vào giải quyết một số tình huống nảy sinh từ thực tiễn (ví dụ: xác định chiều cao tối đa để xe có thể qua hầm có hình dạng Parabol,...).
- Giải được phương trình chứa căn thức có dạng:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}; \sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e.$$

Bài 1. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1. Hàm số. Tập xác định và tập giá trị của hàm số

Mở đầu: Cho đại lượng y biểu diễn theo x bằng công thức $y = x^2$.

Tính giá trị y khi $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$

Tính giá trị x khi $y = 1, y = 4$

Nhận xét: Với mỗi giá trị x ta chỉ tính được 1 giá trị y duy nhất.

Định nghĩa hàm số:

Nếu với mỗi giá trị x thuộc D, ta chỉ xác định được một và chỉ một giá trị y tương ứng thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số $y=f(x)$

- Tập hợp các giá trị x gọi là tập xác định hàm số. Kí hiệu: D
- Tập hợp tất cả giá trị y gọi là tập giá trị hàm số. Kí hiệu: T
- Chú ý:

$$\sqrt{f(x)} \text{ xác định} \Leftrightarrow f(x) \geq 0 ; \quad \frac{A}{f(x)} \text{ xác định} \Leftrightarrow f(x) \neq 0$$

Ví dụ 1: Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Tính giá trị hàm số tại $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1$

HD: $f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 11$

$f(-1), f(0), f(1)$

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{x+1}$

HD: y xác định $\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Vậy TXĐ $D = [-1; +\infty)$

b) $y = \frac{3x}{2x-1}$

HD: y xác định $\Leftrightarrow 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$

Vậy TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

c) $y = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{-2x+14}}$

d) $y = \frac{\sqrt{3x+6}}{x-4}$

2. Đồ thị

Trong mặt phẳng (Oxy), tập hợp các điểm $(x_0; f(x_0))$ với $x_0 \in D$, gọi là đồ thị của hàm $y = f(x)$.

3. Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

Với hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, ta nói:

- Hàm số **đồng biến** trên $(a;b)$ nếu: $\forall x_1, x_2 \in (a;b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Hàm số **nghịch biến** trên $(a;b)$ nếu: $\forall x_1, x_2 \in (a;b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ví dụ 3: Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau trên tập xác định

a) $f(x) = 2x - 1$

HD: $D = \mathbb{R}$

$\forall x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = -3x + 2$ (HS làm)

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tập xác định các hàm số:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{1}{2}x - 3; & \text{b) } y = \frac{1}{4}x^2; & \text{c) } y = \frac{x+3}{x-1} + \frac{x-1}{x+3}; \\ \text{d) } y = \frac{x+3}{x^2-3x+2}; & \text{e) } y = \frac{2x+3}{x^2-x+1}; & \text{f) } y = \frac{x+5}{9-x^2} + \frac{x+3}{x^2-4x}; \end{array}$$

Bài 2. Tìm tập xác định các hàm số:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \sqrt{3x-5}; & \text{b) } y = \sqrt{\frac{2x-5}{-3}}; & \text{c) } y = \frac{x-1}{\sqrt{5-4x}}; \\ \text{d) } y = \sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}; & \text{e) } y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}; & \text{f) } y = \frac{x^2-2}{(x+2)\sqrt{x+1}}. \end{array}$$

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = -2x + 6$

- Tính $f(0), f\left(\frac{3}{2}\right), f(a-1)$
- Tìm x để $f(x) = 0, f(x) = 3$.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$

- Tính $f(2), f(a-5)$
- Tìm x để $f(x) = 0; f(x) = -2; f(x) = 12$.

Bài 5. Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau trên tập xác định

- $y = f(x) = 5x$
- $y = f(x) = -7x - 2$

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC HAI

1. Hàm số bậc hai

Định nghĩa: Hàm số bậc hai theo biến x là hàm số cho bởi công thức có dạng:
 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực với $a \neq 0$.

Ví dụ 1: Hàm số nào sau đây là hàm số bậc hai? Nếu phải xác định hệ số a, b, c .

- $y = f(x) = 2x^2 + x$
- $y = f(x) = x^3 + x + 1$
- $y = f(x) = \frac{x+1}{x+2}$
- $y = f(x) = -3x^2 - 1$

2. Đồ thị hàm số bậc hai

Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Bước 1: TXĐ $D = \mathbb{R}$

Bước 2: Xác định tọa độ đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$

Bước 3: Trục đối xứng (d): $x = \frac{-b}{2a}$

Bước 4: Lập bảng giá trị

Bước 5: Vẽ Parabol có đỉnh I , có trục đối xứng (d)

Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$

Bước 1: Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Bước 2: Đỉnh I có tọa độ: $x_I = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2.1} = 2; y_I = (x_I)^2 - 4.(x_I) + 3 = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$.

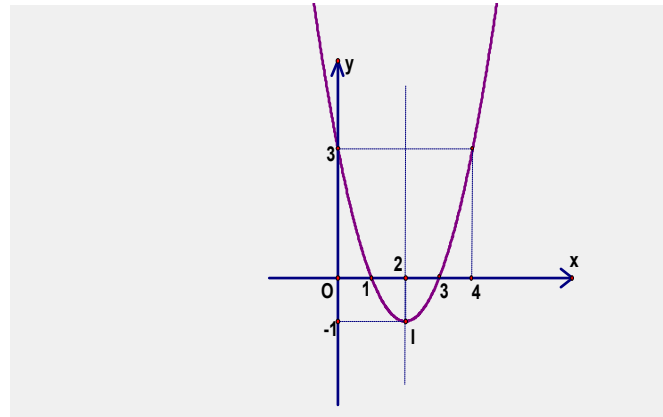
Vậy đỉnh I(2; -1).

Bước 3: Trục đối xứng (d): $x = 2$

Bước 4: Bảng giá trị

x	0	1	2	3	4
y	3	0	-1	0	3

Bước 5: Vẽ đồ thị



Ví dụ 3: Vẽ đồ thị các hàm số bậc hai

a) $y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$

b) $y = f(x) = x^2 + 2x + 2$

3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

Sự biến thiên của hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$a > 0$		
Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$		
Bảng biến thiên:		
x	$-\infty$	$+\infty$
	$\frac{-b}{2a}$	
$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)	$+\infty$	$+\infty$
	$-\frac{\Delta}{4a}$	

$a < 0$		
Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$		
Bảng biến thiên:		
x	$-\infty$	$+\infty$
	$\frac{-b}{2a}$	
$y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)	$-\infty$	$-\infty$
	$-\frac{\Delta}{4a}$	

Ví dụ 4: Lập bảng biến thiên và tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến ở ví dụ 2 và 3

BÀI TẬP

Bài 1. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc hai? Nếu phải xác định hệ số a, b, c.

a) $y = f(x) = 9x^2 + 5x + 4$

b) $y = f(x) = 3x^3 + 2x + 1$

c) $y = f(x) = -4(x+2)^3 + 2(2x^3+1)+5$

d) $y = f(x) = 5x^2 + \sqrt{x} + 2$

Bài 2. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = -\frac{1}{2}x^2$;

b) $y = x^2 - 2$;

c) $y = -x^2 + 4x$;

d) $y = x^2 - 2x + 2$.

d) $y = (3-x)^2$;

e) $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2$

Bài 3. a) Khảo sát và vẽ đồ thị (P): $y = x^2 - 2x$;

b) Dùng đồ thị (P) biện luận theo m số nghiệm phương trình $x^2 - 2x = m$.

Bài 3. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

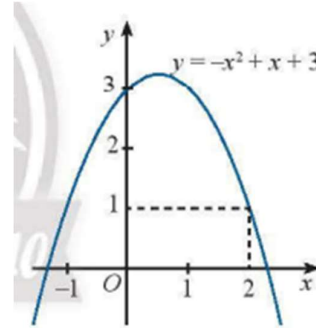
1. Tam thức bậc hai

Định nghĩa. Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức dạng: $ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những số thực cho trước với $a \neq 0$.



Đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^2 + x + 3$ được biểu diễn trong Hình 1.

- Biểu thức $f(x)$ là đa thức bậc mấy?
- Xác định dấu của $f(2)$.



2. Dấu của tam thức bậc hai

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

* $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a , $\forall x \in \mathbb{R}$

* $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a , $\forall x \neq -\frac{b}{a}$

* $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó $f(x)$ trái dấu với hệ số a $\forall x \in (x_1, x_2)$ và $f(x)$ cùng dấu với hệ số a , $\forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

$$* f(x) = ax^2 + bx + c > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$* f(x) = ax^2 + bx + c < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

Với $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ lần lượt là biệt thức và biệt thức thu gọn của $f(x)$

Ví dụ 1: $f(x) = 2x^2 - 3x + 5 > 0$, $\forall x$ vì $a = 2 > 0, \Delta = 9 - 40 = -31 < 0$

Ví dụ 2: $f(x) = x^2 - 6x + 9 > 0$, $\forall x \neq 3$ vì $a = 1 > 0, \Delta' = 0$

Ví dụ 3: Xét dấu $f(x) = x^2 - 7x + 10$

$$a = 1 > 0, f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

Ví dụ 4: Tìm m để $f(x) = x^2 - 2x - m + 5 > 0$, $\forall x$

$$f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = 1 + m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$$

Ví dụ 5: Tìm m để $f(x) = -x^2 + 2mx - 7m + 6 \leq 0$, $\forall x$

$$f(x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = m^2 - 7m + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 6$$

BÀI TẬP

Bài 1. Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a/ $2x^2 - x + 5$

b/ $x^2 - 4x + 4$

c/ $x^2 - 7x + 10$

c/ $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$

Bài 2. Tìm các giá trị m để mỗi biểu thức sau luôn dương

a/ $2x^2 - x + m - 5$

b/ $(m - 2)x^2 - 2mx + m - 9$

c/ $(m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1$

d/ $x^2 - 2mx + 6m - 5$

Bài 3. Tìm các giá trị m để mỗi biểu thức sau luôn âm

a/ $-5x^2 - x + m + 2$

b/ $(m - 1)x^2 - 2(m - 3)x + m - 5$

c/ $m^2x^2 - 2(m + 1)x + 7$

d/ $-x^2 + 2(m - 5)x - 16$

Bài 4. Cho $f(x) = \sqrt{x^2 - 2mx + 7m - 6}$. Tìm m để hàm số xác định với mọi x.

Bài 4. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN



Lợi nhuận (I) thu được trong một ngày từ việc kinh doanh một loại gạo của cửa hàng phụ thuộc vào giá bán (x) của một kilôgam loại gạo đó theo công thức $I = -3x^2 + 200x - 2325$, với I và x được tính bằng nghìn đồng. Giá trị x như thế nào thì cửa hàng có lãi từ loại gạo đó?



Hình 1



Bất phương trình bậc hai một ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c > 0,$$

với $a \neq 0$.

Nghiệm của bất phương trình bậc hai là các giá trị của biến x mà khi thay vào bất phương trình ta được bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 1

Các bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc hai một ẩn? Nếu là bất phương trình bậc hai một ẩn, $x = 1$ và $x = 2$ có là nghiệm của bất phương trình đó hay không?

- a) $x^2 + x - 3 \geq 0$; b) $3x^3 + x^2 - 1 \leq 0$.

Giải

a) $x^2 + x - 3 \geq 0$ là một bất phương trình bậc hai một ẩn.

Vì $1^2 + 1 - 3 = -1 < 0$ nên $x = 1$ không phải là nghiệm của bất phương trình trên.

Vì $2^2 + 2 - 3 = 3 > 0$ nên $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình trên.

b) $3x^3 + x^2 - 1 \leq 0$ không phải là một bất phương trình bậc hai một ẩn.



Các bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc hai một ẩn? Nếu là bất phương trình bậc hai một ẩn, $x = 2$ có là nghiệm của bất phương trình đó hay không?

- a) $x^2 + x - 6 \leq 0$; b) $x + 2 > 0$; c) $-6x^2 - 7x + 5 > 0$.



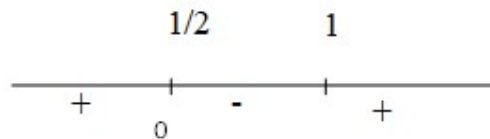
Giải bất phương trình bậc hai là tìm tập hợp các nghiệm của bất phương trình đó.

Ta có thể giải bất phương trình bậc hai bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $2x^2 - 3x + 1 > 0$

Giải

$$\text{Cho } 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$2x^2 + 3x - 2$	+	0	-	0	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	+	0	-	0
f(x)	+	0	-	0	+	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; -2] \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (3; +\infty)$.

Ví dụ 4. Với những giá trị nào của m thì đa thức $f(x) = (2-m)x^2 - 2x + 1$ luôn dương với mọi x?

Giải

Với $m = 2$ thì $f(x) = -2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ (không thỏa yêu cầu bài toán)

Với $m \neq 2$, $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - m > 0 \\ \Delta' = m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$

Vậy với $m < 1$ thì đa thức $f(x)$ luôn dương với mọi x.

Ví dụ 5. Với mọi x,y. Chứng minh rằng: $x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0$ (*)

Giải

$$(*) \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2(1-2y)x + 5y^2 - 6y + 3 > 0$$

Ta có: $\Delta' = (1-2y)^2 - (5y^2 - 6y + 3) = -(y-1)^2 - 1 < 0$ mà hệ số $a = 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x, y$

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $\frac{2x^2 - 16x + 27}{x^2 - 7x + 10} \leq 2$

Giải

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{2x^2 - 16x + 27}{x^2 - 7x + 10} - 2 \leq 0$

Ta có $\frac{-2x + 7}{x^2 - 7x + 10} \leq 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	$\frac{7}{2}$	5	$+\infty$
$-2x + 7$	+	+	0	-	-
$x^2 - 7x + 10$	+	0	-	0	+
f(x)	+	-	0	+	-

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[2; \frac{7}{2}\right] \cup (5; +\infty)$.

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các bất phương trình sau

$$a/ -5x^2 + x + 12 < 0$$

$$b/ 16x^2 + 40x + 25 < 0$$

$$c/ 3x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$d/ x^2 - x - 6 \leq 0$$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau

$$a/ \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0$$

$$b/ \frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1$$

$$c/ (2x+1)(x^2 + x - 30) \geq 0$$

$$d/ x^4 - 3x^2 \leq 0$$

Bài 3. Tìm các giá trị của m để mỗi phương trình sau có nghiệm

$$a/ (m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$$

$$b/ (m+1)x^2 + 2(m-1)x + 2m - 3 = 0$$

Bài 4. Giải các hệ bất phương trình

$$a/ \begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ -x^2 - 3x + 10 \geq 0 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 > 0 \end{cases}$$

Bài 5. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm: $x^2 + (m-2)x - 2m + 3 = 0$

Bài 6. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm với mọi m :

$$a/ x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + m + 3 = 0$$

$$b/ (m^2 + 1)x^2 + 2(m+2)x + 6 = 0$$

Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.

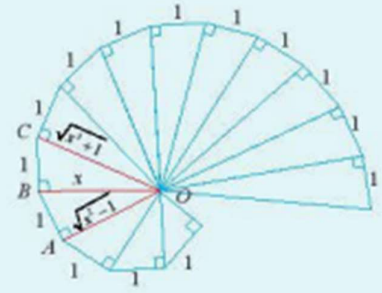
Từ khoá: Phương trình bậc hai; Phương trình chứa căn thức.



Trong hình bên, các tam giác vuông được xếp với nhau để tạo thành một đường tương tự đường xoắn ốc. Với x bằng bao nhiêu thì $OA = \frac{1}{2}OC$?

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$$



1. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$



Lời giải cho phương trình $\sqrt{-2x^2 - 2x + 11} = \sqrt{-x^2 + 3}$ như sau đúng hay sai?

$$\sqrt{-2x^2 - 2x + 11} = \sqrt{-x^2 + 3}$$

$$-2x^2 - 2x + 11 = -x^2 + 3 \quad (\text{bình phương cả hai vế để làm mất dấu căn})$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (\text{chuyển vế, rút gọn})$$

$$x = 2 \text{ hoặc } x = -4. \quad (\text{giải phương trình bậc hai})$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 2 và -4.



Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$, ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 6x - 8} = \sqrt{x^2 - 5x - 2}$.

Giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$2x^2 - 6x - 8 = x^2 - 5x - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = -2 \text{ hoặc } x = 3.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = -2$ thoả mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -2$.



Giải phương trình $\sqrt{31x^2 - 58x + 1} = \sqrt{10x^2 - 11x - 19}$.

2. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$



Lời giải cho phương trình $\sqrt{-x^2 + x + 1} = x$ như sau đúng hay sai?

$$\sqrt{-x^2 + x + 1} = x$$

$$-x^2 + x + 1 = x^2 \quad (\text{bình phương cả hai vế để làm mất dấu căn})$$

$$-2x^2 + x + 1 = 0 \quad (\text{chuyển vế, rút gọn})$$

$$x = 1 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}. \quad (\text{giải phương trình bậc hai})$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 1 và $-\frac{1}{2}$.



Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$, ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ 2

Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 5x - 13} = x + 1$.

Giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$3x^2 + 5x - 13 = (x + 1)^2$$

$$3x^2 + 5x - 13 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$x = -\frac{7}{2} \text{ hoặc } x = 2.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = 2$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.



Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 27x - 41} = 2x + 3$.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{11x^2 - 14x - 12} = \sqrt{3x^2 + 4x - 7}$;

b) $\sqrt{x^2 + x - 42} = \sqrt{2x - 30}$;

c) $2\sqrt{x^2 - x - 1} = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$;

d) $3\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{7x^2 + 2x - 5} = 0$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 3$;

b) $\sqrt{x^2 - x - 4} = x + 2$;

c) $2 + \sqrt{12 - 2x} = x$;

d) $\sqrt{2x^2 - 3x - 10} = -5$.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB ngắn hơn AC là 2 cm.

a) Biểu diễn độ dài cạnh huyền BC theo AB .

b) Biết chu vi của tam giác ABC là 24 cm. Tìm độ dài ba cạnh của tam giác đó.

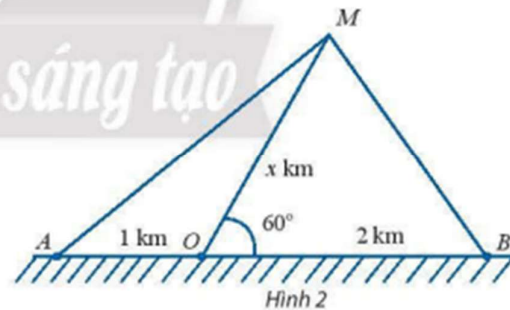
4. Một con tàu biển M rời cảng O và chuyển động thẳng theo phương tạo với bờ biển một góc 60° . Trên bờ biển có hai đài quan sát A và B nằm về hai phía so với cảng O và lần lượt cách cảng O khoảng cách 1 km và 2 km (Hình 2).

a) Đặt độ dài của MO là x km. Biểu diễn khoảng cách từ tàu đến A và từ tàu đến B theo x .

b) Tìm x để khoảng cách từ tàu đến B bằng $\frac{4}{5}$ khoảng cách từ tàu đến A .

c) Tìm x để khoảng cách từ tàu đến B nhỏ hơn khoảng cách từ tàu đến O đúng 500 m.

Lưu ý: Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 6x^2 + 41x + 44$;

b) $g(x) = -3x^2 + x - 1$;

c) $h(x) = 9x^2 + 12x + 4$.

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $7x^2 - 19x - 6 \geq 0$;

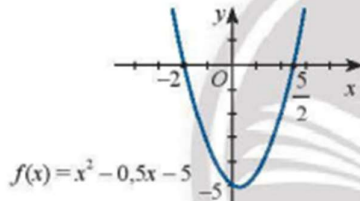
b) $-6x^2 + 11x > 10$;

c) $3x^2 - 4x + 7 > x^2 + 2x + 1$;

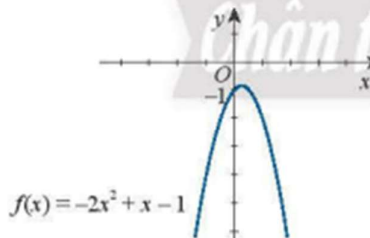
d) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$.

3. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai được cho, hãy giải các bất phương trình sau:

a) $x^2 - 0,5x - 5 \leq 0$



b) $-2x^2 + x - 1 > 0$



4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - 7x} = \sqrt{-9x^2 - 8x + 3}$;

b) $\sqrt{x^2 + x + 8} - \sqrt{x^2 + 4x + 1} = 0$;

c) $\sqrt{4x^2 + x - 1} = x + 1$;

d) $\sqrt{2x^2 - 10x - 29} = \sqrt{x - 8}$.

10. Cho hàm số $y = f(x) = 5x - 1$

a) Tính $f(0)$, $f(1)$, $f\left(\frac{-2}{5}\right)$,

b) Tìm x để $f(x) = -11$, $f(x) = 4$

11. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = 4x^2 - 1$

b) $y = \frac{2}{2x+1}$

5. Một tam giác vuông có một cạnh góc vuông ngắn hơn cạnh huyền 8 cm. Tính độ dài của cạnh huyền, biết chu vi tam giác bằng 30 cm.

6. Một quả bóng được bắn thẳng lên từ độ cao 2 m với tốc độ ban đầu là 30 m/s. Khoảng cách của bóng so với mặt đất sau t giây được cho bởi hàm số

$$h(t) = -4,9t^2 + 30t + 2$$

với $h(t)$ tính bằng đơn vị mét. Hỏi quả bóng nằm ở độ cao trên 40 m trong thời gian bao lâu? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

7. Một chú cá heo nhảy lên khỏi mặt nước. Độ cao h (mét) của cá heo so với mặt nước sau t giây được cho bởi hàm số

$$h(t) = -4,9t^2 + 9,6t.$$

Tính khoảng thời gian cá heo ở trên không.

8. Lợi nhuận một tháng $p(x)$ của một quán ăn phụ thuộc vào giá trung bình x của các món ăn theo công thức $p(x) = -30x^2 + 2100x - 15000$, với đơn vị tính bằng nghìn đồng. Nếu muốn lợi nhuận không dưới 15 triệu đồng một tháng thì giá bán trung bình của các món ăn cần nằm trong khoảng nào?

9. Quỹ đạo của một quả bóng được mô tả bằng hàm số

$$y = f(x) = -0,03x^2 + 0,4x + 1,5$$

với y (tính bằng mét) là độ cao của quả bóng so với mặt đất khi độ dịch chuyển theo phương ngang của bóng là x (tính bằng mét). Để quả bóng có thể ném được qua lưới cao 2 m, người ném phải đứng cách lưới bao xa? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

$$c) y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

$$d) y = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}$$

$$e) y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x-2}$$

$$f) y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$$

12. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc hai ? Nếu phải xác định hệ số a, b, c.

a) $y = -3x + 5$;

b) $y = |2 - x|$;

c) $y = x^2 - 4x + 5$;

d) $y = -x^2 - x + 3$.

13. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = x^2 + 4x + 3$

b) $y = -x^2 - 4x + 5$

c) $y = x^2 - 4x + 5$

d) $y = -x^2 - 2x - 1$

14. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

b) Tìm m để phương trình $x^2 - 6x + 5 = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

CHƯƠNG IV. ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Mục tiêu: Sau khi học xong chương này, người học có thể:

– Vận dụng được quy tắc cộng và quy tắc nhân trong một số tình huống đơn giản (ví dụ: đếm số khả năng xuất hiện mặt sấp/ngửa khi tung một số đồng xu,...).

– Tính được số các hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp đơn giản.

– Tính được số các hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp bằng máy tính cầm tay.

– Nhận biết nhị thức Newton $(a + b)^n$;

– Khai triển được nhị thức Newton $(a + b)^n$, với số mũ $n = 4$, bằng cách vận dụng tổ hợp. – Khai triển được nhị thức Newton $(a + b)^n$ với số mũ $n = 5$ bằng cách vận dụng tổ hợp

Bài 1. QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN.

1. Quy tắc cộng

Một công việc hoàn thành bởi một trong hai hành động, nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

Ví dụ 1: Một bài toán nếu giải bằng phương pháp đại số có ba cách giải, giải bằng phương pháp hình học có hai cách giải. Để giải được bài toán đó có mấy cách giải?

Giải

Chọn một cách giải bài toán có: $3 + 2 = 5$ (cách giải)

Ví dụ 2: Một lớp học có 18 sinh viên giỏi toán, 20 sinh viên giỏi anh văn, trong đó có 10 sinh viên giỏi cả toán và anh văn. Hỏi có mấy cách chọn một sinh viên giỏi toán hoặc anh văn?

Giải

Chọn sinh viên giỏi toán: 18 (cách)

Chọn sinh viên giỏi anh văn: $20 - 10 = 10$ (cách) (Vì có 10 sinh viên đã được chọn)

Theo quy tắc cộng: $18 + 10 = 28$ (cách)

2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc đó.

Ví dụ 3: Để đi từ A đến C ta bắt buộc phải qua điểm B. Có 2 đường khác nhau để đi từ A đến B và có 3 đường khác nhau để đi từ B đến C.

Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C?

Giải

Đi từ A đến B có 2 cách chọn.

Đi từ B đến C có 3 cách chọn.

Theo quy tắc nhân: $2.3 = 6$ cách khác nhau để đi từ A đến C.



Ví dụ 4: Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau, lấy từ các chữ số trong tập A?

Giải

$X = \overline{abc}$ là số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau được lấy từ A

Trường hợp 1: $c = 0$ nên c có 1 cách chọn

$a \neq 0$ nên a có 5 cách chọn

$b \neq a, c$ nên b có 4 cách chọn

Theo qui tắc nhân: $4.5 = 20$ số X (có chữ số tận cùng $c = 0$)

Trường hợp 2: $c = 2$ hay $c = 4$ nên c có 2 cách chọn

$a \neq 0, c$: nên a có 4 cách chọn

$b \neq a, c$: nên b có 4 cách chọn

Theo qui tắc nhân: $2.4.4 = 32$ số X (có chữ số tận cùng là $c = 2$ hay $c = 4$)

Vậy tổng hai trường hợp ta được 52 số X cần tìm.

BÀI TẬP

Bài 1: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

- Hai chữ số ;
- Ba chữ số khác nhau.

Bài 2: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

- Hai chữ số;
- Ba chữ số khác nhau;
- Số tự nhiên đó là số chẵn có 3 chữ số khác nhau.

Bài 3: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số khác nhau;
- Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và số tự nhiên đó chia hết cho 5;
- Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và số tự nhiên đó lớn 2000.

Bài 02: HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

1. Hoán vị

❖ **Phép toán giai thừa:** $n! = 1.2.3...$

Quy ước: $0! = 1$

Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi kết quả của sự sắp xếp n phần tử của tập A được gọi là *hoán vị của n phần tử*. Số hoán vị của n phần tử được kí hiệu là: P_n

Công thức tính: $P_n = A_n^n = n!$

Ví dụ 1: Một bàn có 5 học sinh. Hỏi có mấy cách xếp chỗ ngồi?

Giải

Mỗi cách xếp chỗ của 5 học sinh ở một bàn là một hoán vị của 5 phần tử.

Do đó, số cách sắp xếp là: $P_5 = 5! = 120$.

Ví dụ 2: Từ các chữ số 1, 3, 4. Hỏi thành lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau?

Giải

Mỗi số tự nhiên được thành lập là một hoán vị của các chữ số 1, 2, 3.

Vậy số tự nhiên được thành lập là $3! = 1.2.3 = 6$.

2. Chỉnh hợp

Định nghĩa: Chỉnh hợp chập k của n phần tử ($k \leq n$) là một bộ (nhóm) có thứ tự gồm k phần tử khác nhau được lấy từ n phần tử đã cho.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử kí hiệu là: A_n^k

Công thức tính: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$

Ví dụ 3: Cho 4 chữ số 1, 2, 3, 4. Có bao nhiêu cách lập một số có 3 chữ số khác nhau từ các chữ số trên?

Giải

Mỗi số được thành lập có 3 chữ số khác nhau từ 4 chữ số trên là một chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử.

Do đó, số các chữ số được thành lập là: $A_4^3 = 24$.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người vào một cái bàn có 6 chỗ ngồi?

Giải

Ta thấy sắp 4 người vào bàn có 6 chỗ ngồi chính là lấy 4 vị trí trong 6 vị trí và có kể thứ tự. Vậy mỗi cách sắp xếp là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử nên số cách sắp xếp chính là $A_6^4 = 360$ cách khác nhau.

3. Tổ hợp

Định nghĩa: Tổ hợp chập k của n phần tử ($k \leq n$) là một nhóm không phân biệt thứ tự, gồm k phần tử khác nhau chọn từ n phần tử đã cho.

Số tổ hợp chập k của n phần tử kí hiệu là C_n^k

Công thức tính: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$

Ví dụ 5: Mỗi đề thi gồm có 5 câu hỏi được lấy trong 50 câu hỏi cho trước. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi khác nhau?

Giải

Số đề thi có thể lập được là: $C_{50}^5 = \frac{50!}{(50-5)! \cdot 5!} = 2118760$

Ví dụ 6: Một tập vé xổ số có 50 tờ vé số, trong đó có 9 tờ vé số trúng thưởng. Một người lấy ngẫu nhiên ra 5 tờ vé số. Hỏi có bao nhiêu khả năng trong 5 tờ vé số đó:

- Có 5 tờ vé số đều trúng thưởng?
- Có 2 tờ vé số trúng thưởng?
- Không có tờ vé số nào trúng thưởng?

Giải

- Số khả năng trong 5 tờ vé số lấy ra cả 5 tờ vé số đều trúng thưởng là $C_9^5 = 126$.
- Số khả năng có 2 tờ vé số trúng thưởng: $C_9^2 C_{41}^3 = 383760$.
- Không có tờ vé số nào trúng thưởng: $C_{41}^5 = 749398$.

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm n biết

- $A_n^2 = 12$
- $A_n^2 - A_n^1 = 3$
- $C_n^4 - C_n^3 = \frac{5}{4} A_{n-1}^2$
- $\frac{P_n}{P_{n-2}} = 20$

Bài 2: Có 4 nam và 4 nữ, có bao nhiêu cách sắp xếp thành một hàng:

- Tùy ý;
- Nam, nữ xen kẽ với nhau;
- Nữ trước nam sau.

Bài 3: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lập số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau:

- Hỏi có bao nhiêu số;
- Bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ.

Bài 4: Có bảy bông hoa màu khác nhau và 3 cái bình khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba bình (Mỗi bình chỉ cắm mỗi hoa)

Bài 5: Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

Bài 6: Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm thẳng hàng:

- Hỏi lập được bao nhiêu đoạn thẳng từ các điểm đó?
- Hỏi lập được bao nhiêu véc tơ mà điểm đầu và điểm cuối từ 6 điểm đó?
- Hỏi lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của tam giác là từ 6 điểm đó?

Bài 03: NHỊ THỨC NIU-TƠN

1. Công thức nhị thức Niu –Tơn

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (a, b \text{ là các số thực; } n \text{ là số tự nhiên})$$

- Chú ý:**
- Trong khai triển nhị thức Niu-Tơn số các hạng tử là $n + 1$;
 - Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0 , số mũ của b tăng dần từ 0 đến n , nhưng tổng số mũ của a và b luôn luôn bằng n ;
 - Các hệ số của mỗi cặp hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau;
 - Số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

$$a) \left(x^2 - \frac{2}{x} \right)^{15}$$

$$b) \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^{18}$$

$$c) \left(2x^3 + \frac{1}{x^2} \right)^{15}$$

$$d) \left(2x^3 + \frac{2}{x^2} \right)^{10}$$

$$e) \left(x + \frac{1}{x} \right)^{12}$$

$$f) \left(2x + \frac{1}{x^3} \right)^7$$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV.

Bài 1: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5.

- Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 3 chữ số khác nhau;
- Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và số tự nhiên đó chia hết cho 5.

Bài 2: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5; 6; 7; 8

- Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau;
- Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau;
- Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số;
- Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 3 chữ số khác nhau;

Bài 3: Hãy tìm:

- Số hạng thứ 6 trong khai triển: $(3 - x)^{10}$
- Tìm hệ số của số hạng thứ 4 trong khai triển: $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{15}$

CHƯƠNG V: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. VECTOR

Mục tiêu: Sau khi học xong chương này, người học có thể:

- Nhận biết được giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .
- Tính được giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc từ 0° đến 180° bằng máy tính cầm tay.
- Giải thích được hệ thức liên hệ giữa giá trị lượng giác của các góc phụ nhau, bù nhau.
- Nhận biết được các hệ thức lượng cơ bản trong tam giác: định lý cosin, định lý sin, công thức tính diện tích tam giác.
- Giải thích được các hệ thức lượng cơ bản trong tam giác: định lý cosin, định lý sin, công thức tính diện tích tam giác.
- Mô tả được cách giải tam giác và vận dụng được vào việc giải một số bài toán có nội dung thực tiễn (ví dụ: xác định khoảng cách giữa hai địa điểm khi gặp vật cản, xác định chiều cao của vật khi không thể đo trực tiếp,...).
- Nhận biết được khái niệm vector, vector bằng nhau, vector-không.
- Biểu thị được một số đại lượng trong thực tiễn bằng vector.
- Thực hiện được các phép toán trên vector (tổng và hiệu hai vector, tích của một số với vector, tích vô hướng của hai vector) và mô tả được những tính chất hình học (ba điểm thẳng hàng, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác,...) bằng vector.

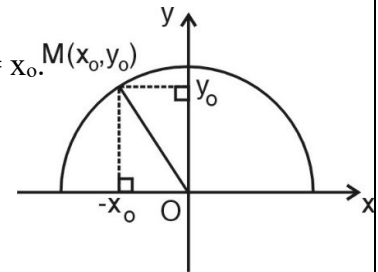
– Sử dụng được vector và các phép toán trên vector để giải thích một số hiện tượng có liên quan đến Vật lý và Hoá học (ví dụ: những vấn đề liên quan đến lực, đến chuyển động,...). – Vận dụng được kiến thức về vector để giải một số bài toán hình học và một số bài toán liên quan đến thực tiễn (ví dụ: xác định lực tác dụng lên vật,...).

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°

1. Giá trị lượng giác

Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$. Gọi (x_0, y_0) là tọa độ điểm M, ta có :

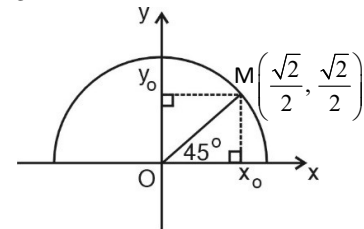
- Tung độ y_0 của điểm M là sin của góc α . Kí hiệu: $\sin \alpha = y_0$.
- Hoành độ x_0 của điểm M là cosin của góc α . Kí hiệu: $\cos \alpha = x_0$.
- Tỉ số $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$) là tang của góc α . Kí hiệu: $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$.
- Tỉ số $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$) là cotang của góc α . Kí hiệu: $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$.



Các số $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của cung α .

Ví dụ 1: Tìm các giá trị lượng giác của góc 45° .

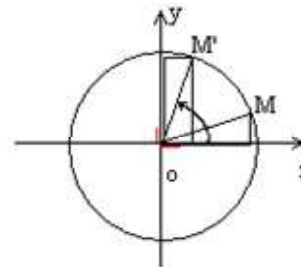
- Lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho: $\widehat{xOM} = 45^\circ$.
- Khi đó tọa độ của điểm M $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- Vậy: $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\cot 45^\circ = 1$



2. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

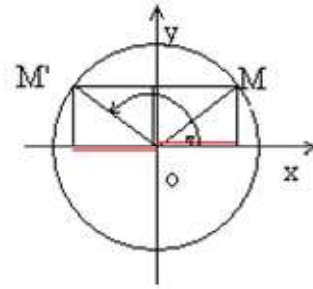
2.1. Hai góc phụ nhau

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot \alpha & \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan \alpha \end{aligned}$$



Với mọi góc α thỏa $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ta luôn có:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha & \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$



2.2. Hai góc bù nhau

Ví dụ 2: Tính giá trị lượng giác của góc 135° .

- $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\tan 135^\circ = -\tan(180^\circ - 135^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$;
- $\cot 135^\circ = -\cot(180^\circ - 135^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$

4. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
GT lượng giác $\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

Ví dụ 3: Tìm các giá trị lượng giác của góc: a) 60° ; b) 150°

Giải

$$\text{a) } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{b) } \sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cot 150^\circ = -\sqrt{3}$$

Ví dụ 4: Tính

$$A = \sin 150^\circ + \tan 135^\circ + \cot 45^\circ$$

$$B = 2\cos 30^\circ - 3\tan 150^\circ + \cot 135^\circ$$

Giải

$$A = \sin 150^\circ + \tan 135^\circ + \cot 45^\circ = \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

$$B = 2\cos 30^\circ - 3\tan 150^\circ + \cot 135^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + (-1) = 2\sqrt{3} - 1$$

4. Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác một góc

Có nhiều loại máy tính cầm tay có thể giúp tính nhanh chóng giá trị lượng giác của một góc. Chẳng hạn, ta có thể thực hiện trên một loại máy tính cầm tay như sau:

Sau khi mở máy, ấn liên tiếp các phím **[SHIFT]** **[MENU]** để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.

1: Input/Output
2: Angle Unit
3: Number Format
4: Engineer Symbol

Ấn phím **[2]** để vào chế độ cài đặt đơn vị đo góc.

1: Degree
2: Radian
3: Gradian

Ấn tiếp phím **[1]** để xác định đơn vị đo góc là “độ”.

Ấn các phím **[MENU]** **[1]** để vào chế độ tính toán.

1: Calculate

a) Tính các giá trị lượng giác của góc

Ví dụ 3

Sử dụng máy tính cầm tay, tính $\sin 125^\circ 34' 28''$.

Giải

Để tính $\sin 125^\circ 34' 28''$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

[sin] **[1]** **[2]** **[5]** **[...]** **[3]** **[4]** **[...]** **[2]** **[8]** **[...]** **[)]** **[=]**

và được kết quả $\sin 125^\circ 34' 28'' \approx 0,8133603236$, với hiển thị trên màn hình như hình bên.

$\sin(125^\circ 34' 28'')$
0.8133603236

Để tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ta cũng làm như trên, chỉ thay phím **[sin]** bằng phím **[cos]**, **[tan]**.

Trường hợp muốn tính $\cot \alpha$, ta tính $\frac{1}{\tan \alpha}$.

b) Xác định số đo của góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó

Ví dụ 4

Sử dụng máy tính cầm tay, tìm α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) biết $\cos \alpha = -0,2341$.

Giải

Để tìm α khi biết $\cos \alpha = -0,2341$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

[SHIFT] **[cos]** **[(-)]** **[0]** **[.]** **[2]** **[3]** **[4]** **[1]** **[)]** **[=]** **[...]**

và được kết quả $\alpha \approx 103^\circ 32' 19''$, với hiển thị trên màn hình như hình bên.

$\cos^{-1}(-0.2341)$
103° 32' 18.88"

Để tìm α khi biết $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ ta cũng làm tương tự như trên, chỉ thay phím **[cos]** bằng các phím **[sin]**, **[tan]**.

Để tìm α khi biết $\cot \alpha$, ta tính $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ trước rồi tính α sau.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$. Sử dụng mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau, phụ nhau tính giá trị của $E = 2\cos 30^\circ + \sin 150^\circ + \tan 135^\circ$

Bài 2. Chứng minh rằng :

- a. $\sin 20^\circ = \sin 160^\circ$
b. $\cos 50^\circ = -\cos 130^\circ$

Bài 3. Tìm góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) trong mỗi trường hợp

- a. $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, b. $\sin \alpha = 0$, c. $\tan \alpha = 1$, d. $\cot \alpha$ không xác định

Bài 4. Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

- a) $\sin A = \sin(B + C)$
b) $\cos A = -\cos(B + C)$

Bài 5. Chứng minh rằng:

- a. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ b. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$)
c. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ($\alpha \neq 90^\circ$) d. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)

Bài 6. Cho $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Tính giá trị của biểu thức: $E = 2\sin^2 \alpha + 5\cos^2 \alpha$

Bài 7. Cho $\tan \alpha = 2$. Tính các biểu thức:

$$A = \frac{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}{\sin \alpha - 7\cos \alpha}, \quad B = \frac{2\cos^2 \alpha + 3\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{3\sin^2 \alpha + 2}$$

Bài 8. Tính

$$A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ$$

$$B = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 180^\circ$$

$$C = \cos 315^\circ + \sin 330^\circ + \sin 250^\circ - \cos 150^\circ$$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau

$$a / \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$$

$$b / \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$$

Bài 10. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính:

$$a / \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad b / \cos(\pi + \alpha)$$

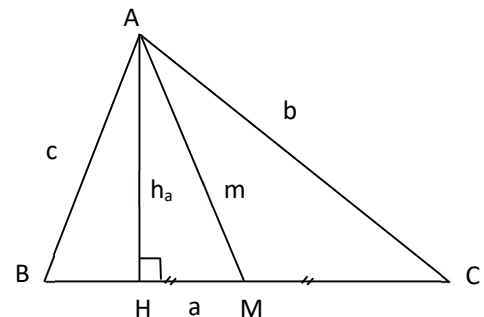
$$c / \tan(\pi - \alpha) \quad d / \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Bài 2. ĐỊNH LÝ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN

Các kí hiệu trong ΔABC

- Độ dài: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
- h_a, h_b, h_c : độ dài đường cao ứng với A, B, C
- m_a, m_b, m_c : độ dài trung tuyến ứng với A, B, C
- $p = \frac{a + b + c}{2}$: nửa chu vi ΔABC .
- S : Diện tích ΔABC .
- R, r : bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC .

1. Định lý côsin trong tam giác



Câu hỏi thảo luận: Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông có $AB = c, AC = b, BC = a$

. Chứng minh rằng: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

1.1. Định lý cosin

Trong tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$ ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Ví dụ 1: Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^\circ, b = 8\text{cm}, c = 5\text{cm}$. Tính a ,

Giải

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow a = 7(\text{cm})$$

1.2. Hệ quả

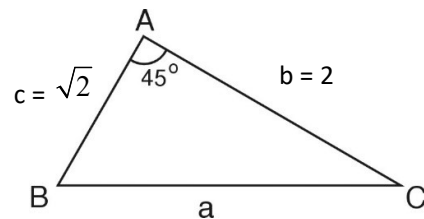
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC có $\hat{A} = 45^\circ, b = 2, c = \sqrt{2}$. Tính a và số đo góc B

Giải

$$\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 4 + 2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$\bullet \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2 + 2 - 4}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$



2. Định lý sin trong tam giác

Câu hỏi thảo luận: Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông có $BC = a, AC = b, AB = c$ và R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh

$$\text{rằng: } 2R = \frac{a}{\sin A}$$

2.1. Định lý cosin

Trong tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$ ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

2.2. Hệ quả

$$a = 2R \cdot \sin A$$

$$b = 2R \cdot \sin B$$

$$c = 2R \cdot \sin C$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^\circ, a = 7\text{cm}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R của ΔABC .

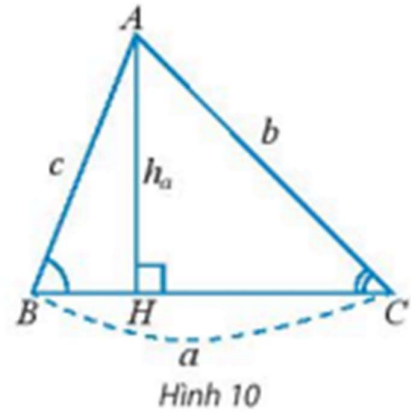
Giải

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{7}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}$$

3. Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC như hình 10. công thức tính diện tích S của tam giác ABC

- $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$
- $S = \frac{1}{2}a.b.\sin C = \frac{1}{2}b.c.\sin A = \frac{1}{2}a.c.\sin B$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = p.r$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Hê-rông)



Ví dụ 4: Cho ΔABC có $a = 7, b = 8, c = 5$. Tính $S, h_a, R, r, \hat{A}$.

Giải

- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+5}{2} = 10 \Rightarrow S = \sqrt{10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5} = 10\sqrt{3}$
- $S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{7} = \frac{20\sqrt{3}}{7}$
- $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$
- $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$
- $S = \frac{1}{2}b.c.\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{8 \cdot 5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$

4. Bài tập áp dụng

Bài tập 1. Cho ΔABC có $AB = 6, AC = 10, \hat{A} = 120^\circ$.

- Tính độ dài đường cao AH của ΔABC .
- Tính độ dài đoạn phân giác trong AD của ΔABC .
- Gọi I là điểm nằm trong ΔABC . Gọi E, F, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên AB, AC, BC . Tính $IE \cdot AB + IF \cdot AC + IK \cdot BC$

Giải

- Tính độ dài đường cao AH của ΔABC

Ta có: $S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$

Trong ΔABC ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab.\cos A = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cos 120^\circ$
 $= 100 + 36 + 60 = 196 \Rightarrow a = 14$

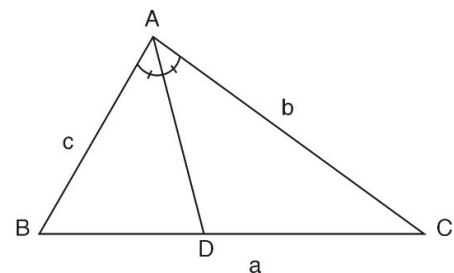
Mặt khác: $S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 15\sqrt{3}$

Vậy: $h_a = \frac{2 \cdot 15\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{7}$

- Tính độ dài đoạn phân giác trong AD của ΔABC

Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}AB.AD.\sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}AD.AC.\sin \frac{A}{2}$$



$$\Leftrightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot (AB + AC)$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{\sin \frac{A}{2} \cdot (AB + AC)} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 60^\circ \cdot (6 + 10)} = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}$$

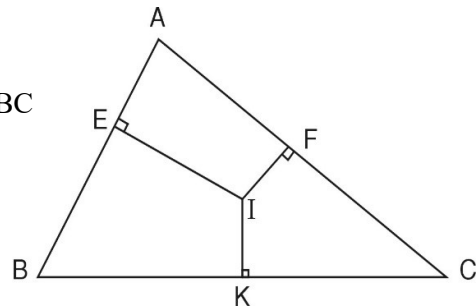
c. Tính: $IE \cdot AB + IF \cdot AC + IK \cdot BC$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta IAB} + S_{\Delta IAC} + S_{\Delta IBC}$$

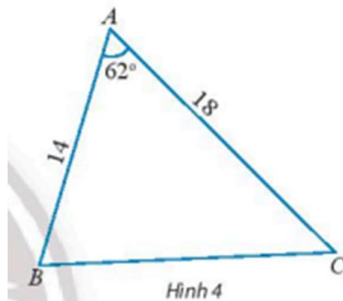
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} IE \cdot AB + \frac{1}{2} AC \cdot IF + \frac{1}{2} IK \cdot BC$$

$$\Leftrightarrow 15\sqrt{3} = \frac{1}{2} (IE \cdot AB + AC \cdot IF + IK \cdot BC)$$

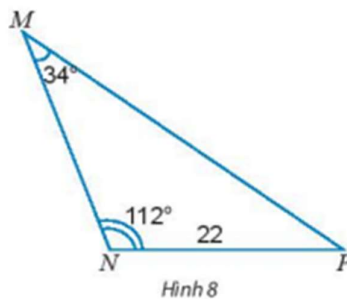
$$\Leftrightarrow IE \cdot AB + IF \cdot AC + IK \cdot BC = 30\sqrt{3}$$



Bài tập 2. Tính các cạnh và các góc chưa biết của tam giác ABC trong Hình 4



Bài tập 3. Tính các cạnh và các góc chưa biết của tam giác MNP trong Hình 8



Bài 4. Tính diện tích một cánh buồm hình tam giác. Biết cánh buồm đó có chiều dài một cạnh là 3,2 m và hai góc kề cạnh đó có số đo là 48° và 105° (Hình 12).



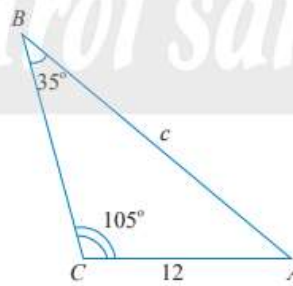
BÀI TẬP

1. Tính độ dài cạnh x trong các tam giác sau:



Hình 13

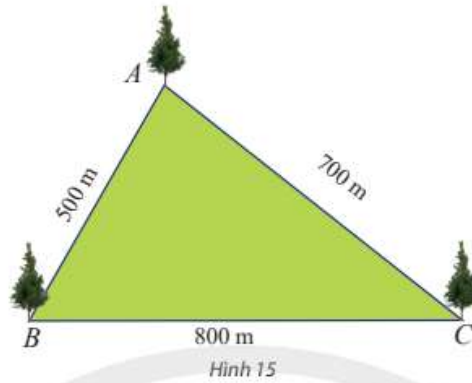
2. Tính độ dài cạnh c trong tam giác ABC ở Hình 14.



Hình 14

3. Cho tam giác ABC , biết cạnh $a = 152$, $\widehat{B} = 79^\circ$, $\widehat{C} = 61^\circ$. Tính các góc, các cạnh còn lại và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

4. Một công viên có dạng hình tam giác với các kích thước như Hình 15. Tính số đo các góc của tam giác đó.



5. Tính diện tích một lá cờ hình tam giác cân có độ dài cạnh bên là 90 cm và góc ở đỉnh là 35° .



6. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 8$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.
- Tính diện tích tam giác ABC .
 - Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính diện tích tam giác IBC .
7. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và độ dài ba cạnh AB , BC , CA lần lượt là 15, 18, 27.
- Tính diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
 - Tính diện tích tam giác GBC .
8. Cho h_a là đường cao vẽ từ đỉnh A , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh hệ thức: $h_a = 2R \sin B \sin C$.
9. Cho tam giác ABC có góc B nhọn, AD và CE là hai đường cao.
- Chứng minh $\frac{S_{BDE}}{S_{BAC}} = \frac{BD \cdot BE}{BA \cdot BC}$.
 - Biết rằng $S_{ABC} = 9S_{BDE}$ và $DE = 2\sqrt{2}$. Tính $\cos B$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
10. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các đường chéo $AC = x$, $BD = y$ và góc giữa AC và BD bằng α . Gọi S là diện tích của tứ giác $ABCD$.
- Chứng minh $S = \frac{1}{2}xy \sin \alpha$.
 - Nêu kết quả trong trường hợp $AC \perp BD$.

Bài 3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

1. Giải tam giác

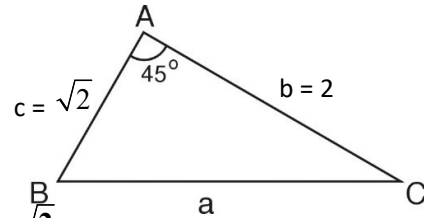
Giải tam giác là tìm số đo các cạnh và các góc còn lại của tam giác khi ta biết được các yếu tố đủ để xác định tam giác đó.

Ví dụ 1 : Giải tam giác ABC biết $\widehat{A} = 45^\circ$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$

Giải

$$\bullet \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 4 + 2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

- $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2 + 2 - 4}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$
- $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{A}) = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$



Ví dụ 2: Giải ΔABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

Giải

- $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + 8 - 2\sqrt{12} - 12}{2 \cdot 2\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{4 \cdot 2(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$
- $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12 + 8 - 4\sqrt{3} - 8}{2 \cdot 2\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{4 \cdot \sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$
- $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$

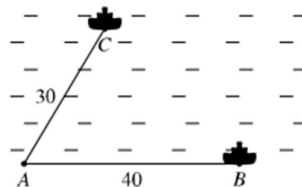
Ví dụ 3: Giải ΔABC biết $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $a = 5\sqrt{3}$

Giải

- $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$
- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B = \frac{5\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} \cdot \sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$
- $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 15^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \sin 15^\circ = 10 \cdot \sin 15^\circ \approx 2.59$

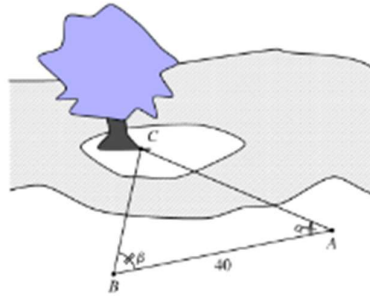
2. Áp dụng giải tam giác vào thực tế

Áp dụng 1. Hai chiếc tàu thuyền cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lý một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lý một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lý? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?



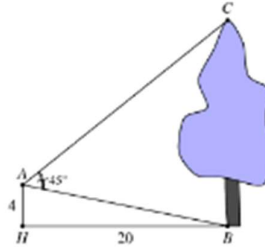
- A. 61 hải lý. B. 36 hải lý. C. 21 hải lý. D. 18 hải lý.

Áp dụng 2. Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40$ m, $\widehat{CAB} = 45^\circ$, $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?



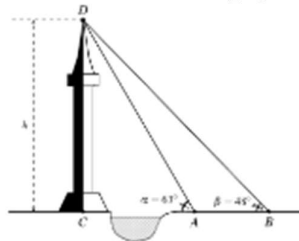
- A. 53 m . B. 30 m . C. 41,5 m . D. 41 m .

Áp dụng 3. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết $AH = 4$ m, $HB = 4$ m, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



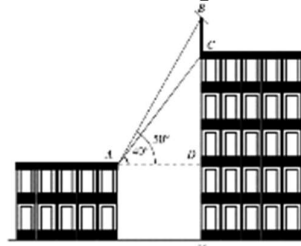
- A. 17,5 m . B. 17 m . C. 16,5 m . D. 16 m .

Áp dụng 4. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24$ m, $\widehat{CAD} = 63^\circ$, $\widehat{CBD} = 48^\circ$. Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?



- A. 18 m . B. 18,5 m . C. 60 m . D. 60,5 m .

Áp dụng 5. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?



- A. 12 m . B. 19 m . C. 24 m . D. 29 m .

BÀI TẬP

Dạng 1. Giải tam giác

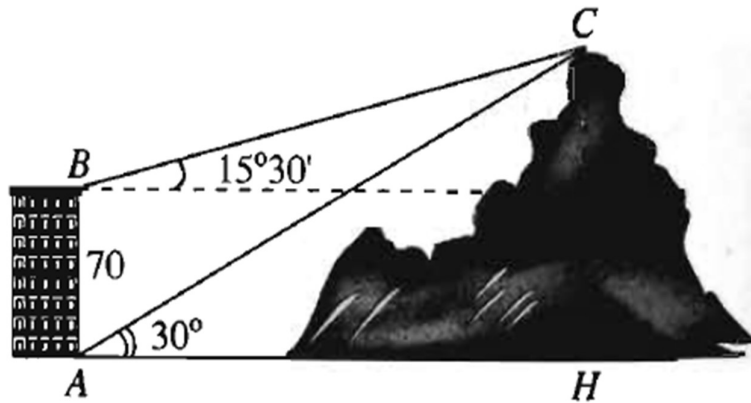
Câu 1. Giải tam giác ABC , biết

- a) $c = 14$, $A = 60^\circ$, $B = 40^\circ$.

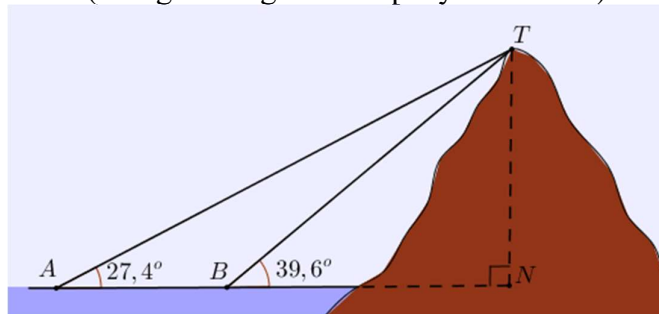
- b) $b = 4,5$, $A = 30^\circ$, $C = 75^\circ$.
- Câu 2.** Giải tam giác ABC , biết
- a) $c = 35$, $A = 40^\circ$, $C = 120^\circ$.
- b) $a = 137,5$, $B = 83^\circ$, $C = 57^\circ$.
- Câu 3.** Giải tam giác ABC , biết $a = 6,3$; $b = 6,3$; $\hat{C} = 54^\circ$.
- Câu 4.** Giải tam giác ABC , biết $b = 32$; $c = 45$; $\hat{A} = 87^\circ$.
- Câu 5.** Giải tam giác ABC , biết $a = 7$; $b = 23$; $\hat{C} = 130^\circ$.
- Câu 6.** Giải tam giác ABC , biết $b = 14$; $c = 10$; $\hat{A} = 145^\circ$.
- Câu 7.** Giải tam giác ABC , biết $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$.
- Câu 8.** Giải tam giác ABC , biết $a = 6$; $b = 5$; $c = 7$.
- Câu 9.** Giải tam giác ABC , biết $a = 6$; $b = 7,3$; $c = 4,8$.
- Câu 10.** Giải tam giác ABC , biết $\hat{B} = 60^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$; $BC = a$.

Dạng 2. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

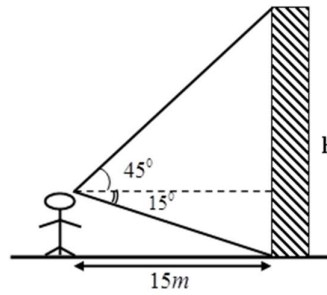
- Câu 1.** Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70\text{ m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm
- Câu 2.** gang một góc $15^\circ 30'$ (như hình vẽ). Tính độ cao CH của ngọn núi so với mặt đất.



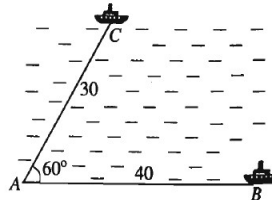
- Câu 3.** Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536 m thì ngọn núi cao bao nhiêu (tính gần đúng sau dấu phẩy hai chữ số)?



- Câu 4.** Một người quan sát đứng cách một cái tháp 15m, nhìn thấy đỉnh tháp một góc 45° và nhìn dưới chân tháp một góc 15° so với phương nằm ngang như trong hình vẽ. Tính chiều cao h của tháp.



- Câu 5.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



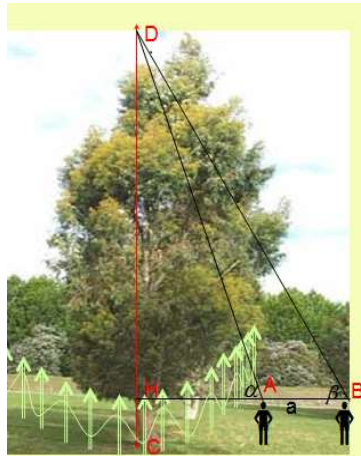
- Câu 6.** Vịnh Vân Phong – tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nối từ Hòn Quạ đến đảo Diệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí C trên Hòn Quạ đến vị trí B trên Bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí A rồi mới đến vị trí B . Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là 4 km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4$ km, $AC = 0,6$ km và góc giữa AB và AC là 60° ?



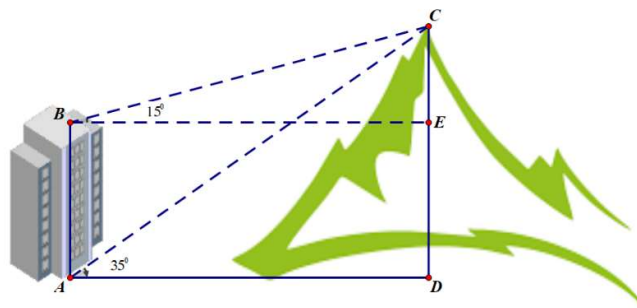
- Câu 7.** Trong một lần đi khảo sát các đảo thuộc quần đảo Trường Sa của Việt Nam, các nhà khoa học phát hiện có một đảo có dạng hình tròn, tâm của đảo này bị che bởi một bãi đá nhỏ mà các nhà khoa học không thể tới được. Các nhà khoa học muốn đo bán kính của đảo này, biết rằng các nhà khoa học chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài. Nêu cách để các nhà khoa học tính được bán kính đảo?
- Câu 8.** Giả sử chúng ta cần đo chiều cao AB của một tòa tháp với B là chân tháp và A là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm C và D có khoảng cách $CD = 30m$ sao cho ba điểm B, C, D thẳng hàng người ta đo các góc $\widehat{BCA} = 43^\circ$ và góc $\widehat{BDA} = 67^\circ$. Hãy tính chiều cao AB của tòa tháp

- Câu 9.** Trong tam giác vuông AHC ta có $AH = AC \cdot \cos \widehat{HAC} \approx 6,30 \cdot \cos 35^\circ \approx 5,16$ (km).

Từ hai vị trí A, B người ta quan sát một cái cây (hình vẽ). Lấy C là điểm gốc cây, D là điểm ngọn cây. A, B cùng thẳng hàng với điểm H thuộc chiều cao CD của cây. Người ta đo được $AB = 10m$, $HC = 1,7m$, $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 48^\circ$. Tính chiều cao của cây đó.



Câu 10. Một người quan sát đỉnh của một ngọn núi nhân tạo từ hai vị trí khác nhau của tòa nhà. Lần đầu tiên người đó quan sát đỉnh núi từ tầng trệt với phương nhìn tạo với phương nằm ngang 35° và lần thứ hai người này quan sát tại sân thượng của cùng tòa nhà đó với phương nằm ngang 15° (như hình vẽ). Tính chiều cao ngọn núi biết rằng tòa nhà cao $60(m)$.

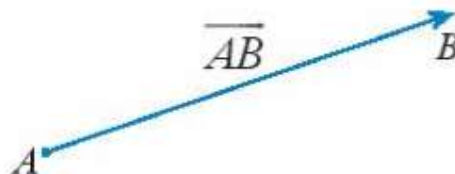


BÀI 4: KHÁI NIỆM VECTOR

1. Định nghĩa vector

Vector là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là đã chỉ ra điểm đầu và điểm cuối.

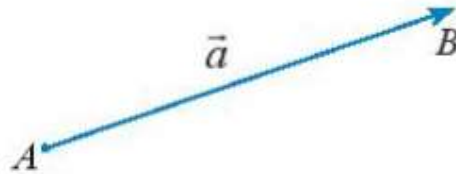
- Vector có điểm đầu A , điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là vector $\overrightarrow{AB}$



- Đường thẳng đi qua hai điểm A và B gọi là giá của vector $\overrightarrow{AB}$.

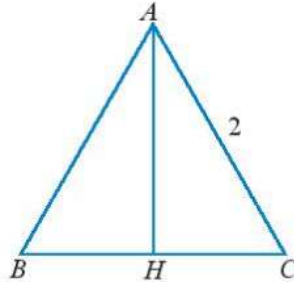
- Độ dài của đoạn thẳng AB gọi là độ dài của vector $\overrightarrow{AB}$ và được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$. Như vậy ta có: $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

Chú ý: Một vector khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối có thể viết là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$



Ví dụ 1

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC .



Tìm điểm đầu, điểm cuối, giá và độ dài của các vector: $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BH}$.

Giải

Vector $\overrightarrow{CA}$ có điểm đầu là C , điểm cuối là A và có giá là đường thẳng AC .

Vector $\overrightarrow{AH}$ có điểm đầu là A , điểm cuối là H và có giá là đường thẳng AH .

Vector $\overrightarrow{BH}$ có điểm đầu là B , điểm cuối là H và có giá là đường thẳng BH .

Ta có: $CA = 2, BH = 1, AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

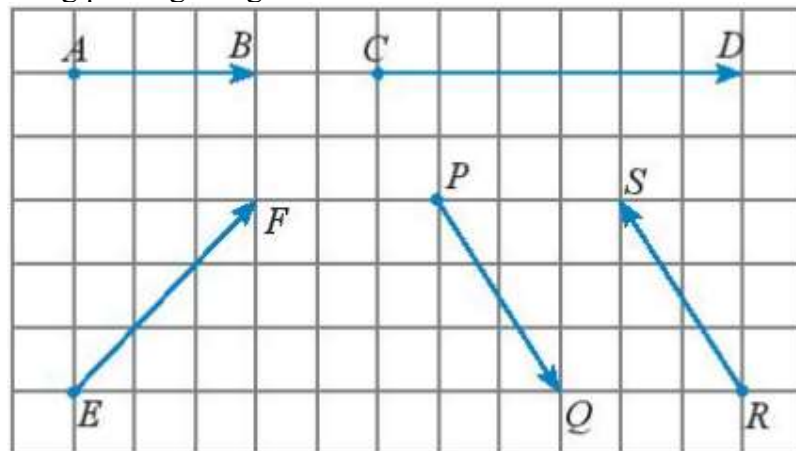
Suy ra $|\overrightarrow{CA}| = 2, |\overrightarrow{BH}| = 1, |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{3}$.

2. Hai vector cùng phương, cùng hướng

Hai vector được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Ví dụ 2

Tìm các cặp vector cùng phương trong Hình



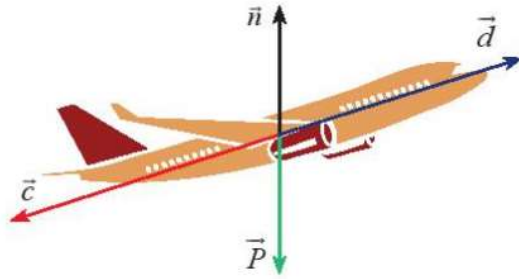
Giải

Trong Hình $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương vì có giá trùng nhau; $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ cùng phương vì có giá song song.

Chú ý: Trong Hình, hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và có cùng hướng đi từ trái sang phải. Ta nói $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vector cùng hướng. Hai vector $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ cùng phương nhưng có hướng ngược nhau. Ta nói hai vector $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ là hai vector ngược hướng. **Nhận xét:** Hai vector cùng phương chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Ví dụ 3

Tìm các cặp lực ngược hướng trong số các lực tác động vào máy bay trong Hình .



Giải

Quan sát Hình , ta thấy lực nâng $\vec{n}$ ngược hướng với trọng lực $\vec{P}$; lực cản $\vec{c}$ ngược hướng với lực đẩy $\vec{d}$.

Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Thật vậy, ta thấy nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá trùng nhau nên chúng cùng phương. Ngược lại, nếu hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương thì hai đường thẳng AB và AC phải song song hoặc trùng nhau, hơn nữa hai đường thẳng này lại có chung điểm A nên chúng phải trùng nhau. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

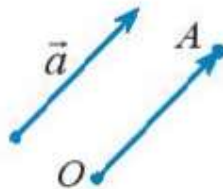
3. Vector bằng nhau – Vector đối nhau

Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **đối nhau** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = -\vec{b}$. Khi đó, vector $\vec{b}$ được gọi là vector đối của vector $\vec{a}$.

Chú ý:

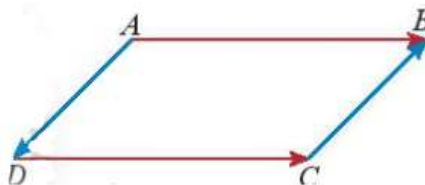
a) Cho vector $\vec{a}$ và điểm O , ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Khi đó độ dài của vector $\vec{a}$ là độ dài đoạn OA , kí hiệu là $|\vec{a}|$.



b) Cho đoạn thẳng MN , ta luôn có $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$.

Ví dụ 4

a) Tìm trong Hình hai cặp vector bằng nhau và hai cặp vector đối nhau.

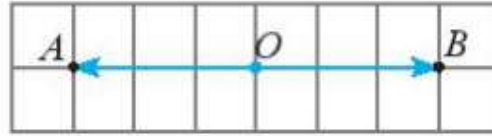


b) Cho điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Tìm hai vector đối nhau.

Giải

a) Trong Hình, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$.

b) Ta có $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$



4. Vector-không

Ta biết rằng mỗi vector hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó. Với một điểm A bất kì, ta quy ước có một vector đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là A .

Vector đó được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vector-không (có gạch nối giữa hai từ).

Vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là **vector-không**, kí hiệu là $\vec{0}$.

Chú ý:

- Quy ước vector-không có độ dài bằng 0.
- Vector-không luôn cùng phương, cùng hướng với mọi vector.
- Mọi vector-không đều bằng nhau: $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$ với mọi điểm $A, B, C, \dots$
- Vector đối của vector-không là chính nó.

Ví dụ 5

Cho đoạn thẳng EF có độ dài bằng 2 và nhận M là trung điểm.

a) Tìm vector-không trong số các vector: $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EE}, \overrightarrow{EM}, \overrightarrow{MM}, \overrightarrow{FF}$.

b) Dùng kí hiệu $\vec{0}$ để biểu diễn các vector-không đó.

Giải

a) Ta có các vector $\overrightarrow{EE}, \overrightarrow{MM}, \overrightarrow{FF}$ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau nên chúng là vector-không.

b) Ta viết $\vec{0} = \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{FF} = \overrightarrow{MM}$.

BÀI TẬP

Câu 1. Hãy tính số các véc-tơ (khác $\vec{0}$) mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau đây:

a) Hai điểm. b) Ba điểm. c) Bốn điểm.

Câu 2. Véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{a}$ là véc-tơ nào? Véc-tơ đối của véc-tơ $-\vec{a}$ là véc-tơ nào?

Câu 3. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

a) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

b) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A, B .

Câu 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N . Chứng minh $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NM}$ là hai véc-tơ đối nhau.

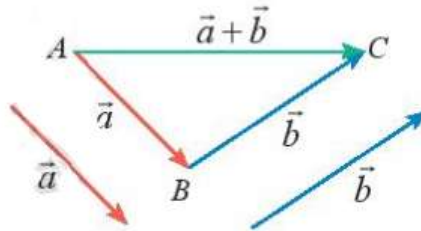
Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

- Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC , AB theo thứ tự lấy các điểm M , N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM , DB và Q là giao điểm của CN , DB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.
- Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Nối AF và CE , hai đường này cắt đường chéo BD lần lượt tại M và N . Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.
- Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ với A, D, F không thẳng hàng. Dựng các vector $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng vector $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.

BÀI 5: TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTOR

1. Tổng của hai vector

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A tùy ý, lấy hai điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.
 Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

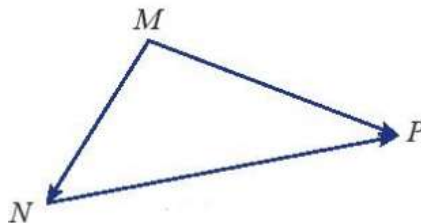


Phép toán tìm tổng của hai vector còn được gọi là **phép cộng vector**.

Từ định nghĩa tổng của hai vector, ta suy ra quy tắc cộng vector sau đây:

Quy tắc ba điểm

Với ba điểm M, N, P , ta có: $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.



Chú ý: Khi cộng hai vector theo quy tắc ba điểm, điểm cuối của vector thứ nhất phải là điểm đầu của vector thứ hai.

Ví dụ 1

Cho các điểm E, F, G, H, K . Thực hiện các phép cộng vector:

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}; \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KG}; \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HE}$$

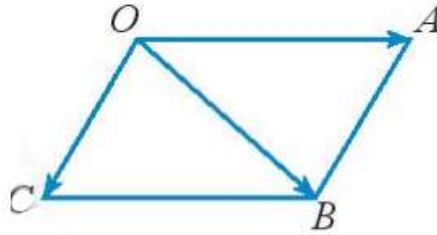
Giải

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{EH}; \quad \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{FG}; \quad \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$$

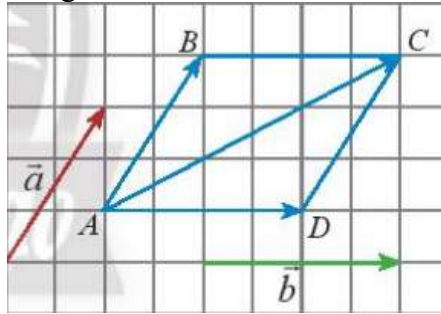
Quy tắc hình bình hành

Nếu $OABC$ là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.



Ví dụ 2

Tìm tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong Hình.



Ta có: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}$, suy ra $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Chú ý: Để áp dụng quy tắc hình bình hành, ta cần đưa bài toán tìm tổng hai vectơ về bài toán tìm tổng của hai vectơ có chung điểm đầu.

2. Tính chất của phép cộng các vectơ

Phép cộng vectơ có các tính chất sau:

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Chú ý: Từ tính chất kết hợp, ta có thể xác định được tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ với $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Ví dụ 3

Cho tứ giác ABCD. Thực hiện các phép cộng vectơ sau:

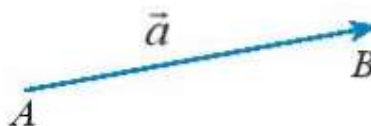
- a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BC}$,
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

Giải

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vectơ, ta có:

- a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$.
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Chú ý: Cho vectơ tùy ý $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

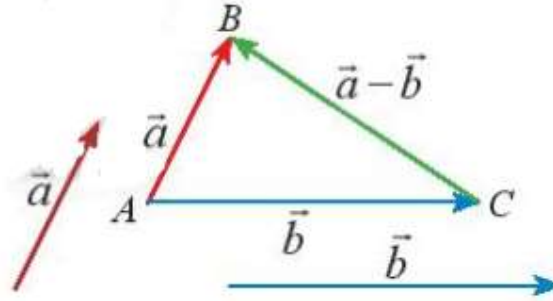


Ta có $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Tổng hai vectơ đối nhau luôn bằng vectơ-không: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

3. Hiệu của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ và kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.



Phép toán tìm hiệu của hai vectơ còn được gọi là **phép trừ vectơ**.

Ví dụ 4

Cho các điểm M, N, P, Q . Thực hiện các phép trừ vectơ sau: $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PQ}$.

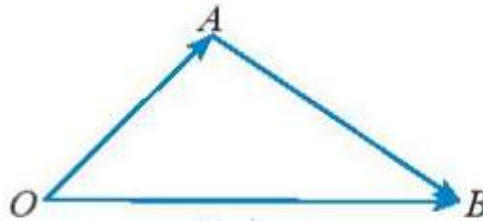
Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} \quad \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QM}$$

Chú ý:

Cho ba điểm O, A, B , ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.



4. Tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ví dụ 5

Cho tứ giác $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm của IJ .

Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Giải

Do I, J, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và IJ nên:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}; \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}; \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JD}) \\ &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = \vec{0} \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Câu 1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

a) Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng O là trung điểm của AB .

b) Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng $B \equiv O$.

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD .

Xác định tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

- Câu 3.** Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC . Xác định hiệu $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$.
- Câu 4.** Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.
- Câu 5.** Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.
- Câu 6.** Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
- Câu 7.** Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng
- $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.
 - $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.
 - $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.
- Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O, M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng
- $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
 - $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
 - $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.
- Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là một điểm bất kì trên đường chéo AC . Qua O kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt AB và DC lần lượt tại M và N , cắt AD và BC lần lượt tại E và F . Chứng minh
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.
 - $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$
- Câu 10.** Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.
 - $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

BÀI 6: TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTOR

1. Tích của một số với một vector và các tính chất

Cho số k khác 0 và vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tích của số k với vector $\vec{a}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$.

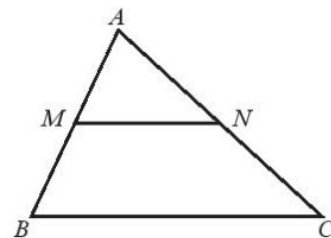
Vector $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Ta quy ước $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.

Người ta còn gọi tích của một số với một vector là *tích của một vector' với một số*.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC (Hình).



Tìm trong hình các vector bằng: $2\overrightarrow{MN}$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $-2\overrightarrow{CN}$

Giải

Ta có: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}$; $-2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC}$.

Với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số thực h và k , ta có:

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; \quad (h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}; \quad h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$$

$$1.\vec{a} = \vec{a}; \quad (-1).\vec{a} = -\vec{a}$$

Ví dụ 2

Thực hiện các phép toán vector sau:

- a) $5(\vec{u} + \vec{v})$
- b) $(x+2)\vec{a}$;
- c) $-3(4\vec{e})$;
- d) $\vec{c} - 2\vec{c}$.

Giải

- a) $5(\vec{u} + \vec{v}) = 5\vec{u} + 5\vec{v}$
- c) $-3(4\vec{e}) = (-3.4)\vec{e} = -12\vec{e}$;
- b) $(x+2)\vec{a} = x\vec{a} + 2\vec{a}$;
- d) $\vec{c} - 2\vec{c} = (1-2)\vec{c} = (-1)\vec{c} = -\vec{c}$.

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB và một điểm M tùy ý. Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

Giải

Ta có

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI} \Leftrightarrow \vec{MI} + \vec{IA} + \vec{MI} + \vec{IB} = 2\vec{MI} \Leftrightarrow 2\vec{MI} + \vec{IA} + \vec{IB} = 2\vec{MI} \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$$

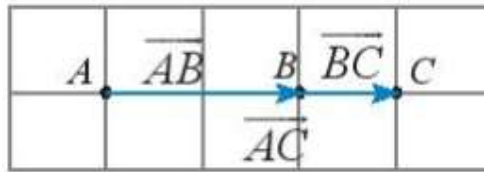
Suy ra I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

2. Điều kiện để hai vector cùng phương

Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Nhận xét:

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

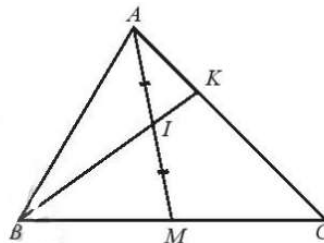


Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$.

- a) Tính $\vec{BI}$ theo $\vec{BA}, \vec{BC}$.
- b) Tính $\vec{BK}$ theo $\vec{BA}, \vec{BC}$.
- c) Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Giải



$$a) \vec{BI} = \vec{BA} + \vec{AI} = \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AM} = \vec{BA} + \frac{1}{2}(\vec{BM} - \vec{BA}) = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{4}\vec{BC} \quad (1)$$

$$b) \vec{BK} = \vec{BA} + \vec{AK} = \vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \vec{BA} + \frac{1}{3}(\vec{BC} - \vec{BA}) = \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC} \quad (2)$$

$$c) \text{ Ta có: } (1) \Rightarrow 4\vec{BI} = 2\vec{BA} + \vec{BC}, \quad (2) \Rightarrow 3\vec{BK} = 2\vec{BA} + \vec{BC} \text{ nên } \vec{BI} = \frac{3}{4}\vec{BK}. \quad (3)$$

Từ (3) ta suy ra ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Chú ý: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vector $\vec{c}$ luôn tồn tại duy nhất cặp số thực $(m; n)$ sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

BÀI TẬP

Câu 1. Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Chứng minh với điểm O bất kỳ ta có $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

Câu 2. Cho đoạn AB và điểm I sao cho $2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}$.

a) Tìm số k mà $\vec{AI} = k\vec{AB}$.

b) Chứng minh với mọi điểm M thì có $\vec{MI} = \frac{2}{5}\vec{MA} + \frac{3}{5}\vec{MB}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có trực tâm H , trọng tâm G và đường tròn ngoại tiếp O . Chứng minh rằng

a) $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$.

b) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$.

c) $\vec{GH} + 2\vec{GO} = \vec{0}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC . Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng

a) $\vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}$ và $\vec{CH} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$.

b) $\vec{MH} = \frac{1}{6}\vec{AC} - \frac{5}{6}\vec{AB}$, với M là trung điểm của BC .

Câu 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh

a) Với mọi điểm M thì $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

b) Nếu $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm G .

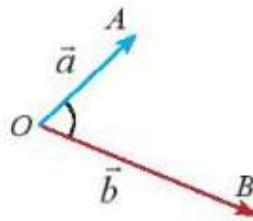
BÀI 7: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

1. Góc giữa hai vector

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kỳ ta vẽ $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$.

Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là **góc giữa hai vector** $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ta kí hiệu góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$, Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý:

- Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

- Góc giữa hai vector cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0° .

- Góc giữa hai vector ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180° .

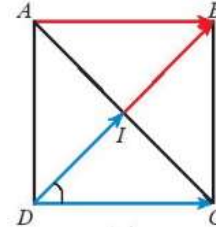
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vector $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vector $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vector đó là tùy ý (từ 0° đến 180°).



Ví dụ 1

Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

- $(\vec{IB}, \vec{AB})$
- $(\vec{IB}, \vec{AI})$
- $(\vec{IB}, \vec{DB})$
- $(\vec{IA}, \vec{IC})$



Giải

a) Ta có: $\vec{DI} = \vec{IB}, \vec{DC} = \vec{AB}$, suy ra $(\vec{IB}, \vec{AB}) = (\vec{DI}, \vec{DC}) = \widehat{IDC} = 45^\circ$.

b) Ta có: $\vec{IC} = \vec{AI}$, suy ra $(\vec{IB}, \vec{AI}) = (\vec{IB}, \vec{IC}) = \widehat{BIC} = 90^\circ$.

c) Do hai vector $\vec{IB}, \vec{DB}$ cùng hướng nên ta có $(\vec{IB}, \vec{DB}) = 0^\circ$.

d) Do hai vector $\vec{IA}, \vec{IC}$ ngược hướng nên ta có $(\vec{IA}, \vec{IC}) = 180^\circ$.

2. Tích vô hướng của hai vector

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$

Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Chú ý:

a) Trường hợp ít nhất một trong hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

b) Với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

c) Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vector $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vector luôn bằng bình phương độ dài của vector đó.

Ví dụ 2

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4 và có đường cao AH . Tính các tích vô hướng:

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$
- $\vec{AH} \cdot \vec{BC}$.

Giải

$$a) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

$$b) \vec{AB} \cdot \vec{BC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8;$$

$$c) \vec{AH} \cdot \vec{BC} = |\vec{AH}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\vec{AH}, \vec{BC}) = |\vec{AH}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Chú ý: Trong Vật lí, tích vô hướng của $\vec{F}$ và $\vec{d}$ biểu diễn công A sinh bởi lực $\vec{F}$ khi thực hiện độ dịch chuyển $\vec{d}$. Ta có công thức: $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

3. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k , ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}; \quad (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b}).$$

Ví dụ 3

Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (\vec{a} + \vec{b})^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

Nhận xét: Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC . Tính cạnh AB theo hai cạnh còn lại và góc C .

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AB^2 &= \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CA}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB^2 + CA^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos C \\ \text{hay } c^2 &= a^2 + b^2 - 2bc \cos C. \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
- $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
- $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH . Tính:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$.
- $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}; \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

- Câu 3.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Nối AF và CE , hai đường này cắt đường chéo BD lần lượt tại M và N . Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.
- Câu 4.** Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ với A, D, F không thẳng hàng. Dựng các vectơ $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.
- Câu 5.** Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.
a) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng O là trung điểm của AB .
b) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng $B \equiv O$.
- Câu 6.** Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Xác định tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.
- Câu 7.** Cho tam giác ABC . Các điểm M , N và P lần lượt là trung điểm của AB , AC và BC . Xác định hiệu $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$.
- Câu 8.** Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.
- Câu 9.** Cho tam giác ABC . Các điểm M , N và P lần lượt là trung điểm của AB , AC và BC . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.
- Câu 10.** Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
- Câu 11.** Cho tam giác ABC . Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của BC , CA , AB . Chứng minh rằng
a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.
b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.
- Câu 12.** Cho tam giác ABC có trực tâm H , trọng tâm G và đường tròn ngoại tiếp O . Chứng minh rằng
a) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.
b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.
c) $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$.
- Câu 13.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh
a) Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
b) Nếu $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm G .
- Câu 14.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , O là trung điểm của IJ . Chứng minh rằng
a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$.
b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kỳ.
- Câu 15.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:
a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
b). $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .
c). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.
- Câu 16.** Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$
a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
b). Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .
- Câu 17.** Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH . Tính:

- a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$.
- b). $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$
- Câu 18.** Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:
- a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
- b). $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$
- Câu 19.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M, N là các điểm sao cho $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$, $5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$.
- a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$
- b). Chứng minh AM vuông góc với BN .
- Câu 20.** Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Về bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M trung điểm của đoạn BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với DE .

CHƯƠNG VI: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

Mục tiêu: Sau khi học xong chương này, người học có thể:

- Nhận biết được toạ độ của vector với một hệ trục toạ độ cho trước.
- Tìm được toạ độ của một vector, độ dài của một vector khi biết toạ độ điểm đầu và điểm cuối của nó.
- Sử dụng được biểu thức toạ độ của các phép toán vector trong tính toán.
- Vận dụng được phương pháp toạ độ vào bài toán giải tam giác.
- Vận dụng được kiến thức về toạ độ của vector để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn (ví dụ: vị trí của vật trên mặt phẳng toạ độ,...).
- Nhận biết được phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ.
- Thiết lập được phương trình của đường thẳng trong mặt phẳng khi biết: một điểm và một vector pháp tuyến; biết một điểm và một vector chỉ phương; biết hai điểm.
- Nhận biết được hai đường thẳng cắt nhau, song song, trùng nhau, vuông góc với nhau bằng phương pháp toạ độ.
- Tính được góc giữa hai đường thẳng dựa vào công thức tính.
- Tính được khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng bằng phương pháp toạ độ.
- Giải thích được mối liên hệ giữa đồ thị hàm số bậc nhất và đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ.
- Vận dụng được kiến thức về phương trình đường thẳng để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

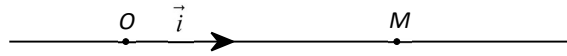
- Thiết lập được phương trình đường tròn khi biết toạ độ tâm và bán kính; biết toạ độ ba điểm mà đường tròn đi qua; xác định được tâm và bán kính đường tròn khi biết phương trình của đường tròn.
- Thiết lập được phương trình tiếp tuyến của đường tròn khi biết toạ độ của tiếp điểm.
- Vận dụng được kiến thức về phương trình đường tròn để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn (ví dụ: bài toán về chuyển động tròn trong Vật lý,...).
- Nhận biết được ba đường conic bằng hình học.
- Nhận biết được phương trình chính tắc của ba đường conic trong mặt phẳng toạ độ.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với ba đường conic (ví dụ: giải thích một số hiện tượng trong Quang học,...).

BÀI 1: TỌA ĐỘ CỦA VECTO

I. TỌA ĐỘ CỦA VECTO ĐỐI VỚI MỘT HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

1. Trục toạ độ

- Trục toạ độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là điểm gốc và một vector đơn vị $\vec{i}$.
- Điểm O gọi là gốc toạ độ.
- Hướng của vectơ đơn vị là hướng của trục.
- Ta kí hiệu trục đó là $(O; \vec{i})$.



- Cho M là một điểm tùy ý trên trục $(O; \vec{i})$. Khi đó có duy nhất một số k sao cho $\overrightarrow{OM} = x_0 \vec{i}$.
- Ta gọi số x_0 đó là toạ độ của điểm M đối với trục đã cho.
- Cho hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{i})$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB} = a \vec{i}$. Ta gọi số a là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho và kí hiệu $a = \overline{AB}$.

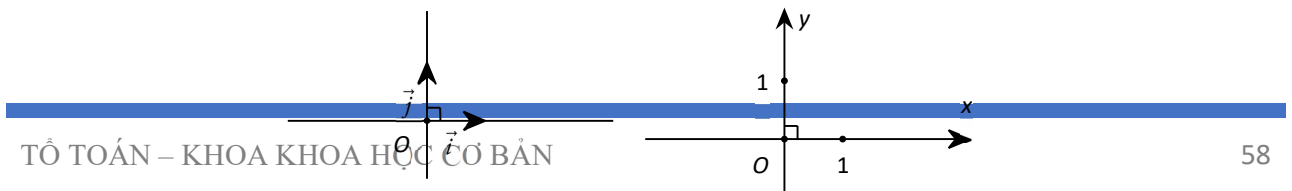
Nhận xét.

- Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ thì $\overline{AB} = AB$, còn nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{i}$ thì $\overline{AB} = -AB$.
- Nếu hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{i})$, có toạ độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$.

2. Hệ toạ độ

Định nghĩa. Hệ trục toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ gồm hai trục $(O; \vec{i})$ và $(O; \vec{j})$ vuông góc với nhau.

- Điểm gốc O chung của hai trục gọi là gốc toạ độ. Trục $(O; \vec{i})$ được gọi là trục hoành và kí hiệu là Ox , trục $(O; \vec{j})$ được gọi là trục tung và kí hiệu là Oy . Các vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy và $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Hệ trục toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ còn được kí hiệu là Oxy .



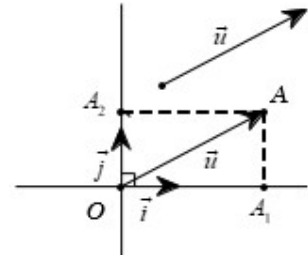
• Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục tọa độ Oxy còn được gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy . Hay gọi tắt là mặt phẳng Oxy .

3. Tọa độ vectơ

• Trong mặt phẳng Oxy cho một vectơ $\vec{u}$ tùy ý. Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ và gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của vuông góc của A lên Ox và Oy . Ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ và cặp số duy nhất $(x; y)$ để $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}, \overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$. Như vậy $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

• Cặp số $(x; y)$ duy nhất đó được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ đối với hệ tọa độ Oxy và viết $\vec{u} = (x; y)$ hoặc $\vec{u}(x; y)$. Số thứ nhất x gọi là hoành độ, số thứ hai y gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$. Như vậy

$$\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Nhận xét. Từ định nghĩa tọa độ của vectơ, ta thấy hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

$$\text{Nếu } \vec{u} = (x; y) \text{ và } \vec{u}' = (x'; y') \text{ thì } \vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

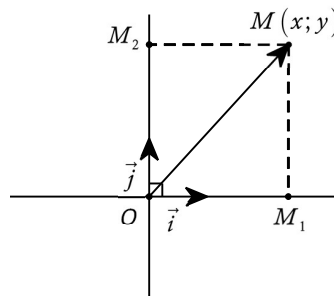
Như vậy, mỗi vectơ được hoàn toàn xác định khi biết tọa độ của nó.

4. Tọa độ của một điểm

• Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho một điểm M tùy ý. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ đối với hệ trục Oxy được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ trục đó.

• Như vậy, cặp số $(x; y)$ là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (x; y)$. Khi đó ta viết $M = (x; y)$ hoặc $M(x; y)$. Số x được gọi là hoành độ, còn số y được gọi là tung độ của điểm M . Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M , tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M .

$$M = (x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ và độ dài của } \overrightarrow{OM} \text{ là } |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



• Chú ý rằng, nếu $MM_1 \perp Ox, MM_2 \perp Oy$ thì $x = \overline{OM_1}, y = \overline{OM_2}$.

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP TOÁN VECTO

Cho $\vec{u} = (x; y)$; $\vec{v} = (x'; y')$ và số thực k . Khi đó ta có:

$$1. \vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$$

$$2. k\vec{u} = (kx; ky)$$

$$3. \vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y'$$

$$4. \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$$5. \vec{v} \text{ cùng phương } \vec{u} (\vec{u} \neq \vec{0}) \text{ khi và chỉ khi có số } k \text{ sao cho } \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

III. ỨNG DỤNG CỦA TỌA ĐỘ VECTO

1. Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vector trong mặt phẳng

Cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

2. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng

3. Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ trung điểm $I(x_I; y_I)$ của đoạn thẳng AB là

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

4. Tọa độ trọng tâm của tam giác

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Khi đó tọa độ của trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC được tính theo công thức

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

5. Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta có:

$$a. \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

$$b. \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow a_1b_1 - a_2b_2 = 0$$

$$c. |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$d. AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$e. \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad (\vec{a} = (a_1; a_2) \text{ và } \vec{b} = (b_1; b_2) \text{ đều khác } \vec{0})$$

BÀI TẬP

Câu 1: Trên trục $(O; \vec{i})$ cho các điểm A, B, C lần lượt có tọa độ 1; -2; 3.

Tính độ dài đại số của các vector $\vec{AB}$; $\vec{BC}$. Từ đó suy ra hai vector $\vec{AB}$; $\vec{BC}$ ngược hướng?

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = -3\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

a) Tìm tọa độ của các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

b) Phân tích vector $\vec{c}$ theo hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$.

- Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC .
- Chứng minh ba điểm A , B , C tạo thành một tam giác.
- Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$.

- Tìm tọa độ điểm E sao cho C là trung điểm của đoạn thẳng EB .
- Xác định tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(1;3)$, $B(4;0)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa $3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$?

BÀI 2: ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Véc tơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng

a. Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là **vectơ chỉ phương (VTCP)** của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ .



Nhận xét:

- Nếu $\vec{u}$ là một vtcp của đường thẳng d thì $k\vec{u}$, ($k \neq 0$) cũng là một vectơ chỉ phương của d .

- Một đường thẳng xác định khi biết một vtcp và một điểm mà nó đi qua.

b. Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là **vectơ pháp tuyến (VTPT)** của Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ



Nhận xét:

- Nếu $\vec{n}$ là một vtpt của đường thẳng d thì $k\vec{n}$, ($k \neq 0$) cũng là một vtpt của d .

- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

- Một đường thẳng xác định khi biết một VTPT và một điểm nó đi qua.

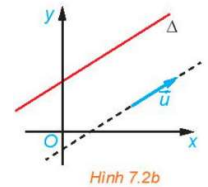
LIÊN HỆ GIỮA VTCP VÀ VTPT

☑ Từ nhận xét “Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ ” ta rút ra được: nếu $\vec{n} = (A; B)$ là một VTPT của đường thẳng d thì một VTCP của d là $\vec{u} = (B; -A)$ (hoặc $\vec{u} = (-B; A)$).

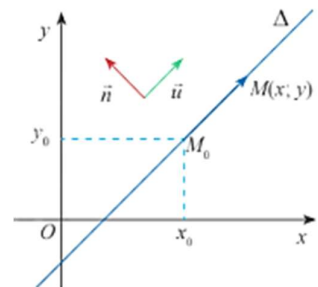
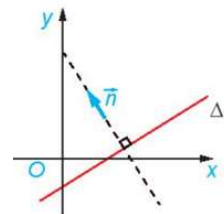
☑ Từ nhận xét “Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ ” ta rút ra được: nếu $\vec{u} = (a; b)$ là một VTCP của đường thẳng d thì một VTPT của d là $\vec{n} = (-b; a)$ (hoặc $\vec{n} = (b; -a)$).

📌 Hai nhận xét trên giúp ích rất nhiều trong việc chuyển đổi qua lại giữa các dạng phương trình đường thẳng. Từ PTTQ ta có thể chuyển sang PTTS và ngược lại.

2. Phương trình tham số của đường thẳng



Hình 7.2b



Hình 1

• Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b)$. Khi đó điểm $M(x; y)$ thuộc đường thẳng Δ khi và chỉ khi tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, hay

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (2)$$

• Hệ (2) được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số).

• Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có vtcp $\vec{u} = (a; b)$ thì có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

(Mỗi điểm M bất kỳ thuộc đường thẳng (d) tương ứng với duy nhất một số thực $t \in \mathbb{R}$ và ngược lại).

Nhận xét: $A \in \Delta \Leftrightarrow A(x_0 + at; y_0 + bt), t \in \mathbb{R}$

• Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , mọi phương trình dạng $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ đều là phương trình của đường thẳng d có một vtcp là $\vec{u} = (a; b)$.

3. Phương trình tổng quát (PTTQ) của đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0. Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0, đều là phương trình của một đường thẳng, nhận $\vec{n}(a; b)$ là một vectơ pháp tuyến.

a. Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A; B)$ thì có phương trình tổng quát là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

b. Ngược lại, trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy mọi phương trình dạng $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) đều là phương trình tổng quát của đường thẳng d có VTPT $\vec{n} = (A; B)$.

c. Một số trường hợp đặc biệt của PTTQ $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$).

☑ Nếu $A = 0$ phương trình trở thành $By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{C}{B}$ đường thẳng song song với trục hoành Ox và cắt trục tung Oy tại điểm $M\left(0; -\frac{C}{B}\right)$.

☑ Nếu $B = 0$ phương trình trở thành $Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C}{A}$ đường thẳng song song với trục tung Oy và cắt trục hoành Ox tại $M\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

☑ Nếu $C = 0$ phương trình trở thành $Ax + By = 0$ đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.

☑ Đường thẳng có dạng $y = ax + b$, (trong đó a được gọi là hệ số góc của đường thẳng) có VTPT là $\vec{n} = (a; -1)$. Ngược lại đường thẳng có VTPT $\vec{n} = (A; B)$ thì có hệ số góc là $-\frac{A}{B}$.

☑ Đường thẳng d đi qua điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

4. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có vtcp $\vec{u} = (a; b)$ với $a \neq 0, b \neq 0$ có phương trình chính tắc là:

$$: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$$

II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

• Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

• Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau. Lấy một điểm P tùy ý trên Δ_1 .

☑ Nếu $P \in \Delta_2$ thì $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

☑ Nếu $P \notin \Delta_2$ thì $\Delta_1 // \Delta_2$.

• Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại một điểm $M(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

📌 **Chú ý 1:**

• Nếu $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ thì $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, suy ra $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

• Để xét hai vector $\vec{n}_1(a_1; b_1)$ và $\vec{n}_2(a_2; b_2)$ cùng phương hay không cùng phương, ta xét biểu thức $a_1b_1 - a_2b_2$:

☑ Nếu $a_1b_1 - a_2b_2 = 0$ thì hai vector cùng phương.

☑ Nếu $a_1b_1 - a_2b_2 \neq 0$ thì hai vector không cùng phương.

📌 **Chú ý 2:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

• Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng này ta xét số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (0.1)$$

☑ Nếu hệ (1.1) có duy nhất 1 nghiệm ta nói hai đường thẳng trên cắt nhau tọa độ giao điểm chính là nghiệm của hệ phương trình nói trên.

☑ Nếu hệ (1.1) vô nghiệm ta nói hai đường thẳng nói trên song song với nhau.

☑ Nếu hệ (1.1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì hai đường thẳng trên trùng nhau.

☑ Tuy nhiên để thuận tiện cho việc xét nhanh vị trí tương đối của hai đường thẳng ta chú ý nhận xét sau

• **Nhận xét.** Nếu $a_2b_2c_2 \neq 0$ ta có

Ⓐ. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow d_1 \cap d_2 = \{I\}$

Ⓑ. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow d_1 // d_2$

Ⓒ. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow d_1 \equiv d_2$

III. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

• Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

• **Khái niệm góc giữa hai đường thẳng**

- ✓ Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.
- ✓ Nếu Δ_1 không vuông góc với Δ_2 thì góc nhọn trong bốn góc đó được gọi là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .
- ✓ Nếu Δ_1 vuông góc với Δ_2 thì ta nói góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90° .
- Ta quy ước: Nếu Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau thì góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 0° . Như vậy góc α giữa hai đường thẳng luôn thỏa mãn: $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.
- Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là (Δ_1, Δ_2) hoặc (Δ_1, Δ_2) .
- Khi hai đường thẳng cắt nhau góc giữa hai đường thẳng được tính theo công thức:

$$\cos(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến đường thẳng Δ được tính theo công thức:

$$d(M_0; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

BÀI TẬP

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ, cho $\vec{n} = (2; 1)$, $\vec{v} = (3; 2)$, $A(1; 3)$, $B(-2; 1)$.

- a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_1 đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.
- b) Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ_2 đi qua B và có vectơ chỉ phương $\vec{v}$.
- c) Lập phương trình tham số của đường thẳng AB .

Câu 2: Lập phương trình tổng quát của các trục tọa độ.

Câu 3: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$ và $\Delta_2: 2x + 3y - 5 = 0$.

- a) Lập phương trình tổng quát của Δ_1 .
- b) Lập phương trình tham số của Δ_2 .

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(0; -2)$ và đường thẳng $\Delta: x + y - 4 = 0$.

- a) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ .
- b) Viết phương trình đường thẳng a đi qua điểm $M(-1; 0)$ và song song với Δ .
- c) Viết phương trình đường thẳng b đi qua điểm $N(0; 3)$ và vuông góc với Δ .

Câu 5: Theo Google Maps, sân bay Nội Bài có vĩ độ là $21,2^\circ$ Bắc, kinh độ $105,8^\circ$ Đông, sân bay Đà Nẵng có vĩ độ là $16,1^\circ$ Bắc, kinh độ $108,2^\circ$ Đông. Một máy bay, bay từ Nội Bài đến sân bay Đà Nẵng. Tại thời điểm t giờ, tính từ lúc xuất phát, máy bay ở vị trí có vĩ độ x° Bắc, kinh độ y° Đông được tính theo công thức

$$\begin{cases} x = 21,2 - \frac{153}{40}t \\ y = 105,8 + \frac{9}{5}t \end{cases}$$

a) Hỏi chuyến từ Hà Nội đến Đà Nẵng mất mấy giờ?

b) Tại thời điểm 1 giờ kể từ lúc cất cánh, máy bay đã bay qua vĩ tuyến 17 (17^0 Bắc) chưa?

BÀI 3: ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẪNG

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Dạng 1: Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ bán kính R

Phương trình có dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

2. Dạng 2: Phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

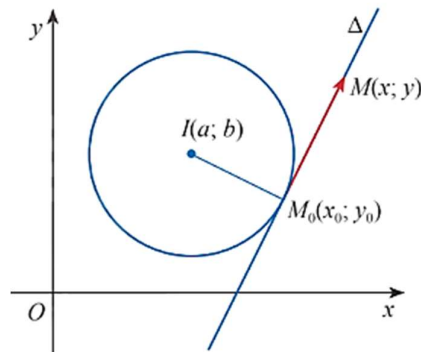
II. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \in (C)$

• *Bước 1:* Tìm tọa độ tâm I của (C) .

• *Bước 2:* Tiếp tuyến (D) là đường thẳng đi qua M_0 và có VTPT là $\overrightarrow{M_0I}$

$$(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$$



2. Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \notin (C)$

• *Bước 1:* Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C) .

• *Bước 2:* (D) là đường thẳng đi qua M_0 nên có dạng $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

• *Bước 3:* (D) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$ (*). Giải (*) tìm được mối liên hệ giữa a & b . Chọn a & b phù hợp để kết luận.

3. Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) song song với $(D_1): Ax + By + C = 0$

• *Bước 1:* Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C) .

• *Bước 2:* $(D) \parallel (D_1): Ax + By + C = 0$ nên phương trình có dạng $Ax + By + C' = 0$ ($C' \neq C$)

• *Bước 3:* (D) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$ (*). Giải (*) tìm được C' so với đk để kết luận.

4. Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) vuông góc với (D_1) : $Ax + By + C = 0$

- **Bước 1:** Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C) .
- **Bước 2:** $(D) \perp (D_1)$: $Ax + By + C = 0$ nên phương trình có dạng $Bx - Ay + C' = 0$
- **Bước 3:** (D) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$ (*). Giải (*) tìm được C' so với đk để kết luận.

5. Chú ý:

- **Sự tương giao của đường thẳng và đường tròn**

Cho đường thẳng (D) : $Ax + By + C = 0$ và đường tròn (C) : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b)$

- ✓ $(D) \cap (C) = \{M; N\} \Leftrightarrow d(I; (D)) < R$
- ✓ $(D) \cap (C) = \{M\} \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$
- ✓ $(D) \cap (C) = \emptyset \Leftrightarrow d(I; (D)) > R$

• Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho đường tròn (C_1) có tâm I_1 , bán kính R_1 và đường tròn (C_2) có tâm I_2 , bán kính R_2 .
Giả sử $R_1 > R_2$. Ta có:

- ✓ Hai đường tròn tiếp xúc $\Leftrightarrow I_1 I_2 = |R_1 \pm R_2|$
- ✓ Hai đường tròn cắt nhau $R_1 - R_2 < I_1 I_2 < R_1 + R_2$

◆-Ghi nhớ 1

○ Phương trình đường tròn

- ✓ Cho đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R . Điểm $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow IM = R$
- ✓ $\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (*) gọi là phương trình (C) .
- ✓ Từ (*) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = R^2$
- ✓ Từ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$
- ✓ Đặt $c = a^2 + b^2 - R^2 \Leftrightarrow R^2 = a^2 + b^2 - c \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} > 0$.
- ✓ Khi đó (C) trở thành $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ gọi là phương trình (C) dạng 2

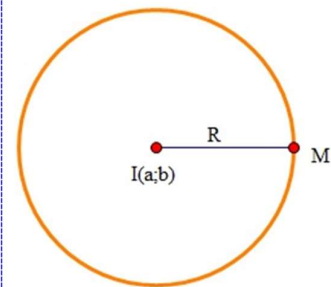
○ **Tóm lại:** Để viết được phương trình đường tròn, ta cần tìm tâm I và bán kính R .

- ✓ $(C): \begin{cases} \text{Tâm } I(a; b) \\ \text{Bán kính: } R \end{cases} \Rightarrow (C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

(1)

- ✓ $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (2) với

- ✓ Với điều kiện: $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} > 0$.

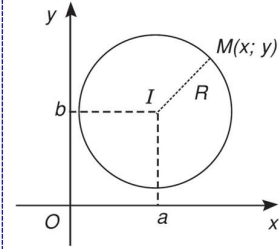


◆-Ghi nhớ 2

○ **Viết một số dạng phương trình đường tròn cơ bản:**

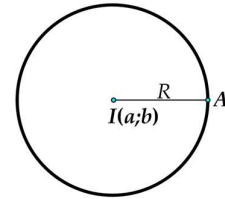
①. **Viết phương trình đường tròn khi biết tâm và bán kính**

☑ (C) : $\begin{cases} \text{Tâm } I(a;b) \\ \text{Bán kính : } R \end{cases}$
 $\Rightarrow (C) : \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$



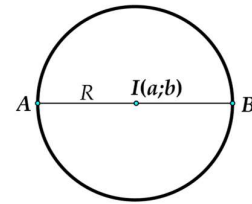
②. **Viết phương trình đường tròn có tâm và đi qua điểm A**

☑ (C) : $\begin{cases} \text{Tâm } I(a;b) \\ \text{Bán kính : } R = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2} \end{cases}$
 $\Rightarrow (C) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$



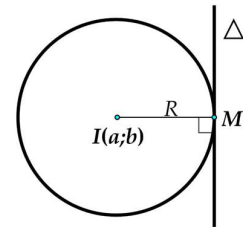
③. **Viết phương trình đường tròn có đường kính AB với A, B đã cho tọa độ**

☑ (C) : $\begin{cases} \text{Tâm } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) : \\ \text{Bán kính : } R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2} \end{cases}$
 $\Rightarrow (C) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$



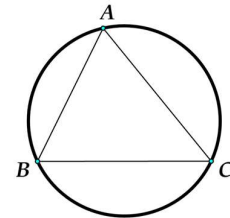
④. **Viết phương trình đường tròn có tâm và tiếp xúc với đường thẳng**

☑ (C) : $\begin{cases} \text{Tâm } I(a;b) \\ \text{Bán kính : } R = d(I, (\Delta)) = \frac{|Ax_I + By_I + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{cases}$
 $\Rightarrow (C) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$



⑤. **Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm (ngoại tiếp tam giác)**

- ☑ Gọi (C) : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (*)
- Trong đó tâm $I(a;b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} > 0$.
 - Thay tọa độ ba điểm vào (*) và giải hệ phương trình và giải tìm được a, b, c .
 - Thế a, b, c vào (*) suy ra phương trình đường tròn (C) cần tìm.



BÀI TẬP

Câu 1: Tìm tâm và tính bán kính của đường tròn: $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 36$.

Câu 2: Hãy cho biết phương trình nào dưới đây là phương trình của một đường tròn và tìm tâm, bán kính của đường tròn tương ứng.

a) $x^2 + y^2 + xy + 4x - 2 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 1 = 0$.

Câu 3: Viết phương trình của đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(-2;5)$ và bán kính $R = 7$;

b) Có tâm $I(1;-2)$ và đi qua điểm $A(-2;2)$;

c) Có đường kính AB , với $A(-1;-3), B(-3;5)$;

d) Có tâm $I(1;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $x + 2y + 3 = 0$.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC , với $A(6;-2), B(4;2), C(5;-5)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Câu 5: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $M(0;2)$.

Câu 6: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$ (1) 2) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$ (2)

3) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$ (3) 4) $2x^2 + y^2 + 2x - 3y + 9 = 0$ (4)

BÀI 4: BA ĐƯỜNG CONIC TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

I. ELIP

• Cho hai điểm cố định và phân biệt F_1, F_2 . Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$. Cho số thực a lớn hơn c . Tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ được gọi là đường elip. Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai tiêu điểm và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự của elip đó.

• Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , elip có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm đó thì có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$. (2)

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng (2) đều là phương trình của elip có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0), F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$, tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ và tổng các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc elip đó tới hai tiêu điểm bằng $2a$.

• Phương trình (2) được gọi là phương trình chính tắc của elip tương ứng.

 Tính chất và hình dạng của Elip: Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với

$a > b > 0$.



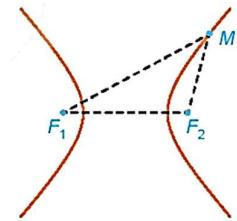
- ✓ Trục đối xứng Ox , Oy
- ✓ Tâm đối xứng O .
- ✓ Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
- ✓ Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.
- ✓ Độ dài trục lớn $2a$. Độ dài trục bé $2b$.
- ✓ Nội tiếp trong hình chữ nhật cơ sở có kích thước là $2a$ và $2b$.
- ✓ Tâm sai $e = \frac{c}{a} < 1$.
- ✓ Hai đường chuẩn $x = \frac{a}{e}$ và $x = -\frac{a}{e}$.
- ✓ $M(x;y) \in (E)$. Khi đó $MF_1 = a + ex$: bán kính qua tiêu điểm trái.

$MF_2 = a - ex$: bán kính qua tiêu điểm phải.

II. HYPERBOL

• Trên mặt phẳng, nếu hai thiết bị đặt tại các vị trí F_1, F_2 nhận được một tín hiệu âm thanh cùng lúc thì vị trí phát ra tín hiệu cách đều hai điểm F_1, F_2 , và do đó, nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng F_1F_2 .

• Cho hai điểm phân biệt cố định F_1, F_2 . Đặt $F_1F_2 = 2c$. Cho số thực dương a nhỏ hơn c . Tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ được gọi là đường hypebol. Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai *tiêu điểm* và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là *tiêu cự* của hypebol đó.



Hình 7.23

• Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hypebol có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm đó thì có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.

• Ngược lại, mỗi phương trình có dạng (4) đều là phương trình của hypebol có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$, $F_2(\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$, tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc hypebol đến hai tiêu điểm bằng $2a$.

• Phương trình được gọi là phương trình chính tắc của hypebol tương ứng.

III. PARABOL

• Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F . Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ được gọi là đường parabol. Điểm F được gọi là tiêu điểm, Δ được gọi là đường chuẩn, khoảng cách từ F đến Δ được gọi là tham số tiêu của parabol đó.

• Xét (P) là một parabol với tiêu điểm F , đường chuẩn Δ . Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên Δ . Khi đó, trong hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là trung điểm của HF , tia Ox trùng với tia OF , parabol (P) có phương trình $y^2 = 2px$ (5)

• Phương trình (5) được gọi là phương trình chính tắc của parabol (P) .

Ngược lại, mỗi phương trình dạng (5), với $p > 0$, là phương trình chính tắc của parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.

BÀI TẬP

Câu 1: Cho elip có phương trình $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của elip

Câu 2: Cho hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của hypebol.

Câu 3: Cho parabol có phương trình: $y^2 = 8x$. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol.

Câu 4: Lập phương trình chính tắc của elip đi qua điểm A và có một tiêu điểm là F_2 .

Câu 5: Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M\left(2; \frac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$.

b) Elip nhận $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm và có độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2.

d) Elip đi qua hai điểm $M(2;-\sqrt{2})$ và $N(-\sqrt{6};1)$.

Câu 6: Có hai trạm phát tín hiệu vô tuyến đặt tại hai vị trí A, B cách nhau 300 km. Tại cùng một thời điểm, hai trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc 292 000 km/s để một tàu thủy thu và đo độ lệch thời gian. Tín hiệu từ A đến sớm hơn tín hiệu từ B là 0,0005 s. Từ thông tin trên, ta có thể xác định được tàu thủy thuộc đường hypebol nào? Viết phương trình chính tắc của hypebol đó theo đơn vị kilômét.

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(1;3), N(4;2)$.

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng OM , ON , MN .

b) Chứng minh rằng tam giác OMN vuông cân.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = (4; -1)$ và các điểm $M(-3;6), N(3;-3)$

a) Tìm mối liên hệ giữa các vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$.

b) Các điểm O, M, N có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $P(x; y)$ để $OMNP$ là một hình bình hành.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1;3), B(2;4), C(-3;2)$.

a) Hãy chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB .

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

d) Tìm điểm $D(x; y)$ để $O(0;0)$ là trọng tâm của tam giác ABD .

Câu 4: Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí $A(1;2)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v} = (3;4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Cho điểm $M(x; y)$. Tìm tọa độ của các điểm M_1 đối xứng với M qua trục hoành?

Câu 6: Trong không gian Oxy , cho hai điểm $A(1;2), B(-2;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

Câu 7: Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $\Delta_1: 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{3} = 0$ và $\Delta_2: 6x + 2y - \sqrt{6} = 0$.

b) $d_1: x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ và $d_2: \sqrt{3}x - 3y + 2 = 0$.

c) $m_1: x-2y+1=0$ và $m_2: 3x+y-2=0$.

Câu 8: Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $\Delta_1: \sqrt{3}x+y-4=0$ và $\Delta_2: x+\sqrt{3}y+3=0$.

b) $d_1: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+4t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=3+s \\ y=1-3s \end{cases}$ (t, s là các tham số).

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(0;-2)$ và đường thẳng $\Delta: x+y-4=0$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ .

b) Viết phương trình đường thẳng a đi qua điểm $M(-1;0)$ và song song với Δ .

c) Viết phương trình đường thẳng b đi qua điểm $N(0;3)$ và vuông góc với Δ .

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC có $A(1;0)$, $B(3;2)$ và $C(-2;-1)$.

a) Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC .

b) Tính diện tích tam giác ABC .

Câu 11: Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b) Nhận AB làm đường kính với $A(1;1)$, $B(7;5)$.

c) Đi qua ba điểm: $M(-2;4)$, $N(5;5)$, $P(6;-2)$

Câu 12: Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$

Câu 3: Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB

Câu 14: Cho đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-4=0$

a) Chứng minh điểm $M(2;1)$ nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối giữa Δ và (C)

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y-15=0$ và $(C'): x^2+y^2-6x-2y-3=0$

a) Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và B

c) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B và O

Câu 16: Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M\left(2;\frac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$.

b) Elip nhận $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm và có độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2.

d) Elip đi qua hai điểm $M(2;-\sqrt{2})$ và $N(-\sqrt{6};1)$.

Câu 17: Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

- a) Elip có tổng độ dài hai trục bằng 8 và tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- b) Elip có tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.
- c) Elip có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng $12\sqrt{5}$.

Câu 18: Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A điểm cuối là B, khoảng cách $AB = 400m$. Đỉnh parabol của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20 m và cách đều A, B



a). Lập phương trình chính tắc của, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 m trên thực tế.



b). Lập phương trình chính tắc của, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 km trên thực tế.

Câu 19: Cho hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của hypebol.

Câu 20: Cho parabol có phương trình: $y^2 = 8x$. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol.

CHƯƠNG VII: THỐNG KÊ – XÁC SUẤT

Mục tiêu: Sau khi học xong chương này, người học có thể:

- Hiểu được khái niệm số gần đúng, sai số tuyệt đối.
- Xác định được số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước.
- Xác định được sai số tương đối của số gần đúng.
- Xác định được số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước.
- Biết sử dụng máy tính cầm tay để tính toán với các số gần đúng.
- Phát hiện được số liệu không chính xác dựa trên mối liên hệ toán học đơn giản giữa các số liệu đã được biểu diễn trong nhiều ví dụ.
- Lí giải được số liệu không chính xác dựa trên mối liên hệ toán học đơn giản giữa các số liệu đã được biểu diễn trong nhiều ví dụ.
- Tính được số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu không ghép nhóm: số trung bình cộng (hay số trung bình), trung vị (median), tứ phân vị (quartiles), mốt (mode).
- Tính được số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm: khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn.
- Giải thích được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn.
- Chỉ ra được những kết luận nhờ ý nghĩa của số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu không ghép nhóm trường hợp đơn giản.
- Chỉ ra được những kết luận nhờ ý nghĩa của số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm trong trường hợp đơn giản.
- Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học trong Chương trình lớp 10 và trong thực tiễn.

- Nhận biết được một số khái niệm về xác suất cổ điển: phép thử ngẫu nhiên; không gian mẫu; biến cố (biến cố là tập con của không gian mẫu); biến cố đối; định nghĩa cổ điển của xác suất.
- Mô tả được không gian mẫu, biến cố trong một số thí nghiệm đơn giản (ví dụ: tung đồng xu hai lần, tung xúc xắc một lần).
- Nhận biết được nguyên lý xác suất bé.
- Mô tả được không gian mẫu, biến cố trong một số thí nghiệm (ví dụ: tung đồng xu ba lần, tung xúc xắc hai lần).
- Tính được xác suất của biến cố trong một số bài toán đơn giản bằng phương pháp tổ hợp (trường hợp xác suất phân bố đều).
- Tính được xác suất trong một số thí nghiệm lặp bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây (ví dụ: tung xúc xắc hai lần, tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trong hai lần tung bằng 7).

BÀI 1: SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1. Số gần đúng

Trong thực tế cuộc sống cũng như trong khoa học kỹ thuật, có nhiều đại lượng mà ta không thể xác định được giá trị chính xác. Ví dụ như chiều cao của một cây dừa hay tốc độ của một chiếc máy bay tại thời điểm nào đó. Mỗi dụng cụ hay phương pháp đo khác nhau có thể sẽ cho ra các kết quả khác nhau. Vì vậy kết quả thu được thường chỉ là những **số gần đúng**.

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Sai số tuyệt đối

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\bar{a}$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng a .

Trên thực tế ta thường không biết số đúng $\bar{a}$ nên không thể tính được chính xác Δ_a . Thay vào đó, ta thường tìm cách khống chế sai số tuyệt đối Δ_a không vượt quá mức $d > 0$ cho trước, tức là $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq d$ hay $a - d \leq \bar{a} \leq a + d$.

Khi đó, ta nói a là số gần đúng của số đúng $\bar{a}$ với **độ chính xác** d và quy ước viết gọn là $\bar{a} = a \pm d$.

Ví dụ 1

An tính diện tích của hình tròn bán kính $r = 4\text{ cm}$ bằng công thức $S = 3,145 \cdot 4^2 = 50,32(\text{ cm}^2)$.

Biết rằng $3,14 < \pi < 3,15$, hãy ước lượng độ chính xác của S .

Giải

Diện tích đúng, kí hiệu là $\bar{S}$, của hình tròn trên thoả mãn

$$3,14 \cdot 4^2 < \bar{S} < 3,15 \cdot 4^2 \text{ hay } 50,24 < \bar{S} < 50,4.$$

Do đó $50,24 - 50,32 < \bar{S} - S < 50,4 - 50,32$, tức là $|\bar{S} - S| < 0,08$.

Vậy kết quả của An có độ chính xác là $0,08$. Nói cách khác, diện tích của hình tròn là $50,32 \pm 0,08(\text{ cm}^2)$.

Sai số tương đối

Sai số tương đối của số gần đúng a , kí hiệu là δ_a , là tỉ số giữa sai số tuyệt đối Δ_a và $|a|$, tức là

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}.$$

Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$. Do đó $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$. Nếu δ_a hay $\frac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo

đặc hay tính toán càng cao.

Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

Chẳng hạn, trong phép tính diện tích hình tròn ở **Ví dụ 1**, sai số tương đối không vượt quá

$$\frac{0,08}{50,32} \approx 0,16\%$$

3. Số quy tròn

Quy tắc làm tròn số

Trong chương trình Trung học cơ sở, ta đã biết quy tắc làm tròn số đến một hàng nào đó (gọi là hàng quy tròn) như sau:

- Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.
- Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng quy tròn.

Ví dụ 2

Hãy quy tròn số $\bar{a} = \frac{4}{3} = 1,3333\dots$ đến hàng phần trăm và ước lượng sai số tương đối.

Giải

Quy tròn số $\bar{a} = \frac{4}{3} = 1,3333\dots$ đến hàng phần trăm, ta được số gần đúng là $a = 1,33$. Do

$a < \bar{a} < 1,335$ nên sai số tuyệt đối là $\Delta_a = |\bar{a} - a| < 0,005$.

Sai số tương đối là $\delta_a \leq \frac{0,005}{1,33} \approx 0,4\%$.

Chú ý:

a) Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Ta có thể nói độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

b) Khi quy tròn số đúng $\bar{a}$ đến một hàng nào đó thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó. Ví dụ số gần đúng của π chính xác đến hàng phần trăm là 3,14.

Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước

Các bước xác định **số quy tròn** của số gần đúng a với độ chính xác d cho trước:

Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d .

Bước 2: Quy tròn số a ở hàng gấp 10 lần hàng tìm được ở Bước 1.

Ví dụ 3

a) Cho số gần đúng $a = 1903$ với độ chính xác $d = 50$. Hãy viết số quy tròn của số a .

b) Hãy viết số quy tròn của số gần đúng b biết $\bar{b} = 0,1891 \pm 0,005$.

Giải

a) Hàng lớn nhất của độ chính xác $d = 50$ là hàng chục, nên ta quy tròn a đến hàng trăm. Vậy số quy tròn của a là 1900.

b) Hàng lớn nhất của độ chính xác $d = 0,005$ là hàng phần nghìn, nên ta quy tròn b đến hàng phần trăm. Vậy số quy tròn của b là 0,19.

Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước

Để tìm số gần đúng a của số đúng $\bar{a}$ với độ chính xác d , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d .

Bước 2: Quy tròn $\bar{a}$ đến hàng tìm được ở trên.

Ví dụ 4

a) Cho $\bar{a} = \frac{12}{7} = 1,71428571\dots$. Hãy xác định số gần đúng của $\bar{a}$ với độ chính xác $d = 0,002$.

b) Cho $\bar{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,61803398\dots$. Hãy xác định số gần đúng của $\bar{b}$ với độ chính xác $d = 0,0005$

Giải

a) Hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của $d = 0,002$ là hàng phần nghìn. Quy tròn $\bar{a}$ đến hàng phần nghìn ta được số gần đúng của $\bar{a}$ là $a = 1,714$.

b) Hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của $d = 0,0005$ là hàng phần chục nghìn. Quy tròn $\bar{b}$ đến hàng phần chục nghìn ta được số gần đúng của $\bar{b}$ là $b = -0,6180$.

BÀI TẬP

Câu 1. Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0,2m$, điều đó có nghĩa là gì?

Câu 2. Độ dài của cái cầu bến thủy hai (Nghệ An) người ta đo được là $996m \pm 0,5m$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.

Câu 3. Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng a, b biết sai số tương đối của chúng.

a) $a = 123456, \delta_a = 0,2\%$ b) $a = 1,24358, \delta_a = 0,5\%$

Câu 4. Làm tròn các số sau với độ chính xác cho trước.

a) $a = 2,235$ với độ chính xác $d = 0,002$

b) $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$

Câu 5. a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn biết $\sqrt{8} = 2,8284\dots$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

b) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ chính xác đến hàng chục và hàng trăm biết $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71\dots$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

BÀI 2: MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG VÀ BIỂU ĐỒ

1. Bảng số liệu

Dựa vào các thông tin đã biết và sử dụng mối liên hệ toán học giữa các số liệu, ta có thể phát hiện ra được số liệu không chính xác trong một số trường hợp.

Ví dụ 1

Trong 6 tháng đầu năm, số sản phẩm bán ra mỗi tháng của một cửa hàng đều tăng khoảng 20% so với tháng trước đó. Biết rằng, trong bảng dưới đây, số sản phẩm bán ra của một tháng bị nhập sai. Hãy tìm tháng đó.

Tháng	1	2	3	4	5	6
Số sản phẩm bán ra	145	175	211	256	340	371

Giải

Tỉ lệ phần trăm tăng thêm của số sản phẩm bán ra mỗi tháng được tính ở bảng dưới đây:

Tháng	2	3	4	5	6
Tỉ lệ phần trăm tăng thêm so với tháng trước	20,7%	20,6%	21,3%	32,8%	9,1%

Ta thấy tỉ lệ tăng của tháng 5 và tháng 6 đều khác xa 20%. Do đó trong bảng số liệu đã cho, số sản phẩm của tháng 5 là không chính xác.

Ví dụ 2

Một đội 20 thợ thủ công được chia đều vào 5 tổ. Trong một ngày, mỗi người thợ làm được 4 hoặc 5 sản phẩm. Cuối ngày, đội trưởng thống kê lại số sản phẩm mà mỗi tổ làm được ở bảng sau:

Tổ	1	2	3	4	5
Số sản phẩm	17	19	19	21	20

Đội trưởng đã thống kê đúng chưa? Tại sao?

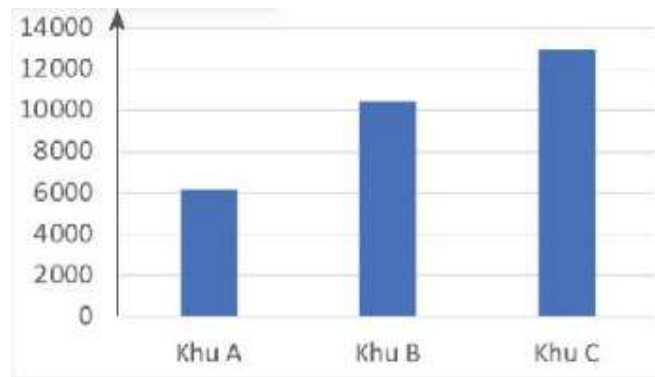
Giải

Mỗi tổ có $20 : 5 = 4$ người. Trong một ngày, mỗi người thợ làm được 4 hoặc 5 sản phẩm nên mỗi tổ làm được từ 16 đến 20 sản phẩm. Do đó, bảng trên ghi Tổ 4 làm được 21 sản phẩm là không chính xác.

Vậy đội trưởng thống kê chưa đúng.

2. Biểu đồ

Ví dụ 3. Lượng điện sinh hoạt trong tháng 1/2021 của các hộ gia đình thuộc Khu A (60 hộ), Khu B (100 hộ) và khu C (120 hộ) được biểu diễn ở biểu đồ bên. Hãy cho biết các phát biểu sau là đúng hay sai:



a) Mỗi khu đều tiêu thụ trên $6000kWh$.

b) Trung bình mỗi hộ ở Khu C sử dụng số điện gấp hai lần mỗi hộ ở Khu A.

Giải

Nhìn vào biểu đồ ta thấy mỗi khu đều tiêu thụ trên $6000kWh$ nên khẳng định ở câu a) là đúng.

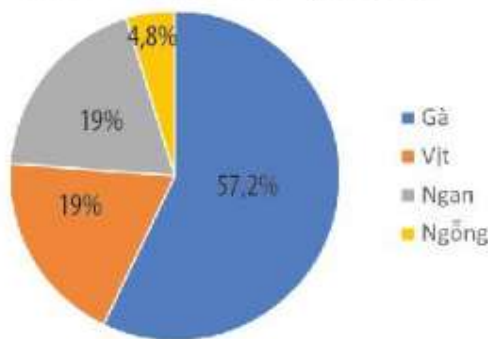
Mặc dù lượng điện tiêu thụ ở Khu C gần gấp hai lần lượng điện tiêu thụ ở Khu A nhưng số hộ ở Khu C lại gấp hai lần số hộ Khu A. Do đó khẳng định ở câu b) là sai.

Ví dụ 4

Bình vẽ biểu đồ biểu thị tỉ lệ số lượng mỗi loại gia cầm trong một trang trại theo bảng thống kê dưới đây:

Loại gia cầm	Số con
Gà	120
Ngan	40
Ngỗng	40
Vịt	10

Tỉ lệ mỗi loại gia cầm trong trang trại



Bạn hãy cho biết biểu đồ Bình vẽ đã chính xác chưa. Nếu chưa thì cần điều chỉnh lại như thế nào cho đúng?

Giải

Theo bảng thống kê thì số ngan và ngỗng bằng nhau nên trên biểu đồ quạt, hình quạt biểu diễn tỉ lệ ngan và ngỗng phải bằng nhau. Do đó biểu đồ Bình vẽ chưa chính xác.

Nếu ở phần chú giải, Bình đổi chỗ "Vịt" và "Ngỗng" thì sẽ được biểu đồ chính xác.

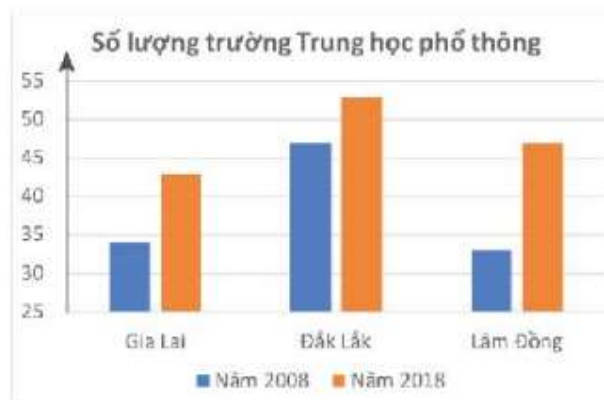
BÀI TẬP

Câu 1. Bảng sau thống kê số lớp và số học sinh theo từng khối ở một trường Trung học phổ thông.

Khối	10	11	12
Số lớp	9	8	8
Số học sinh	396	370	345

Hiệu trưởng trường đó cho biết sĩ số mỗi lớp trong trường đều không vượt quá 45 học sinh. Biết rằng trong bảng trên có một khối lớp bị thống kê sai, hãy tìm khối lớp đó.

Câu 2. Số lượng trường Trung học phổ thông (THPT) của các tỉnh Gia Lai, Đắk Lắk và Lâm Đồng trong hai năm 2008 và 2018 được cho ở biểu đồ bên. Hãy cho biết các phát biểu sau là đúng hay sai:

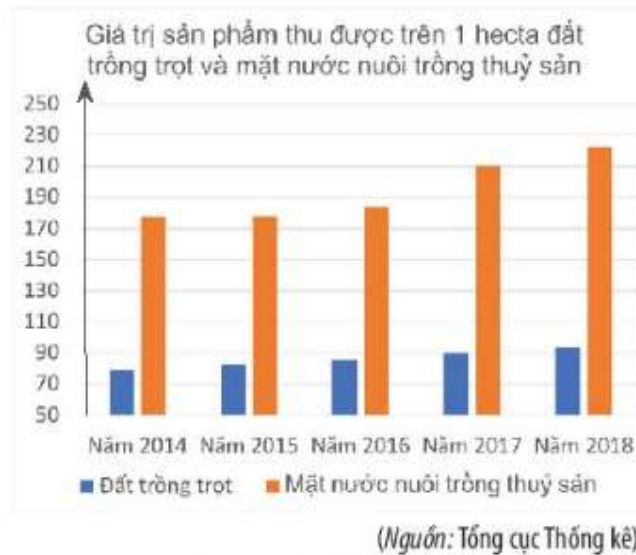


(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Số lượng trường THPT của các tỉnh năm 2018 đều tăng so với năm 2008 .

b) Ở Gia Lai, số trường THPT năm 2018 tăng gần gấp đôi so với năm 2008 .

Câu 3. Biểu đồ bên thể hiện giá trị sản phẩm (đơn vị: triệu đồng) trung bình thu được trên một hecta đất trồng trọt và mặt nước nuôi trồng thủy sản trên cả nước từ năm 2014 đến năm 2018. Hãy cho biết các phát biểu sau là đúng hay sai:



- Giá trị sản phẩm trung bình thu được trên một hecta mặt nước nuôi trồng thủy sản cao hơn trên một hecta đất trồng trọt.
- Giá trị sản phẩm thu được trên cả đất trồng trọt và mặt nước nuôi trồng thủy sản đều có xu hướng tăng từ năm 2014 đến năm 2018.
- Giá trị sản phẩm trung bình thu được trên một hecta mặt nước nuôi trồng thủy sản cao gấp khoảng 3 lần trên một hecta đất trồng trọt.

BÀI 3: CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG VÀ ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU

1. Số trung bình

- Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Số trung bình (hay **số trung bình cộng**) của mẫu số liệu này, kí hiệu là $\bar{x}$, được tính bởi công thức

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Khi đó, công thức tính số trung bình trở thành

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n}$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Ta gọi n là **cỡ mẫu**.

Chú ý: Nếu kí hiệu $f_k = \frac{n_k}{n}$ là tần số tương đối (hay còn gọi là tần suất) của x_k trong mẫu số liệu thì số trung bình còn có thể biểu diễn là: $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k$

Ví dụ 1

Một cửa hàng bán xe đạp thống kê số xe bán được hàng tháng trong năm 2021 ở bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số xe	10	8	7	5	8	22	28	25	20	10	9	7

- Hãy tính số xe trung bình cửa hàng bán được mỗi tháng trong năm 2021.
- Hãy so sánh hiệu quả kinh doanh trong quý III của cửa hàng với 6 tháng đầu năm 2021.

Giải

a) Số xe trung bình của hàng bán được mỗi tháng trong năm 2021 là:

$$\frac{1}{12}(10+8+7+5+8+22+28+25+20+10+9+7)=13,25 \text{ (xe)}.$$

b) Số xe trung bình bán được trong 6 tháng đầu năm là:

$$\frac{1}{6}(10+8+7+5+8+22)=10 \text{ (xe)}.$$

Số xe trung bình bán được trong quý III của năm là:

$$\frac{1}{3}(28+25+20)=\frac{73}{3}\approx 24,33 \text{ (xe)}.$$

Như vậy hiệu quả kinh doanh của cửa hàng trong quý III cao hơn trong 6 tháng đầu năm.

Ý nghĩa của số trung bình

Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu. Nó là một số đo xu thế trung tâm của mẫu đó.

2. Trung vị và tứ phân vị

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

Trung vị của mẫu, kí hiệu là M_e , là giá trị ở chính giữa dãy $x_1, x_2, \dots, x_n$. Cụ thể:

- Nếu $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, thì trung vị của mẫu $M_e = x_{k+1}$.

- Nếu $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, thì trung vị của mẫu $M_e = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$.

Ý nghĩa của trung vị

Trung vị được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu. Trung vị là giá trị nằm ở chính giữa của mẫu số liệu theo nghĩa: luôn có ít nhất 50% số liệu trong mẫu lớn hơn hoặc bằng trung vị và ít nhất 50% số liệu trong mẫu nhỏ hơn hoặc bằng trung vị. Khi trong mẫu xuất hiện thêm một giá trị rất lớn hoặc rất nhỏ thì số trung bình sẽ bị thay đổi đáng kể nhưng trung vị thì ít thay đổi.

Ví dụ 2

Bảng sau thống kê số sách mỗi bạn học sinh Tổ 1 và Tổ 2 đã đọc ở thư viện trường trong một tháng:

Tổ 1	3	1	2	1	2	2	3	25	1
Tổ 2	4	5	4	3	3	4	5	4	

a) Tính các trung vị của số sách các bạn ở Tổ 1 và số sách các bạn ở Tổ 2 đã đọc

b) Sử dụng trung vị, hãy so sánh xem các bạn ở tổ nào đọc nhiều sách ở thư viện hơn.

Giải

a) Sắp xếp số sách mỗi bạn Tổ 1 đã đọc theo thứ tự không giảm, ta được dãy: 1;1;1;2;2;2;3;3;25.

Vì cỡ mẫu bằng 9 nên trung vị của Tổ 1 là số liệu thứ 5 của dãy trên, tức là $M_e = 2$. Sắp xếp số sách mỗi bạn Tổ 2 đã đọc theo thứ tự không giảm, ta được dãy:

3;3;4;4;4;4;5;5.

Vì cỡ mẫu bằng 8 nên trung vị của Tổ 2 là trung bình cộng của số liệu thứ 4 và thứ 5 của dãy

trên, tức là $M_e = \frac{1}{2}(4+4)=4$.

b) Nếu so sánh theo trung vị thì các bạn Tổ 2 đọc nhiều sách ở thư viện hơn các bạn Tổ 1.

Ví dụ 3

Khi kiểm tra ngẫu nhiên một số công nhân trong một xí nghiệp, người ta thống kê lại độ tuổi của họ ở bảng sau:

Tuổi	25	26	27	29	31	34
------	----	----	----	----	----	----

Số công nhân	4	9	8	3	1	1
--------------	---	---	---	---	---	---

Tìm trung vị và trung bình cộng của mẫu số liệu trên.

Giải

Cỡ mẫu là $n = 26$. Khi sắp xếp độ tuổi các công nhân theo thứ tự không giảm thì số liệu thứ 13 và 14 lần lượt là 26 và 27. Vậy

$$M_e = \frac{1}{2}(26 + 27) = 26,5.$$

Số trung bình cộng của mẫu là

$$\bar{x} = \frac{1}{26}(25.4 + 26.9 + 27.8 + 29.3 + 31 + 34) = 27.$$

Trung vị chia mẫu thành hai phần. Trong thực tế người ta cũng quan tâm đến trung vị của mỗi phần đó. Ba trung vị này được gọi là tứ phân vị của mẫu.

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

Tứ phân vị của một mẫu số liệu gồm ba giá trị, gọi là **tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba** (lần lượt kí hiệu là Q_1, Q_2, Q_3). Ba giá trị này chia tập hợp dữ liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau.

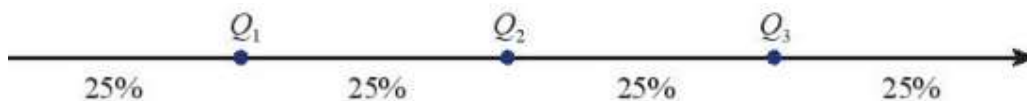
Cụ thể:

- Giá trị tứ phân vị thứ hai, Q_2 , chính là số trung vị của mẫu.
- Giá trị tứ phân vị thứ nhất, Q_1 , là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).
- Giá trị tứ phân vị thứ ba, Q_3 , là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

Ý nghĩa của tứ phân vị

Các điểm tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần chứa khoảng 25% tổng số số liệu đã thu thập được.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 còn được gọi là tứ phân vị dưới và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía dưới. Tứ phân vị thứ ba Q_3 còn được gọi là tứ phân vị trên và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía trên.



Ví dụ 4

Tìm tứ phân vị của các mẫu số liệu sau:

a) 5;13;5;7;10;2;3

b) 2;3;10;13;5;15;5;7

Giải

a) Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được: 2;3;5;5;7;10;13.

- Vì cỡ mẫu là $n = 7$, là số lẻ, nên giá trị tứ phân vị thứ hai là $Q_2 = 5$.

- Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của mẫu: 2;3;5. Do đó $Q_1 = 3$.

- Tứ phân vị thứ ba là trung vị của mẫu: 7;10;13. Do đó $Q_3 = 10$.

b) Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được: 2;3;5;5;7;10;13;15.

- Vì cỡ mẫu là $n = 8$, là số chẵn, nên giá trị tứ phân vị thứ hai là $Q_2 = \frac{1}{2}(5 + 7) = 6$.

- Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của mẫu: 2;3;5;5. Do đó $Q_1 = 4$.

- Tứ phân vị thứ ba là trung vị của mẫu: 7;10;13;15. Do đó $Q_3 = 11,5$.

Trong ví dụ trên, khoảng cách giữa Q_1 và Q_2 nhỏ hơn khoảng cách giữa Q_2 và Q_3 . Ta nói mật độ số liệu ở bên trái Q_2 cao hơn ở bên phải Q_2 .

3. Một

Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là **một** của mẫu số liệu và kí hiệu là M_o .

Ví dụ 5

Số vụ va chạm giao thông mỗi ngày tại một ngã tư được ghi lại trong bảng tần số sau:

Số vụ va chạm	0	1	2	3	4
Số ngày	12	17	6	4	1

Tìm một của mẫu số liệu trên.

Giải

Số ngày có 1 vụ va chạm là 17, lớn hơn số ngày có 0,2,3,4 vụ va chạm. Do đó mẫu số liệu trên có $M_o = 1$.

Ý nghĩa của một

Một đặc trưng cho giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu.

Chú ý: Một mẫu số liệu có thể có nhiều một. Khi tất cả các giá trị trong mẫu số liệu có tần số xuất hiện bằng nhau thì mẫu số liệu đó không có một.

BÀI TẬP

Câu 1: Điểm thi HKI môn toán của tổ học sinh lớp 10C (quy ước làm tròn đến 0,5 điểm) liệt kê như sau: 2; 5; 7,5; 8; 5; 7; 6,5; 9; 4,5; 10.

Tính điểm trung bình của 10 học sinh đó (quy tròn đến chữ thập phân thứ nhất)

Câu 2: Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong 1 năm (kg/sào) của 20 hộ gia đình

111	112	112	113	114	114	115	114	115	116
112	113	113	114	115	114	116	117	113	115

Tìm số trung bình cộng và số trung vị

Câu 3: điểm điều tra về chất lượng sản phẩm mới (thang điểm 100) như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75
72 68 39 41 54 61 72 75 72 61 50 65

Hãy tìm các tứ phân vị.

Câu 4: Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong 1 năm (kg/sào) của 20 hộ gia đình

111	112	112	113	114	114	115	114	115	116
112	113	113	114	115	114	116	117	113	115

Câu 5: điểm điều tra về chất lượng sản phẩm mới (thang điểm 100) như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75
72 68 39 41 54 61 72 75 72 61 50 65

a) Tìm số trung bình cộng và số trung vị

b) Tìm một của bảng số liệu trên.

Câu 6. Điều tra tiền lương hàng tháng của 30 công nhân của một xưởng may, ta có bảng phân bố tần số sau:

Tiền lương của 30 công nhân xưởng may

Tiền lương (nghìn đồng)	300	500	700	800	900	1000	Cộng
Tần số	3	5	6	5	6	5	30

Tìm môđ của bảng phân bố trên. Nêu ý nghĩa của kết quả đã tìm được.

Câu 7. Cho biết tình hình thu hoạch lúa vụ mùa năm 1980 của ba hợp tác xã ở địa phương V như sau: ($1\text{ha} = 10000\text{m}^2$)

Hợp tác xã	Năng suất lúa (tạ/ha)	Diện tích trồng lúa (ha)
A	40	150
B	38	130
C	36	120

Hãy tính năng suất lúa trung bình của vụ mùa năm 1980 trong toàn bộ ba hợp tác xã kể trên.

Câu 8. Tiền lương hàng tháng của 7 nhân viên trong một công ty du lịch là: 650, 840, 690, 720, 2500, 670, 3000 (đơn vị: nghìn đồng). Tìm số trung vị của các số liệu thống kê đã cho. Nêu ý nghĩa kết quả đã tìm được.

BÀI 4: CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU

1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

- **Khoảng biến thiên** của một mẫu số liệu, kí hiệu là R , là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó, tức là: $R = x_n - x_1$.

- **Khoảng tứ phân vị**, kí hiệu là Δ_Q , là hiệu giữa Q_3 và Q_1 , tức là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$

Ví dụ 1

Hãy tính khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu: 10; 20; 3; 1; 3; 4; 7; 4; 9.

Giải

Xét mẫu số liệu đã sắp xếp là: 1; 3; 3; 4; 4; 7; 9; 10; 20.

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là: $R = 20 - 1 = 19$.

- Cỡ mẫu là $n = 9$ là số lẻ nên giá trị tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = 4$.

- Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của mẫu: 1; 3; 3; 4. Do đó $Q_1 = 3$.

- Tứ phân vị thứ ba là trung vị của mẫu: 7; 9; 10; 20. Do đó $Q_3 = 9,5$.

- Khoảng tứ phân vị của mẫu là: $\Delta_Q = 9,5 - 3 = 6,5$.

Ý nghĩa của khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Khoảng biến thiên đặc trưng cho độ phân tán của toàn bộ mẫu số liệu.

Khoảng tứ phân vị đặc trưng cho độ phân tán của một nửa các số liệu, có giá trị thuộc đoạn từ Q_1 đến Q_3 trong mẫu.

Khoảng tứ phân vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị rất lớn hoặc rất bé trong mẫu.

Giá trị ngoại lệ

Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định các *giá trị ngoại lệ* trong mẫu, đó là các giá trị quá nhỏ hay quá lớn so với đa số các giá trị của mẫu. Cụ thể, phần tử x trong mẫu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$.

Trong Ví dụ 1, $Q_3 + 1,5\Delta_Q = 9,5 + 1,5 \cdot 6,5 = 19,25$ và $Q_1 - 1,5\Delta_Q = 3 - 1,5 \cdot 6,5 = -6,75$ nên mẫu có một giá trị ngoại lệ là 20.

Sự xuất hiện của các giá trị ngoại lệ làm cho số trung bình và phạm vi của mẫu thay đổi lớn. Do đó, khi mẫu có giá trị ngoại lệ, người ta thường sử dụng trung vị và khoảng tứ phân vị để đo mức độ tập trung và mức độ phân tán của đa số các phần tử trong mẫu số liệu.

2. Phương sai và độ lệch chuẩn

Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, \dots, x_n$.

- **Phương sai** của mẫu số liệu này, kí hiệu là S^2 , được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right],$$

trong đó $\bar{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

- Căn bậc hai của phương sai được gọi là **độ lệch chuẩn**, kí hiệu là S .

Chú ý: Có thể biến đổi công thức tính phương sai ở trên thành:

$$S^2 = \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \bar{x}^2.$$

Trong thống kê, người ta cũng quan tâm đến phương sai hiệu chỉnh, kí hiệu là $\hat{s}^2$, được tính bởi công thức:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right].$$

Ví dụ 2

Hai cung thủ A, B đã ghi lại kết quả từng lần bắn của mình ở bảng sau:

Cung thủ A	8	9	10	7	6	10	6	7	9	8
Cung thủ B	10	6	8	7	9	9	8	7	8	8

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mỗi mẫu số liệu ghi kết quả các lần bắn của từng cung thủ.

Giải

Số trung bình của kết quả các lần bắn của cung thủ **A** là:

$$(8+9+10+7+6+10+6+7+9+8):10=8.$$

Số trung bình của kết quả các lần bắn của cung thủ **B** là:

$$(10+6+8+7+9+9+8+7+8+8):10=8.$$

Phương sai mẫu số liệu của cung thủ **A** là:

$$S_A^2 = \frac{1}{10}(8^2+9^2+10^2+7^2+6^2+10^2+6^2+7^2+9^2+8^2)-8^2=2.$$

Độ lệch chuẩn mẫu số liệu của cung thủ **A** là: $S_A = \sqrt{S_A^2} = \sqrt{2} \approx 1,41.$

Phương sai mẫu số liệu của cung thủ **B** là:

$$S_B^2 = \frac{1}{10}(10^2+6^2+8^2+7^2+9^2+9^2+8^2+7^2+8^2+8^2)-8^2=1,2.$$

Độ lệch chuẩn mẫu số liệu của cung thủ **B** là: $S_B = \sqrt{S_B^2} = \sqrt{1,2} \approx 1,10.$

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

Phương sai là trung bình cộng của các bình phương độ lệch từ mỗi giá trị của mẫu số liệu đến số trung bình.

Phương sai và độ lệch chuẩn được dùng để đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì các giá trị của mẫu càng cách xa nhau (có độ phân tán lớn).

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Khi đó, công thức tính phương sai trở thành:

$$S^2 = \frac{1}{n} \left[n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2 \right],$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Có thể biến đổi công thức tính phương sai trên thành:

$$S^2 = \frac{1}{n} (n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_kx_k^2) - \bar{x}^2.$$

Ví dụ 3

Điều tra một số học sinh về số cái bánh chưng mà gia đình mỗi bạn tiêu thụ trong dịp Tết Nguyên đán, kết quả được ghi lại ở bảng sau. Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

Số cái bánh chưng	6	7	8	9	10	11	15
Số gia đình	5	7	10	8	5	4	1

Giải

Số trung bình của mẫu số liệu trên là:

$$\bar{x} = \frac{1}{40}(5.6 + 7.7 + 10.8 + 8.9 + 5.10 + 4.11 + 15) = 8,5.$$

Phương sai của mẫu số liệu trên là:

$$S^2 = \frac{1}{40}(5.6^2 + 7.7^2 + 10.8^2 + 8.9^2 + 5.10^2 + 4.11^2 + 15^2) - 8,5^2 = 3,25$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{3,25} \approx 1,80.$$

BÀI TẬP

Câu 1: Mẫu số liệu sau đây cho biết sản lượng lúa (đv tạ) của 5 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích

20 21 22 23 24

- Tìm sản lượng trung bình
- Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.
- Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị

Câu 2: Người ta tiến hành phỏng vấn một số người về chất lượng của một loại sản phẩm mới. người điều tra yêu cầu cho điểm sản phẩm (thang điểm 100) kết quả như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75
72 68 39 41 54 61 72 75 72 61 58 65

- Tìm phương sai và độ lệch chuẩn. Nhận xét gì về các kết quả nhận được.
- Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị
- Tìm giá trị bất thường

BÀI 5: KHÔNG GIAN MẪU VÀ BIẾN CỐ

I. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

1. Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

2. Không gian mẫu

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử đó và ký hiệu là Ω .

Ví dụ: Khi ta tung một đồng xu có 2 mặt, ta hoàn toàn không biết trước được kết quả của nó, tuy nhiên ta lại biết chắc chắn rằng đồng xu rơi xuống sẽ ở một trong 2 trạng thái: sấp (S) hoặc ngửa (N).

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{S; N\}$

II. BIẾN CỐ

1. Một biến cố A (còn gọi là sự kiện A) liên quan tới phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của nó còn tùy thuộc vào kết quả của T .

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho biến cố A xảy ra được gọi là một kết quả thuận lợi cho A .

2. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được ký hiệu bởi A hoặc Ω_A . Để đơn giản, ta có thể dùng chính chữ A để ký hiệu tập hợp các kết quả thuận lợi cho A .

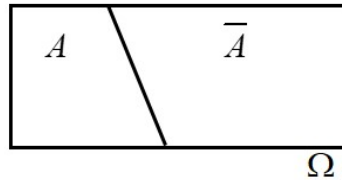
Khi đó ta cũng nói biến cố A được mô tả bởi tập A .

3. Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T . Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được ký hiệu là Ω .

4. Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T . Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\emptyset$.

5. Các phép toán trên biến cố

- Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A , kí hiệu là $\bar{A}$. Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có:
- Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của các biến cố A và B .
- Tập $A \cap B$ được gọi là giao của các biến cố A và B .
- Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói A và B xung khắc.



⑥. Bảng đọc ngôn ngữ biến cố.

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
$A \in \Omega$	A là biến cố
$A = \emptyset$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố “ A hoặc B ”
$C = A \cap B$	C là biến cố “ A và B ”
$A \cap B = \emptyset$	A và B xung khắc
$B = \bar{A}$	A và B đối nhau

BÀI TẬP

Bài 1. Gieo đồng tiền hai lần. Số phần tử của biến cố để mặt ngửa xuất hiện ít nhất một lần.

Bài 2. Gieo 3 đồng tiền là một phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu là gì?

Bài 3. Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất liên tiếp ba lần. Gọi A là biến cố “Có ít nhất hai mặt sấp xuất hiện liên tiếp” và B là biến cố “Kết quả ba lần gieo là như nhau”. Xác định biến cố $A \cup B$.

Bài 4. Gieo ngẫu nhiên một đồng tiền cân đối và đồng chất 5 lần. Tính số phần tử không gian mẫu.

Bài 5: Gieo một đồng tiền ba lần:

a) Mô tả không gian mẫu

b) Xác định các biến cố

A: “Lần thứ hai xuất hiện mặt sấp”

B: “Mặt sấp xảy ra đúng một lần”

C: “Mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần”

Bài 6: Gieo một con súc sắc hai lần:

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố:

A: “Lần đầu xuất hiện mặt sáu chấm”

B: “Tổng số chấm của hai lần gieo là tám”

C: “Số chấm hai lần gieo giống nhau”.

Bài 7: Một hộp chứa 4 cái thẻ được đánh số 1,2,3,4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ:

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố sau:

A: “Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn”;

B: “Tích các số trên hai thẻ là chẵn”.

BÀI 6. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

I. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

- Giả sử một phép thử có không gian mẫu Ω gồm hữu hạn các kết quả có cùng khả năng xảy ra và A là một biến cố.
- *Xác suất của biến cố A* là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

- Trong đó: $n(A)$ và $n(\Omega)$ lần lượt kí hiệu số phần tử của tập A và Ω .

 **Chú ý:**

- ✓ $0 \leq P(A) \leq 1$.
- ✓ $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$.

II. TÍNH XÁC SUẤT BẰNG SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

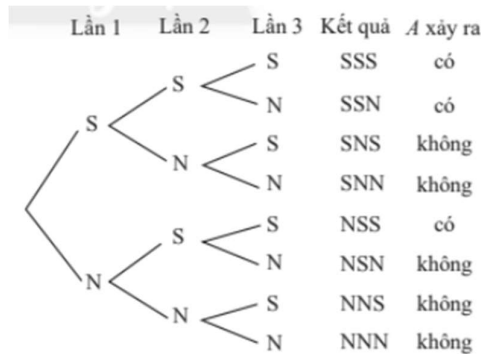
Trong chương VIII, chúng ta đã được làm quen với phương pháp sử dụng sơ đồ hình cây để liệt kê các kết quả của một thí nghiệm. Ta cũng có thể sử dụng sơ đồ hình cây để tính xác suất.

 **Ví dụ 1:** Tung một đồng xu cân đối và đồng chất 3 lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố A : “Trong 3 lần tung có ít nhất 2 lần liên tiếp xuất hiện mặt sấp”.

 **Lời giải**

Kí hiệu S nếu tung được mặt sấp, N nếu tung được mặt ngửa. Các kết quả có thể xảy ra trong 3 lần tung được thể hiện ở sơ đồ hình cây như Hình 2.

Có tất cả 8 kết quả có thể xảy ra, trong đó có 3 kết quả thuận lợi cho A . Do đó: $P(A) = \frac{3}{8}$.



Hình 2

III. BIẾN CỐ ĐỐI

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố “Không xảy ra A ”, kí hiệu là $\bar{A}$, được gọi là **biến cố đối** của A .

$$\bar{A} = \Omega \setminus A; P(\bar{A}) + P(A) = 1.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

 **Ví dụ 2:** Gieo đồng thời ba con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tích số chấm ở mặt xuất hiện trên ba con xúc xắc đó là số chẵn”.

- Hãy tìm biến cố đối của biến cố A .
- Hãy tính xác suất của biến cố A .

 **Lời giải**

a) Biến cố đối của biến cố A là biến cố “Tích các số chấm ở mặt xuất hiện trên ba con xúc xắc đó là số lẻ”.

b) Tổng số kết quả có thể xảy ra của phép thử là $n(\Omega) = 6^3$.

$\bar{A}$ xảy ra khi mặt xuất hiện trên cả ba con xúc xắc đều có số chấm là số lẻ. Số kết quả thuận lợi cho $\bar{A}$ là $n(\bar{A}) = 3^3$.

Xác suất của biến cố $\bar{A}$ là $P(\bar{A}) = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{7}{8}$.

IV. NGUYÊN LÝ XÁC SUẤT BÉ

• Trong thực tế, các biến cố có xác suất xảy ra gần bằng 1 thì gần như là luôn xảy ra trong một phép thử. Ngược lại, các biến cố mà xác suất xảy ra gần bằng 0 thì gần như không xảy ra trong một phép thử.

• Trong Lý thuyết Xác suất, Nguyên lý xác suất bé được phát biểu như sau:

 Nếu một biến cố có xác suất rất bé thì trong một phép thử, biến cố đó sẽ không xảy ra.

• Ví dụ như khi một con tàu lưu thông trên biển, xác suất nó bị đắm là số dương. Tuy nhiên, nếu tuân thủ các quy tắc an toàn thì xác suất xảy ra biến cố này là rất nhỏ, con tàu có thể yên tâm hoạt động.

• Nếu một nhà sản xuất tuyên bố tỉ lệ gây sốc phản vệ nặng khi tiêm một loại vắc xin là rất nhỏ, chỉ khoảng 0,001, thì có thể tiêm vắc xin đó cho mọi người được không? Câu trả lời là không, vì sức khỏe và tính mạng con người là vô giá, nếu tiêm loại vắc xin đó cho hàng tỉ người thì khả năng có nhiều người bị sốc phản vệ nặng là rất cao.

Bài tập 1: Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất xuất hiện mặt chẵn.

Giải

Gọi A_i là biến cố xuất hiện mặt i chấm và A là biến cố xuất hiện mặt chẵn thì

$$A = A_2 + A_4 + A_6$$

Ta thấy phép thử có không gian mẫu là 6 biến cố đồng khả năng xảy ra trong đó có 3 biến cố thuận lợi cho A .

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Bài tập 2: Trong hộp gồm có 6 bi màu trắng, 4 bi màu đen. Tìm xác suất để lấy từ hộp ra được:

a) 2 viên bi màu đen;

b) 3 viên bi màu trắng.

Giải

Gọi A là biến cố lấy từ hộp ra được 2 viên bi màu đen và B là biến cố lấy từ hộp ra 3 viên bi màu trắng.

$$\text{Ta có: a) } P(A) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} \approx 0,133$$

$$\text{b) } P(B) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} \approx 0,167$$

Bài tập 3: Rút ngẫu nhiên từ một bộ bài tú lơ khơ có 52 lá ra 5 lá. Tìm xác suất sao cho trong 5 lá rút ra có:

a) 2 lá đỏ và 3 lá đen;

b) 2 con rô, 1 con cơ, 2 con chuồn.

Giải

Gọi A là biến cố rút ra được 2 lá đỏ và 3 lá đen.

B là biến cố rút ra được 2 con rô, 1 con cơ, 2 con chuồn.

Số biến có thể xảy ra khi rút 5 lá bài là: C_{52}^5

a) Số biến cố thuận lợi cho A là: $C_{26}^2 C_{26}^3$

$$P(A) = \frac{C_{26}^3 C_{26}^2}{C_{52}^5} = \frac{845000}{2598960} = 0,3251$$

b) Số biến cố thuận lợi cho B là: $C_{13}^2 C_{13}^1 C_{13}^2$.

BÀI TẬP

Bài 1: Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

a) Có thể lập ra bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau;

b) Chọn một số tự nhiên đó. Tính xác suất số tự nhiên đó là số chẵn.

Bài 2: Một nhóm học sinh gồm 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh.

Tính xác suất để:

a) Cả 4 học sinh được chọn đều là nam;

b) Bốn học sinh được chọn là 2 nam và 2 nữ.

Bài 3: Gieo đồng thời hai con xúc xắc. Tìm xác suất để:

a) Tổng số xuất hiện trên hai con là 7;

b) Tổng số nốt xuất hiện trên hai con là 8;

c) Số nốt xuất hiện trên hai con hơn kém nhau 2.

Bài 4: Trong hộp gồm có 6 bi đen và 4 bi trắng. Rút ngẫu nhiên từ hộp ra 2 bi.

Tính xác suất để được:

a) Hai bi đen;

b) Ít nhất một bi đen.

Bài 5: Một học sinh đi thi chỉ thuộc 25 câu hỏi trong số 30 câu hỏi. Mỗi học sinh đi thi phải rút ra 3 câu hỏi. Tính xác suất:

a) Học sinh đó trả lời được ba câu;

b) Học sinh đó trả lời ít nhất một câu.

Bài 6. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất, xác suất để mặt có số chấm chẵn xuất hiện là bao nhiêu?

Bài 7. Trong giỏ có 5 đôi tất khác màu, các chiếc tất cùng đôi thì cùng màu. Lấy ngẫu nhiên ra 2 chiếc. Tính xác suất để 2 chiếc đó cùng màu.

Bài 8. Một lô hàng có 100 sản phẩm, trong đó có 80 sản phẩm tốt và 20 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 4 sản phẩm từ hộp, tính xác suất để 4 sản phẩm lấy ra đều là sản phẩm tốt.

Bài 9. Có 3 chiếc hộp. Mỗi hộp chứa 4 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 4. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ. Tính xác suất để 3 thẻ được lấy ra đều mang số chẵn.

ÔN TẬP CHƯƠNG VII

Bài 1: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5.

- a) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 3 chữ số khác nhau;
- b) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và số tự nhiên đó chia hết cho 5.

Bài 2: Hãy tìm:

- c) Số hạng thứ 6 trong khai triển: $(3 - x)^{10}$
- d) Tìm hệ số của số hạng thứ 4 trong khai triển: $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{15}$

Bài 3: Một hộp chứa 4 cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ:

- a) Mô tả không gian mẫu;
- b) Xác định các biến cố sau:
A: “Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn”
B: “Tích các số trên hai thẻ là chẵn”.

Bài 4: Một học sinh đi thi chỉ thuộc 25 câu hỏi trong số 30 câu hỏi. Mỗi học sinh đi thi phải rút ra 4 câu hỏi. Tính xác suất:

- a) Học sinh đó trả lời được 4 câu hỏi;
- b) Học sinh đó trả lời ít nhất 2 câu hỏi.