

ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG CAO ĐẲNG LÝ TỰ TRỌNG THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH



TẬP BÀI GIẢNG TOÁN

HK II: 2023-2024

NGÀNH/NGHỀ: Dành cho các ngành đào tạo
TRÌNH ĐỘ: Trung cấp chuyên nghiệp

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Biên soạn: Tổ Toán – Khoa Khoa học cơ bản

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	4
BÀI 1. GÓC LƯỢNG GIÁC	4
BÀI 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC	8
BÀI 3. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	12
BÀI 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ	14
BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	18
📖 BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I	24
CHƯƠNG II. DÃY SỐ- CẤP SỐ CỘNG- CẤP SỐ NHÂN	25
BÀI 1. DÃY SỐ	25
BÀI 2. CẤP SỐ CỘNG	29
BÀI 3. CẤP SỐ NHÂN	33
📖 BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II	35
CHƯƠNG III. GIỚI HẠN – HÀM SỐ LIÊN TỤC	36
BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ.	36
BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	41
BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC	47
📖 BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III	50
CHƯƠNG IV. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.	51
QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN	51
BÀI 1. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN	51
BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	60
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG	65
BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	69
BÀI 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG	76
📖 BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV	80
CHƯƠNG V. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	81
BÀI 1. SỐ TRUNG BÌNH VÀ MỐT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	81
BÀI 2. TRUNG VỊ VÀ TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	86
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V	91

CHƯƠNG VI. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT	92
BÀI 1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA	92
BÀI 2. PHÉP TÍNH LÔGARIT	97
BÀI 3. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT	100
BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT	104
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI	108
CHƯƠNG VII. ĐẠO HÀM	109
BÀI 1. ĐẠO HÀM.....	109
BÀI 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	113
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII.....	120
CHƯƠNG VIII. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN	121
BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC	121
BÀI 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG.....	123
BÀI 3. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC	129
BÀI 4. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN.....	137
BÀI 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. GÓC NHỊ DIỆN	144
📖BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII	148
CHƯƠNG IX. XÁC SUẤT.....	149
BÀI 1. BIẾN CỐ GIAO VÀ QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT	149
BÀI 2. BIẾN CỐ HỢP VÀ QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT	154

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Mục tiêu:

Sau khi nghiên cứu xong chương này, sinh viên có thể:

- Biểu diễn được các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác và tính được các giá trị lượng giác của chúng.
- Sử dụng được các hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác, công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức biến đổi tích thành tổng và công thức biến đổi tổng thành tích để giải các bài toán lượng giác.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với giá trị lượng giác của góc lượng giác và các phép biến đổi lượng giác
- Nhận biết được hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn và các đặc trưng của đồ thị của chúng.
- Vẽ được đồ thị hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ và giải thích được các tính chất cơ bản của chúng.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với hàm số lượng giác;

BÀI 1. GÓC LƯỢNG GIÁC

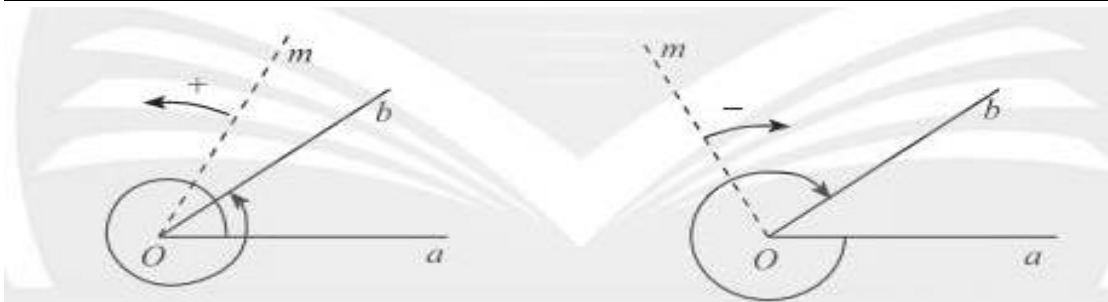
1. Góc lượng giác

1.1. Khái niệm góc lượng giác

Cho hai tia Oa , Ob .

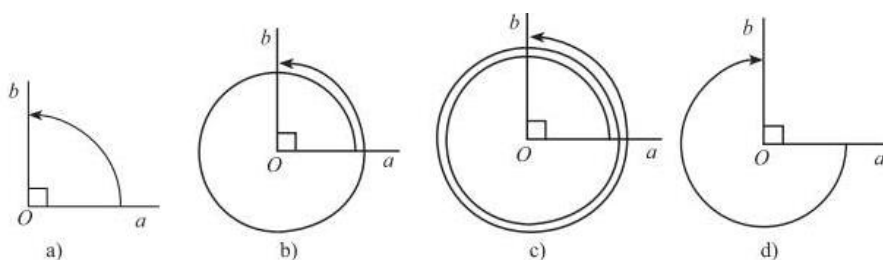
- Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói tia Om quét một **góc lượng giác** có tia đầu Oa , tia cuối Ob . Kí hiệu (Oa, Ob) .
- Khi tia Om quay một góc α , ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α , kí hiệu $Sđ(Oa, Ob) = \alpha$.

Quy ước: Chiều quay ngược chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.



Chú ý: Với hai tia Oa và Ob cho trước có vô số góc lượng giác tia đầu Oa và tia cuối Ob . Ta kí hiệu (Oa, Ob) cho tất cả các góc lượng giác này.

Ví dụ 1: Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau:



Giải

Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong trường hợp a là 90° .

Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong trường hợp b là $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$.

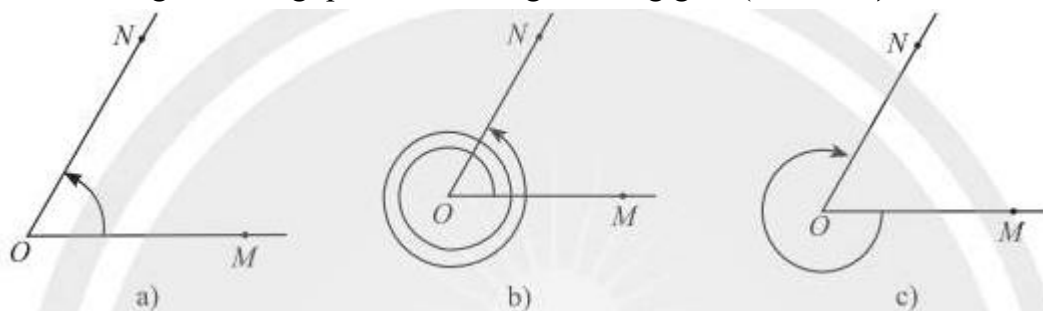
Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong trường hợp c là $90^\circ + 2.360^\circ = 810^\circ$.

Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong trường hợp d là $\frac{3}{4}.(-360^\circ) = -270^\circ$.

Nhận xét: Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội số nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là:

$$(Oa, Ob) = \alpha + k.360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2: Cho $MON = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình dưới đây và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



1.2. Hệ thức Chasles (Sa-lơ)

Với ba tia Oa, Ob và Oc bất kì, ta có:

$$(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nhận xét: Từ hệ thức Sa-lơ ta suy ra:

Với ba tia tùy ý Ox, Ou, Ov ta có:

$$Sđ(Ou, Ov) = Sđ(Ox, Ov) - Sđ(Ox, Ou) + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3: Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo -270° và một góc lượng giác $(Ox, Ov) = 135^\circ$. Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) .

Giải

Số đo của các góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov là:

$$Sđ(Ov, Ov) = Sđ(Ox, Ov) - Sđ(Ox, Ou) + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

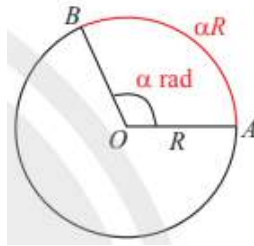
$$= 135^\circ - (-270^\circ) + k360^\circ$$

$$= 405^\circ + k360^\circ = 45^\circ + (k+1)360^\circ$$

$$= 45^\circ + m360^\circ, m = k+1, m \in \mathbb{Z}$$

2. Đơn vị radian

- Trên đường tròn bán kính R tùy ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo là 1 radian (đọc là 1 ra – di – an, viết tắt 1 rad)



- Công thức chuyển đổi số đo góc từ đơn vị radian sang độ và ngược lại:

$$\alpha^{\circ} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^{\circ}} \text{ rad}; \quad \alpha \text{ rad} = \left(\frac{180 \cdot \alpha}{\pi} \right)^{\circ}$$

Ví dụ 4: Đổi các số đo góc sau đây từ radian sang độ và ngược lại:

- a) 45° ; b) $\frac{\pi}{3}$; c) 150° ; d) $\frac{5\pi}{4}$

Giải

$$\text{a) } 45^{\circ} = \frac{\pi \cdot 45^{\circ}}{180^{\circ}} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}; \quad \text{b) } \frac{\pi}{3} = \left(\frac{180 \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} \right)^{\circ} = 60^{\circ}$$

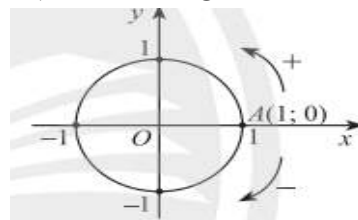
- Chú ý:** - Khi ghi số đo của một góc theo đơn vị radian, ta thường bỏ chữ rad sau số đo. Ví dụ: $\frac{\pi}{3}$ rad, viết là: $\frac{\pi}{3}$;

- Với đơn vị rad, công thức số đo tổng quát góc lượng giác (Oa, Ob) là:

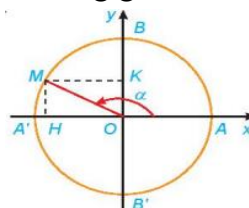
$$(Oa, Ob) = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. Đường tròn lượng giác

- Đường tròn lượng giác** là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1; 0)$ làm điểm gốc của đường tròn.



- Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α** (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $Sđ(Oa, OM) = \alpha$.



BÀI TẬP

Bài 1. Đổi số đo của các góc sau đây sang radian:

- a) 38° b) -115° c) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^0$

Bài 2. Đổi số đo của các góc sau đây sang độ:

- a) $\frac{\pi}{12}$ b) -5 c) $\frac{13\pi}{9}$

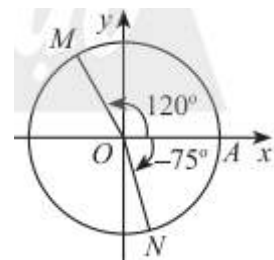
Bài 3. Biểu diễn các góc lượng giác sau trên đường tròn lượng giác:

- a) $\frac{-17\pi}{3}$ b) $\frac{13\pi}{4}$ c) -765°

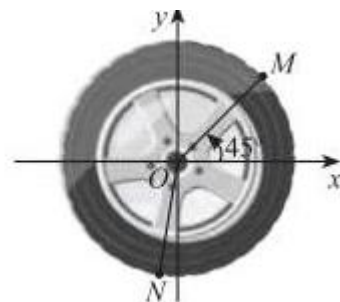
Bài 4. Góc lượng giác $\frac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

\ $\frac{31\pi}{7}$; $\frac{10\pi}{7}$; $\frac{-25\pi}{7}$

Bài 5. Viết công thức số đo tổng quát của các góc lượng giác(OA, OM) và (OA, ON) trong hình sau:



Bài 6: Trong hình, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON).



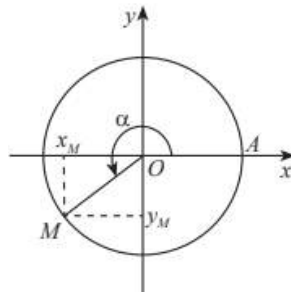
BÀI 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Định nghĩa: Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α . Khi đó:

- Tung độ y_M của M gọi là **sin** của α , kí hiệu: $\sin \alpha$;
- Hoành độ x_M của M gọi là **côsin** của α , kí hiệu: $\cos \alpha$;
- Nếu $x_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là **tang** của α , kí hiệu: $\tan \alpha$;
- Nếu $y_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là **côtang** của α , kí hiệu: $\cot \alpha$;

Các giá trị $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ gọi là *các giá trị lượng giác của góc α* .



Chú ý:

- a) Trục hoành là **trục côsin**, trục tung là **trục sin**;

Trục As có gốc ở điểm A(1;0) và song song với trục sin gọi là **trục tang**;

Trục Bt có gốc ở điểm B(0; 1) và song song với trục côsin gọi là **trục côtang**;



- b) $\sin \alpha, \cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;

$\tan \alpha$ xác định với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

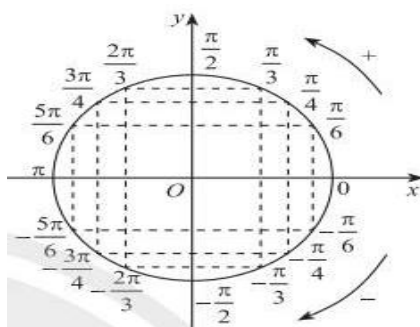
$\cot \alpha$ xác định với $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

- c) Với mọi góc lượng giác α và $k \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha;$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha;$$

- d) Bảng giá trị lượng giác của một số góc α đặc biệt với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (hay $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$)



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	(0°)	(30°)	(45°)	(60°)	90°
Giá trị lượng giác					
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∥
$\cot \alpha$	∥	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Ví dụ 1 : Tính $\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$ và $\tan(495^\circ)$.

Giải

Vì điểm biểu diễn của góc $\frac{-2\pi}{3}$ và góc $\frac{2\pi}{3}$ trên đường tròn lượng giác đối xứng nhau qua trục hoành, nên chúng có cùng hoành độ và tung độ đối nhau. Do đó :

$$\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

Vì $495^\circ = -45^\circ + 3.180^\circ$ nên $\tan(495^\circ) = \tan(-45^\circ) = -1$

2. Tính giá trị lượng giác của một góc bằng máy tính cầm tay

Bằng máy tính cầm tay, ta có thể tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác bất kì. Trước khi tính, cần chọn đơn vị đo góc như sau :

– Lần lượt ấn các phím **[SHIFT]**, **[MENU]** và **[2]** để màn hình hiện lên bảng lựa chọn đơn vị đo góc.

1:Degree
2:Radian
3:Gradian

– Tiếp tục ấn phím **[1]** để chọn đơn vị độ (Degree) hoặc phím **[2]** để chọn đơn vị radian.

– Ấn các phím **[MENU]** **[1]** để vào chế độ tính toán.

Ví dụ 2: Sử dụng máy tính cầm tay để tính $\cos 75^\circ$ và $\tan\left(\frac{-19\pi}{6}\right)$

3. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

$$\bullet \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\bullet \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \text{ với } \alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ với } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \text{ với } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

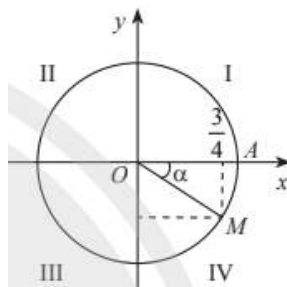
Ví dụ 3: Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, với $\frac{-\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Giải

$$\text{Ta có: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{-\sqrt{7}}{4} \text{ (n)} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ (l)} \end{cases} \quad \text{Vi } \frac{-\pi}{2} < \alpha < 0 \text{ nên } \sin \alpha < 0$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\sqrt{7}}{3} \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{-3\sqrt{7}}{7}$$

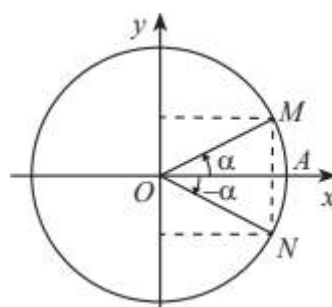


4. Giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt

▪ **Hai góc đối nhau:** α và $-\alpha$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $-\alpha$ đối xứng qua trục Ox, nên ta có:

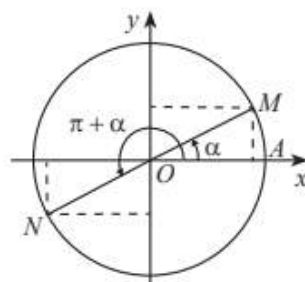
$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$



▪ **Hai góc hơn kém nhau π :** α và $\alpha + \pi$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\alpha + \pi$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, nên ta có:

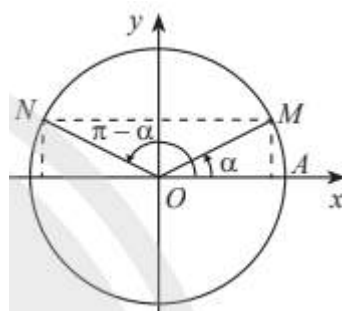
$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \pi) &= -\sin \alpha \\ \cos(\alpha + \pi) &= -\cos \alpha \\ \tan(\alpha + \pi) &= \tan \alpha \\ \cot(\alpha + \pi) &= \cot \alpha\end{aligned}$$



▪ **Hai góc bù nhau:** α và $\pi - \alpha$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\pi - \alpha$ đối xứng nhau qua trục Oy, nên ta có:

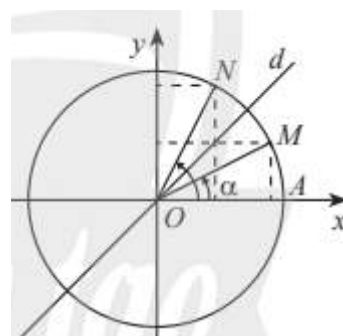
$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$



▪ **Hai góc phụ nhau** α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ đối xứng nhau qua đường phân giác d của góc xOy, nên ta có:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha\end{aligned}$$



Ví dụ 4:

a) Biểu diễn $\cos 638^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45° .

b) Biểu diễn $\cot \frac{19\pi}{5}$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$.

Giải

$$a) \cos 638^\circ = \cos(-82^\circ + 2.360^\circ) = \cos(-82^\circ) = \cos 82^\circ = \cos(90^\circ - 8^\circ) = \sin 8^\circ.$$

$$b) \cot \frac{19\pi}{5} = \cot\left(\frac{-\pi}{5} + 2.2\pi\right) = \cot\left(\frac{-\pi}{5}\right) = -\cot \frac{\pi}{5}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không?

$$a/ \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ và } \cos \alpha = \frac{-4}{5}$$

$$b/ \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{2}$$

$$c/ \tan \alpha = 3 \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{3}$$

Bài 2. Cho $\cos \alpha = \frac{-5}{13}$. Tính $\sin\left(\frac{-15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$.

Bài 3. Tính các giá trị lượng giác của góc α , nếu:

$$a/ \sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ và } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$b/ \cos \alpha = \frac{2}{5} \text{ và } 0^\circ < \alpha < 90^\circ;$$

$$c/ \tan \alpha = \sqrt{3} \text{ và } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$

$$d/ \cot \alpha = \frac{-1}{2} \text{ và } 270^\circ < \alpha < 360^\circ;$$

Bài 4. Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$ hoặc từ 0° đến 45° và tính:

$$a/ \cos \frac{31\pi}{6}$$

$$b/ \sin \frac{129\pi}{4}$$

$$c/ \tan 1020^\circ$$

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

$$a/ \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$$

$$b/ \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a/ \frac{1}{\tan \alpha + 1} + \frac{1}{\cot \alpha + 1};$$

$$b/ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)$$

$$c/ \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\alpha + 6\pi) - \tan(\alpha + \pi) \cot(3\pi - \alpha)$$

BÀI 3. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Công thức cộng

$$\begin{aligned} \bullet \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \bullet \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \bullet \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \bullet \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \bullet \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} & \bullet \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

Ví dụ 1: Tính giá trị của $\sin \frac{\pi}{12}$ và $\tan \frac{\pi}{12}$.

Giải

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

2. Công thức góc nhân đôi

Công thức tính các giá trị lượng giác của góc 2α qua các giá trị lượng giác của góc α được gọi là **công thức góc nhân đôi**.

$$\begin{aligned} \bullet \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \bullet \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \bullet \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính $\cos \frac{\pi}{8}$ và $\tan \frac{\pi}{8}$

Giải

Áp dụng công thức nhân đôi: $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, ta có:

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right)}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4};$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cos \frac{\pi}{8} > 0. \text{ Do đó } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\text{Lại có: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} - 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \tan \frac{\pi}{8} > 0. \text{ Do đó: } \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Không dùng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác của các góc:

a/ $\frac{5\pi}{12}$

b/ -555°

Bài 2. Tính $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ biết $\sin\alpha = \frac{-5}{13}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Bài 3. Tính các giá trị lượng giác của góc 2α , biết:

a/ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; b/ $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < 2\pi$.

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

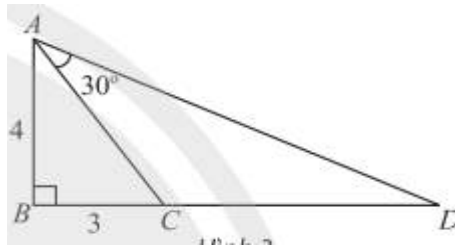
a/ $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\alpha$; b/ $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - \sin 2\alpha$;

Bài 5. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

a/ $\cos 2\alpha = \frac{2}{5}$ và $\frac{-\pi}{2} < \alpha < 0$; b/ $\sin 2\alpha = \frac{-4}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

Bài 6. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\angle CAD = 30^\circ$. Tính $\tan \angle BAD$, từ đó tính độ dài cạnh CD.



BÀI 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

1. Hàm số lượng giác

Hàm số sin là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$, kí hiệu $y = \sin x$.

Hàm số cosin là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$, kí hiệu $y = \cos x$.

Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \tan x.$$

Hàm số cotang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ với } x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \cot x.$$

2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

▪ Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là **hàm số chẵn** nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là **hàm số lẻ** nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng; Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số lượng giác $y = \cos x$, $y = \tan x$

Giải

a) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $\cos(-x) = \cos x$. Do đó hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Với mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, ta có: $-x \neq -\frac{\pi}{2} - k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, cũng có nghĩa

là $-x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ hay $-x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Mặt khác: $\tan(-x) = -\tan x$. Do đó hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

▪ Hàm số tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$ ta có $x \pm T \in D$ và $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

Ví dụ 2: Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \tan x$.

Giải

Ta có: $\sin x = \sin(x + 2\pi), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Do đó hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \tan x$ là các hàm số tuần hoàn.

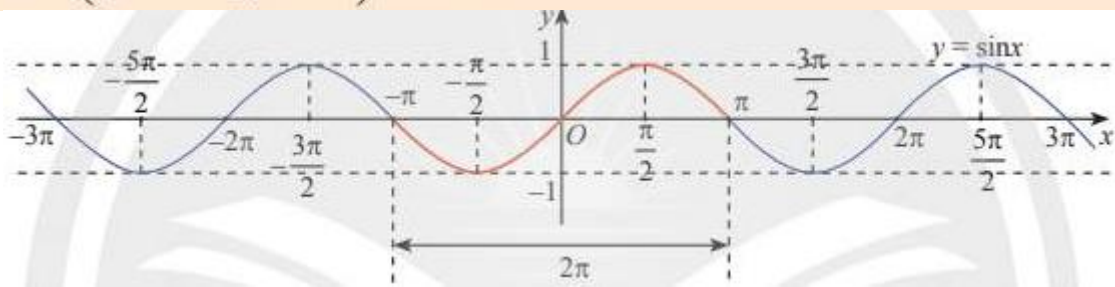
Chú ý: a) Các hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π

b) Các hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π

3. Đồ thị của các hàm số lượng giác

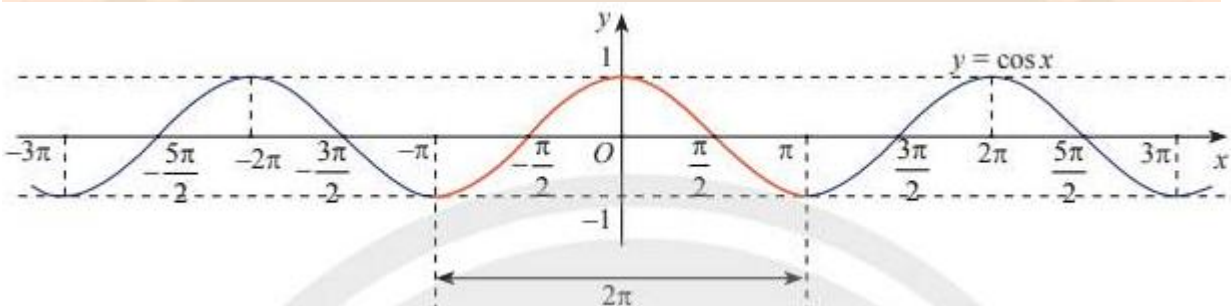
▪ Hàm số $y = \sin x$

- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$.



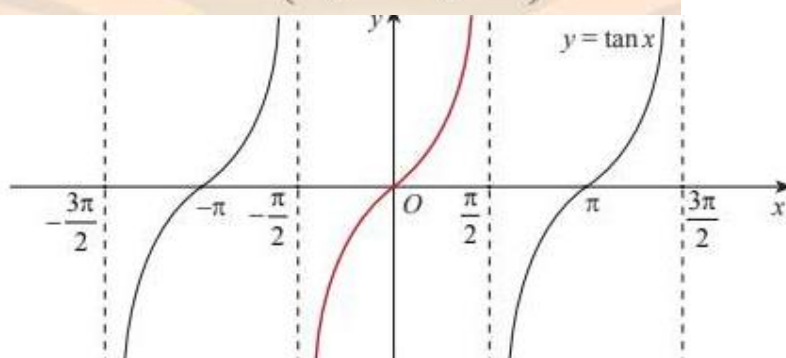
▪ Hàm số $y = \cos x$

- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- Hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục Oy .
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi) (k \in \mathbb{Z})$ và nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi) (k \in \mathbb{Z})$.



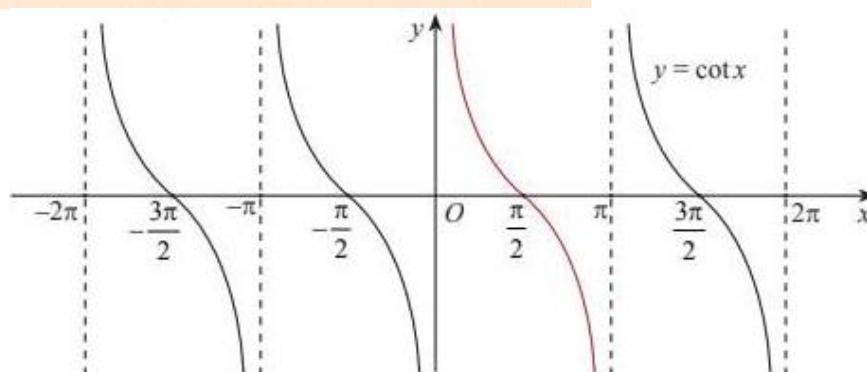
▪ Hàm số $y = \tan x$

- Hàm số tuần hoàn với chu kì π .
- Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O .
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$.



▪ Hàm số $y = \cot x$

- Hàm số tuần hoàn với chu kì π .
- Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O .
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi) (k \in \mathbb{Z})$.



BÀI TẬP

Bài 1: Các hàm số dưới đây có là hàm số chẵn hay hàm số lẻ không?

- a) $y = 5\sin^2 x + 1$; b) $y = \cos x + \sin x$; c) $y = \tan 2x$

Bài 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

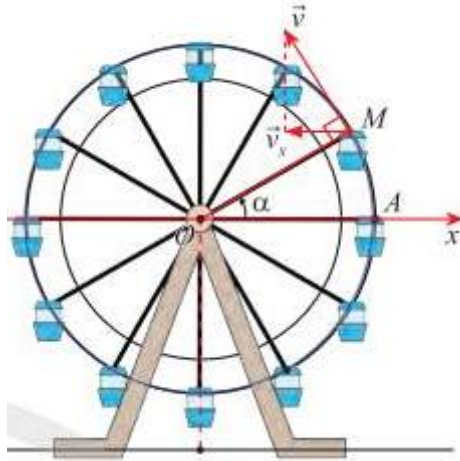
- a) $y = \frac{1}{\cos x}$; b) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; c) $y = \frac{1}{2 - \sin^2 x}$

Bài 3: Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2\cos x + 1$.

Bài 4: Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, xác định các giá trị $x \in [-\pi; \pi]$ thỏa mãn $\sin x = \frac{1}{2}$.

Bài 5: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (\text{Ox}, \text{OM})$ theo hàm số $v_x = 0,3\sin \alpha$ (m/s) (Hình vẽ).

- a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x ;
- b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.



BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình tương đương

Hai phương trình được gọi là **tương đương** ($\Leftrightarrow$) nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Ví dụ 1: Phương trình $x^2 - 4 = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- a) $2x^2 = 8$; b) $x^2 - 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2}$

Giải

- a) Hai phương trình $x^2 - 4 = 0$ và $2x^2 = 8$ có cùng tập nghiệm $\{-2; 2\}$ nên hai phương trình này tương đương.
- b) Ta có: $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$ nhưng không là nghiệm của phương trình $x^2 - 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2}$. Do đó hai phương trình này không tương đương với nhau.
- **Chú ý:** Để giải phương trình ta thường biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Một số phép biến đổi tương đương thường dùng:
+ Cộng hoặc trừ hai vế của phương trình với cùng một số hoặc cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình;

+ Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình;

2. Phương trình $\sin x = m$

Xét phương trình $\sin x = m$.

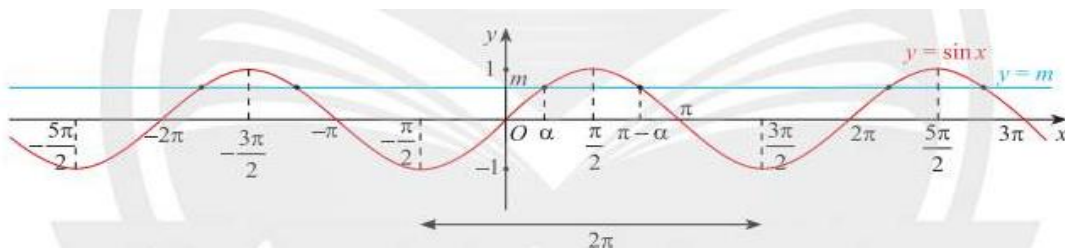
• Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

• Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$.



▪ Chú ý:

a) Một số trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$b) \sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \sin x = \sin a^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^0 + k360^0 \\ x = 180^0 - a^0 + k360^0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad b) \sin x = \frac{-3}{2};$$

$$c) \sin(x + 30^0) = \sin(x + 60^0).$$

Giải

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

b) Vì $-\frac{3}{2} < -1$ nên phương trình $\sin x = \frac{-3}{2}$ vô nghiệm.

$$\begin{aligned} \text{c) } \sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 30^\circ = x + 60^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = 180^\circ - (x + 60^\circ) + k360^\circ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3. Phương trình $\cos x = m$

Xét phương trình $\cos x = m$.

- Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $[0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

▪ Chú ý:

a) Một số trường hợp đặc biệt:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{b) } \cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } \cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \cos x = -3; \quad \text{b) } \cos x = \cos 15^\circ; \quad \text{c) } \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{3\pi}{12}.$$

Giải

a) Vì $-3 < -1$ nên phương trình $\cos x = -3$ vô nghiệm.

$$b) \cos x = \cos 15^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k360^\circ \\ x = -15^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$c) \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{12} = -\frac{3\pi}{12} + k2\pi \end{cases}$$

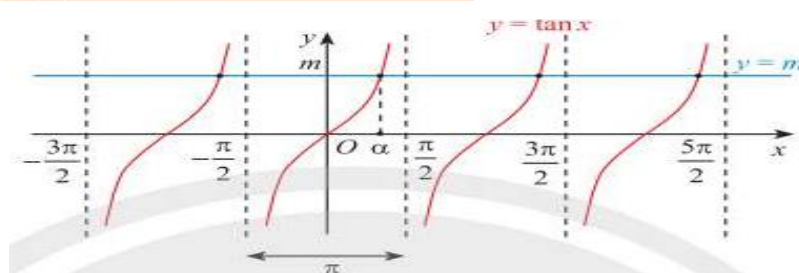
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

4. Phương trình $\tan x = m$

Với mọi số thực m , phương trình $\tan x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$.



▪ **Chú ý:** $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau:

$$a) \tan x = \sqrt{3}; \quad b) \tan 2x = \tan \frac{\pi}{11};$$

Giải

$$a) \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$b) \tan 2x = \tan \frac{\pi}{11} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{11} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{22} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

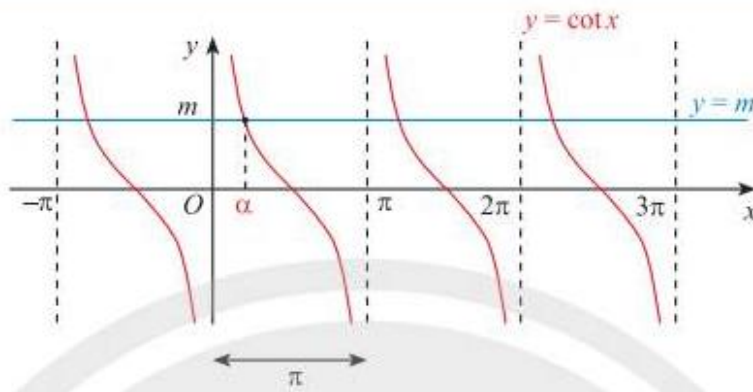
Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{22} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

5. Phương trình $\cot x = m$

Với mọi số thực m , phương trình $\cot x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.



▪ **Chú ý:** $\cot x = \cot a^0 \Leftrightarrow x = a^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau:

a) $\cot x = \frac{-\sqrt{3}}{3};$

b) $\cot 3x = \cot \frac{\pi}{7};$

Giải

a) $\cot x = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cot 3x = \cot \frac{\pi}{7} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{7} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{21} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{21} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

BÀI TẬP

Bài 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{2\pi}{7}$; c) $\sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$;

Bài 2: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos 4x = \cos \frac{5\pi}{12}$; c) $\cos^2 x = 1$;

Bài 3: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\tan x = \tan 55^\circ$; b) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

Bài 4: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$; b) $\cot 3x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$;

Bài 5: Tại các giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$ giao nhau?

Bài 6: Trong hình sau, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Tọa độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức

$s = 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?



BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

Bài 1: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính :

- a) $\sin \alpha$; b) $\sin 2\alpha$; c) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$;

Bài 2: Chứng minh đẳng thức lượng giác:

a) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$;

b) $\cos^4 \alpha - \cos^4\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\alpha$.

Bài 3: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x = 0$ là bao nhiêu?

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 3x = 0$;

b) $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\sin x + \sin 2x = 0$.

Bài 5: Vận tốc $v(\text{cm/s})$ của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức:

$$v = -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (Theo } \underline{\text{https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion}}).$$

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;
b) Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm/s.

CHƯƠNG II. DÃY SỐ- CẤP SỐ CỘNG- CẤP SỐ NHÂN

Mục tiêu:

Sau khi nghiên cứu xong chương này, sinh viên có thể:

- Nhận biết được khái niệm, các tính chất cơ bản và cách xác định dãy số.
- Nhận biết được cấp số cộng và cấp số nhân. Giải thích được công thức xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng và cấp số nhân.
- Tính được tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng và cấp số nhân.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với dãy số.

BÀI 1. DÃY SỐ

1. Dãy số là gì?

Trong thực tế, chúng ta thường có nhu cầu đánh số thứ tự một loạt các giá trị số cần phải xử lý, từ đó đưa ra khái niệm dãy số:

Hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số vô hạn** (hay gọi tắt là dãy số), nghĩa là

$$u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n = u(n).$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n) .

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1; u_2; \dots; u_n; \dots$

▪ Chú ý:

- $u_1 = u(1)$ gọi là **số hạng đầu**, $u_n = u(n)$ gọi là **số hạng thứ n** (hay **số hạng tổng quát**) của dãy số.
- Nếu $u_n = C$ với mọi n , ta nói $u(n)$ là dãy số không đổi.

Ví dụ 1: Cho hàm số $v: \{1; 2; 3; 4; 5\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto v(n) = 2n$$

Tính $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$, $v(4)$, $v(5)$.

Giải

Hàm số xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ nên nó là một dãy số.

Ta có: $v(1) = 2$; $v(2) = 4$; $v(3) = 6$; $v(4) = 8$; $v(5) = 10$.

Hàm số u xác định trên tập hợp $M = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ thì được gọi là một **dãy số hữu hạn**.
Dạng khai triển của dãy số này là $u_1, u_2, \dots, u_m$, trong đó u_1 là **số hạng đầu** và u_m là **số hạng cuối**.

Ví dụ 2: Cho 5 hình tròn theo thứ tự có bán kính 1; 2; 3; 4; 5.

- Viết dãy số chỉ diện tích của 5 hình tròn này;
- Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số trên.

Giải

- a) Dãy số chỉ diện tích của 5 hình tròn là: $\pi.1^2; \pi.2^2; \pi.3^2; \pi.4^2; \pi.5^2$
 b) Số hạng đầu $u_1 = \pi$; số hạng cuối $u_5 = 25\pi$;

2. Cách xác định dãy số

Thông thường một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

Cách 1: Liệt kê các số hạng (với các dãy số hữu hạn).

Cách 2: Cho công thức của số hạng tổng quát u_n .

Cách 3: Cho hệ thức truy hồi, nghĩa là

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu tiên);
- Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc theo vài số hạng đứng ngay trước nó).

Cách 4: Cho bằng cách mô tả.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$;

- a) Tìm bốn số hạng đầu tiên;
 b) Tính u_{20} và u_{99} .

Giải

a) Ba số hạng đầu tiên là: $u_1 = 0; u_2 = \frac{1}{7}; u_3 = \frac{1}{5}; u_4 = \frac{3}{13}$;

b) Ta có: $u_{20} = \frac{20-1}{3.20+1} = \frac{19}{61}$; $u_{99} = \frac{99-1}{3.99+1} = \frac{49}{149}$.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

Cho dãy số (u_n) .

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 5: Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau:

- a) (a_n) với $a_n = \frac{1}{n}$; b) (b_n) với $b_n = n^2$; c) (c_n) với $c_n = (-2)^n$;

Giải

a) Ta có: $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (a_n) là dãy số giảm.

b) Ta có: $b_{n+1} = (n+1)^2 > n^2 = b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (b_n) là dãy số tăng.

c) Ta có: $c_1 = -2; c_2 = 4; c_3 = -8$, suy ra $c_1 < c_2; c_2 > c_3$. Vậy (c_n) không là dãy số tăng cũng không là dãy số giảm.

Ví dụ 6: Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \frac{n}{n+1}$; b) (b_n) với $b_n = n - n^2$;

Giải

a) Ta lập tỉ số hai số hạng liên tiếp của dãy số:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = 1 + \frac{1}{n^2 + 2n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (a_n) là dãy số tăng.

b) $b_{n+1} - b_n = [n+1 - (n+1)^2] - (n - n^2) = -n^2 - n - n + n^2 = -2n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra $b_{n+1} < b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (b_n) là dãy số giảm.

4. Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số *bị chặn trên* nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số *bị chặn dưới* nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 7: Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \cos \frac{\pi}{n}$; b) (b_n) với $b_n = \frac{n}{n+1}$.

Giải

a) Vì $-\leq \cos \frac{\pi}{n} \leq 1$ nên $-1 \leq a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó dãy số (a_n) bị chặn trên và bị chặn dưới. Suy ra dãy số (a_n) bị chặn.

b) $b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $\frac{n}{n+1} > 0$ hay $b_n > 0$.

Suy ra $0 < b_n < 1$. Do đó dãy số (b_n) bị chặn trên và bị chặn dưới. Suy ra dãy số (b_n) bị chặn.

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

Bài 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)}$. Tìm u_1, u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n .

Bài 3: Xét tính tăng, giảm của dãy số (y_n) với $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Bài 4: Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \sin^2 \frac{n\pi}{3} + \cos \frac{n\pi}{4}$; b) (u_n) với $u_n = \frac{6n-4}{n+2}$.

Bài 5: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

Bài 6: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{na+2}{n+1}$. Tìm giá trị của a để:

a) (u_n) là dãy số tăng; b) (u_n) là dãy số giảm.

BÀI 2. CẤP SỐ CỘNG

1. Cấp số cộng

Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hoặc hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

Ví dụ 1: Tìm cấp số cộng trong các dãy số sau:

- a) 5;10;15;20;25;30. b) 1;2;4;8 c) 7; 7; 7 ;7 ;7.

Giải

- a) Dãy số 5;10;15;20;25;30 là cấp số cộng với công sai $d=5$.
b) Dãy số 1;2;4;8 có $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ nên không phải là cấp số cộng.
c) Dãy số 7; 7; 7 ;7 ;7 là cấp số cộng với công sai là $d=0$.

Ví dụ 2: Cho cấp số cộng: 3; 6; 9; 12;... . Tìm số hạng đầu, công sai và u_5 .

Giải

Cấp số cộng đã cho có số hạng đầu $u_1 = 3$; công sai $d=3$.

Ta có $u_4 = 12$ nên $u_5 = u_4 + d = 12 + 3 = 15$.

Ví dụ 3: Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của mỗi cấp số cộng đó.

- a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$; b) Dãy số (v_n) với $v_n = -3n + 5$;

Giải

a) Ta có: $u_1 = 2.1 + 1 = 3$; $u_{n+1} = 2(n+1) + 1 = (2n+1) + 2 = u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d=2$.

b) Ta có: $v_1 = -3.1 + 5 = 2$; $v_{n+1} = -3(n+1) + 5 = (-3n+5) - 3 = v_n + (-3), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (v_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = 2$ và công sai $d=-3$.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng. Tính b theo a và c .

Giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng, ta có: $d = b - a = c - b$. Do đó $b = \frac{a + c}{2}$.

Nhận xét: Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad (k \geq 2).$$

2. Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Định lí 1

Nếu một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d, \quad n \geq 2.$$

Ví dụ 5: Tìm số hạng tổng quát của các cấp số cộng sau:

- Cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và $d = -5$;
- Cấp số cộng (v_n) có $u_1 = 2$ và $u_{10} = 20$;

Giải

a) Ta có $u_n = u_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1)(-5) = -5n + 10$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = -5n + 10$.

b) Ta có: $u_1 = 2$, $u_{10} = u_1 + 9d = 20 \Leftrightarrow 2 + 9d = 20 \Rightarrow d = 2$

$$u_n = u_1 + (n - 1)d = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = 2n$.

3. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Định lí 2

Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

$$\text{hay } S_n = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2}.$$

Ví dụ 6:

- Tính tổng 100 số nguyên dương đầu tiên.

b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 + u_6 = 20$. Tính tổng 9 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_3 = -3$ và $S_5 = -15$. Tính S_{50} .

Giải

a) Ta sắp xếp 100 số nguyên dương đầu tiên thành cấp số cộng có $u_1 = 1, u_{100} = 100$.

$$\text{Suy ra } S_{100} = \frac{100(1+100)}{2} = 50.101 = 5050.$$

$$\text{b) } u_4 + u_6 = (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 2u_1 + 8d = 20. \text{ Suy ra } S_9 = \frac{9(2u_1 + 8d)}{2} = \frac{9.20}{2} = 90.$$

$$\text{c) Ta có: } S_3 = \frac{3(2v_1 + 2d)}{2} = -3 \Rightarrow v_1 + d = -1 \quad (1)$$

$$S_5 = \frac{5(2v_1 + 4d)}{2} = -15 \Rightarrow v_1 + 2d = -3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình } \begin{cases} v_1 + d = -1 \\ v_1 + 2d = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ d = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_{50} = \frac{50(2v_1 + 49d)}{2} = \frac{50.[2.1 + 49.(-2)]}{2} = -2400.$$

BÀI TẬP

Bài 1: Chứng minh dãy số hữu hạn sau là cấp số cộng: 1; -3; -7; -11; -15.

Bài 2: Cho (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = -10$. Viết công thức số hạng tổng quát u_n .

Bài 3: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = 2$.

a) Tìm u_{12} ; b) Số 195 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

Bài 4: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

$$\text{a) } u_n = 3 - 4n; \quad \text{b) } u_n = \frac{n}{2} - 4; \quad \text{c) } u_n = 5^n; \quad \text{d) } u_n = \frac{9 - 5n}{3};$$

Bài 5: Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết:

$$\text{a) } \begin{cases} u_3 - u_1 = 20 \\ u_2 + u_5 = 54 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_5 = 80 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} u_5 - u_2 = 3 \\ u_8 \cdot u_3 = 24 \end{cases};$$

Bài 6: Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45cm, 43cm, 41cm, ... , 31cm.

- Cái thang đó có bao nhiêu bậc?
- Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.



Bài 7: Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

- Tính công sai của cấp số cộng trên;
- Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.



Bài 8:

- Tính tổng của 50 số tự nhiên chẵn đầu tiên;
- Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Tính tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.
- Cho cấp số cộng (v_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

BÀI 3. CẤP SỐ NHÂN

1. Cấp số nhân

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số q được gọi là **công bội** của cấp số nhân.

Ví dụ 1: Tìm số hạng đầu và công bội của các cấp số nhân sau:

- a) 3;6;12;24;48;...; b) $1; \frac{-1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{-1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$; c) 9;9;9;9;9; ...

Giải

a) Dãy số: 3;6;12;24;48; ... là cấp số nhân với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$.

b) Dãy số $1; \frac{-1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{-1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$ là cấp số nhân với $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{-1}{2}$.

c) Dãy số 9; 9; 9; 9; 9, ... là cấp số nhân với $u_1 = 9$ và công bội $q = 1$.

Ví dụ 2: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

- a) 1; 11; 121; 12321; 1234321. b) 1; -1; 1; -1; 1. c) 4; 8; 12; 16.

Giải

a) Dãy số 1; 11; 121; 12321; 1234321 là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 11$;

b) Dãy số 1; -1; 1; -1; 1 là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và $q = -1$.

c) Dãy số 4; 8; 12; 16 có $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên không là cấp số nhân.

▪ **Chú ý:** Dãy số (u_n) là cấp số nhân thì $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}$, với $n \geq 2$

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Định lí 1

Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2.$$

Ví dụ 3: Cho cấp số nhân có 8 số hạng, số hạng đầu là 4374, số hạng cuối là 2. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Giải

Ta có $u_1 = 4374$ và $u_8 = 2$. Gọi q là công bội của cấp số nhân này, ta có:

$$u_8 = u_1 \cdot q^7 \Rightarrow q^7 = \frac{u_8}{u_1} = \frac{2}{4374} = \frac{1}{2178} = \left(\frac{1}{3}\right)^7, \text{ do đó } q = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 4: Viết công thức số hạng tổng quát u_n theo số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân sau:

a) 5; 10; 20; 40; 80; b) $1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; \frac{1}{10000}; \dots$

3. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Định lí 2

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

▪ **Chú ý:** Khi $q = 1$ thì $s_n = n \cdot u_1$

Ví dụ 5: Tính tổng 10 số đầu tiên của cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

Giải

Áp dụng công thức $s_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$, ta có $s_{10} = \frac{1(1 - 2^{10})}{1 - 2} = 2^{10} = 1023$.

Ví dụ 6: Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) trong các trường hợp sau:

a) $u_1 = 10^5; q = 0,1; n = 5;$ b) $u_1 = 10; u_2 = -20; n = 5;$

BÀI TẬP

Bài 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

$$\text{a) } u_n = 3 \cdot (-2)^n; \quad \text{b) } u_n = (-1)^{n+1} \cdot 7^n; \quad \text{c) } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

Bài 2: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết:

$$\text{a) } \begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$$

Bài 3: a) Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân. Tìm số đo của bốn góc đó, biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.

b) Viết sáu số xen giữa các số -2 và 256 để được cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu?

Bài 4: Ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Bài 5: Tính các tổng sau:

$$\text{a) } S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}; \quad \text{b) } S_n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots 9}_{n \text{ chữ số } 9}$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

Bài 1: Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n - 1}{2^n}$.

Bài 2: Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

Bài 3: Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết:

$$\text{a) } \begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$$

Bài 4: Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) biết:

$$\text{a) } \begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} u_4 + u_2 = 72 \\ u_5 + u_3 = 144 \end{cases}$$

Bài 5: Giả sử một quần thể động vật ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12%/năm, xuất cư là 2%/năm, tử vong là 8%/năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau hai năm.

CHƯƠNG III. GIỚI HẠN – HÀM SỐ LIÊN TỤC

Mục tiêu:

Sau khi nghiên cứu xong chương này, sinh viên có thể:

- Nhận biết được khái niệm giới hạn của dãy số, vận dụng được các giới hạn cơ bản và các phép toán giới hạn để tìm giới hạn một số dãy số đơn giản.
- Tính được tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và vận dụng vào giải quyết những vấn đề trong toán học và cuộc sống.
- Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn, giới hạn một phía của hàm số tại một điểm, tại vô cực, giới hạn vô cực tại một điểm thông qua xét một số giới hạn cơ bản; tính giới hạn của hàm số bằng cách dùng những giới hạn cơ bản và các phép toán trên giới hạn hàm số; giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với giới hạn hàm số.
- Nhận dạng được hàm số liên tục tại một điểm, hoặc trên một khoảng, hoặc trên một đoạn; nhận biết được tính liên tục của một tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục, tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản.

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ.

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Giới hạn 0 của dãy số

Ta nói dãy số (u_n) có **giới hạn 0** khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta còn viết là $\lim u_n = 0$.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, sử dụng định nghĩa chứng tỏ rằng $\lim u_n = 0$.

Giải

Với số thực dương d bé tùy ý cho trước, lấy số tự nhiên N sao cho $N > \frac{1}{d}$. Khi đó, với mọi số

tự nhiên n sao cho $n \geq N$, ta có $|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < d$.

Theo định nghĩa $\lim u_n = 0$

❖ Giới hạn cơ bản

- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương bất kì.
- $\lim q^n = 0$, với q là số thực thoả mãn $|q| < 1$.

Ví dụ 2: Áp dụng giới hạn cơ bản, tìm: $\lim \frac{1}{(\sqrt{3})^n}$.

Giải

Ta có: $\frac{1}{(\sqrt{3})^n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$.

Vì $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ nên $\lim \frac{1}{(\sqrt{3})^n} = \lim \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$

Giới hạn hữu hạn của dãy số

Ta nói dãy số (u_n) có **giới hạn hữu hạn** là số a (hay u_n dần tới a) khi n dần tới dương vô cực, nếu $\lim (u_n - a) = 0$. Khi đó, ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

❖ **Chú ý:** Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$

Ví dụ 3: Dùng định nghĩa, tìm giới hạn $\lim \frac{3n^2 + 1}{n^2}$.

Giải

Đặt $u_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2}$. Ta có $u_n = 3 + \frac{1}{n^2}$ hay $u_n - 3 = \frac{1}{n^2}$.

Suy ra $\lim(u_n - 3) = \lim \frac{1}{n^2} = 0$.

Theo định nghĩa, ta có: $\lim u_n = 3$. Vậy $\lim \frac{3n^2 + 1}{n^2} = 3$.

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số

Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó:

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(c \cdot u_n) = c \cdot a$
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$
- Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

Ví dụ 4: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{3n+2}{2n-1};$ b) $\lim \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}$

Giải

a) Ta có $\frac{3n+2}{2n-1} = \frac{3+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}$ (chia cả tử và mẫu cho n)

Từ đó $\lim \frac{3n+2}{2n-1} = \lim \frac{3+2 \cdot \frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{\lim \left(3+2 \cdot \frac{1}{n}\right)}{\lim \left(2-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim 3 + 2 \lim \frac{1}{n}}{\lim 2 - \lim \frac{1}{n}} = \frac{3+2 \cdot 0}{2-0} = \frac{3}{2}$

b) Ta có $\frac{\sqrt{9n^2+1}}{n} = \frac{\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2}} = \sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2}} = \sqrt{9+\frac{1}{n^2}}$

Từ đó $\lim \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n} = \lim \sqrt{9+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim \left(9+\frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{\lim 9 + \lim \frac{1}{n^2}} = \sqrt{9+0} = 3.$

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó:

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(c \cdot u_n) = c \cdot a$
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$
- Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

Ví dụ 5: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \dots$

Giải

Tổng trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{-1}{4}$ nên

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}.$$

Ví dụ 6: Biết rằng có thể coi số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,666\dots$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn:

$$0,66\dots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots = 0,6 + 0,6 \cdot \frac{1}{10} + 0,6 \cdot \frac{1}{10^2} + \dots$$

Hãy viết $0,666\dots$ dưới dạng phân số.

Giải

Số $0,666\dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $0,6$ và công bội bằng $\frac{1}{10}$.

$$\text{Do đó } 0,66\dots = \frac{0,6}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

4. Giới hạn vô cực

- Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn** là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn** là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

❖ **Chú ý:** Ta có kết quả sau:

- $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi $\lim(-u_n) = -\infty$;
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$;
- Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n > 0$, với mọi n thì $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$;

Ví dụ 7: Tìm giới hạn $\lim q^n$ với $q > 1$.

Giải

Từ $q > 1$ suy ra $0 < \frac{1}{q} < 1$. Do đó, $\lim \frac{1}{q^n} = \lim \left(\frac{1}{q}\right)^n = 0$.

Mà $q^n > 0$ với mọi n nên $\lim q^n = +\infty$.

❖ **Nhận xét:**

a) $\lim n^k = +\infty (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$;

b) $\lim q^n = +\infty (q > 1)$.

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{-2n+1}{n}$; b) $\lim \frac{\sqrt{16n^2-2}}{n}$;

c) $\lim \frac{4}{2n+1}$; d) $\lim \frac{n^2-2n+3}{2n^2}$

Bài 2: Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau:

a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots$; b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$

Bài 3: Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,444... dưới dạng một phân số.

Bài 4: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n^2+3n}{n^2+1}$; b) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+3}}{n}$;

BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Giải

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq -2$ với mọi n và $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n + 2)(x_n - 2)}{x_n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = -2 - 2 = -4.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$.

❖ **Nhận xét:** $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c : hằng số)

Ví dụ 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x)$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$;

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

a) Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (với $M \neq 0$)

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$.)

❖ Nhận xét:

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, ($c \in \mathbb{R}$, nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$).

Ví dụ 3: Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2)$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1}$

Giải

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} (4x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 1 - 4 + 2 = -1$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 2} x - 2}{2 \lim_{x \rightarrow 2} x + 1} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{4}{5}$

Ví dụ 4: Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$.

Giải

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2 + 2 = 4$.

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}$ (Nhân cả tử và mẫu cho $(\sqrt{x+1} + 2)$)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \\
&= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}+2} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x+1}+2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

3. Giới hạn một phía

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên trái** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

❖ Chú ý:

a) Ta thừa nhận các kết quả sau:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$;
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

b) Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở mục 2 vẫn đúng khi ta thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > -1 \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có).

Giải

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n > -1$ và $x_n \rightarrow -1$. Khi đó $f(x_n) = 3$ nên $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim 3 = 3$. Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n < -1$ và $x_n \rightarrow -1$. Khi đó $f(x_n) = 3$ nên

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 3 = 3. \text{ Vậy } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$ nên $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$.

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Giải

Hàm số xác định trên $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Giả sử (x_n) là dãy số sao cho $x_n > -2$ và $x_n \rightarrow +\infty$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2.$$

❖ Chú ý:

a) Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c \text{ và } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

b) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 7: Tìm các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x^2}{x^2+2x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1};$$

Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x^2}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-3}{1+\frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}-3\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}-3}{1+\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}} = \frac{0-3}{1+0} = -3;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}}{1+\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

5. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

- Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về phía bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \rightarrow +\infty \text{ hay } f(x) \rightarrow +\infty \text{ khi } x \rightarrow x_0^+.$$

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

- Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên trái** là $-\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về phía bên trái nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow -\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \rightarrow -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow x_0^-$.

❖ Chú ý:

a) Các giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

được định nghĩa tương tự như trên.

b) Ta có các giới hạn thường dùng sau:

- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$ ($a \in \mathbb{R}$);
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số nguyên dương chẵn;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số nguyên dương lẻ.

c) Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau:

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty$) thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x).g(x)]$ được tính theo quy tắc cho bởi bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) . g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc trên vẫn đúng khi thay x_0^+ thành x_0^- (hoặc $+\infty, -\infty$).

Ví dụ 8: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1)$;

Giải

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x = 2.3 = 6$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[2x \cdot \frac{1}{x-3} \right] = 6.(-\infty) = -\infty$.

b) Ta có: $3x-1 = x \left(3 - \frac{1}{x} \right)$ Suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$.

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 7x + 4)$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$.

Bài 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

Bài 3: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x+1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

Bài 4: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1};$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x^2);$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3-x};$

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục tại điểm** x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

❖ **Nhận xét:** Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì phải có ba điều sau:

1. Hàm số xác định tại x_0 ; 2. Tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$; 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

❖ **Chú ý:** Khi hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói $f(x)$ **gián đoạn tại điểm** x_0 và x_0 được gọi là **điểm gián đoạn** của hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ tại điểm $x_0 = 2$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \\ 2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Giải

a) Ta có: $f(2) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

b) Ta có: $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 2 \cdot 0 = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 0 + 2 = 2.$$

Suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Vậy hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên khoảng** $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Ví dụ 2: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Giải

Với mọi $x_0 \in (-1; 1)$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow x_0} x^2} = \sqrt{1-x_0^2} = f(x_0).$$

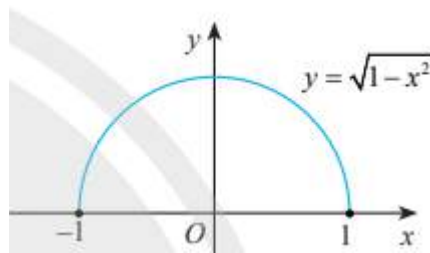
Do đó $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (-1; 1)$.

Ta lại có:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2} = \sqrt{1-1} = 0 = f(-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2} = \sqrt{1-1} = 0 = f(1).$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ (hình vẽ).



3. Tính liên tục của hàm số sơ cấp

- Hàm số đa thức $y = P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng.

Trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.

❖ **Nhận xét:** Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là **hàm số sơ cấp**.

Ví dụ 3: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 2$; b) $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x - 2}$

Giải

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 2$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x - 2}$ là hàm số phân thức, có tập xác định $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

4. Tổng, hiệu, tích, thương của hàm số liên tục

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Ví dụ 4: Xét tính liên tục của hàm số $y = \frac{\sin x}{x+1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số: $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Các hàm số $y = \sin x$ và $y = x+1$ liên tục tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y = \frac{\sin x}{x+1}$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \neq -1$ (hay liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$).

BÀI TẬP

Bài 1: Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

Bài 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$.

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$; b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$; c) $h(x) = \cos x + \tan x$.

Bài 4: Cho hàm số $f(x) = 2x - \sin x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Xét tính liên tục hàm số $y = f(x).g(x)$ và $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

Bài 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{n}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3n+1}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+2)}{n^2}$.

Bài 2: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - x + 2)$; b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x - 2}$;

Bài 3: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2}{x+1}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2}$.

Bài 4: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x}$;

Bài 5: Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{khi } x \geq 0 \\ 2 \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Bài 6: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{khi } x \neq 5 \\ a & \text{khi } x = 5 \end{cases}$$

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

CHƯƠNG IV. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Mục tiêu:

Sau khi nghiên cứu xong chương này, sinh viên có thể:

- Mô tả được cách xác định mặt phẳng. Xác định được giao tuyến của hai mặt phẳng. Nhận biết được hình chóp, hình tứ diện.
- Nhận biết và vận dụng được các tính chất về quan hệ song song giữa các đường thẳng và mặt phẳng. Biết sử dụng định lý Thales trong không gian. Giải thích được tính chất cơ bản của hình lăng trụ và hình hộp
- Nhận biết được phép chiếu song song. Sử dụng được phép chiếu song song để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.

BÀI 1. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Mặt phẳng trong không gian

Điểm, đường thẳng, mặt phẳng là ba đối tượng cơ bản của hình học không gian.

Mặt bảng, mặt bàn, mặt sàn nhà, mặt hồ nước yên lặng cho ta hình ảnh một phần của một mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc để biểu diễn mặt phẳng và dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp trong dấu ngoặc để kí hiệu mặt phẳng.



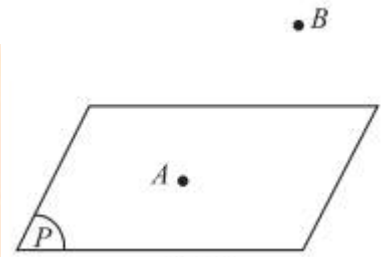
a) Mặt phẳng (P)



b) Mặt phẳng (α)

- ❖ **Chú ý:** Mặt phẳng (P) còn được viết tắt là mp(P) hoặc (P).
- ❖ **Điểm thuộc mặt phẳng**

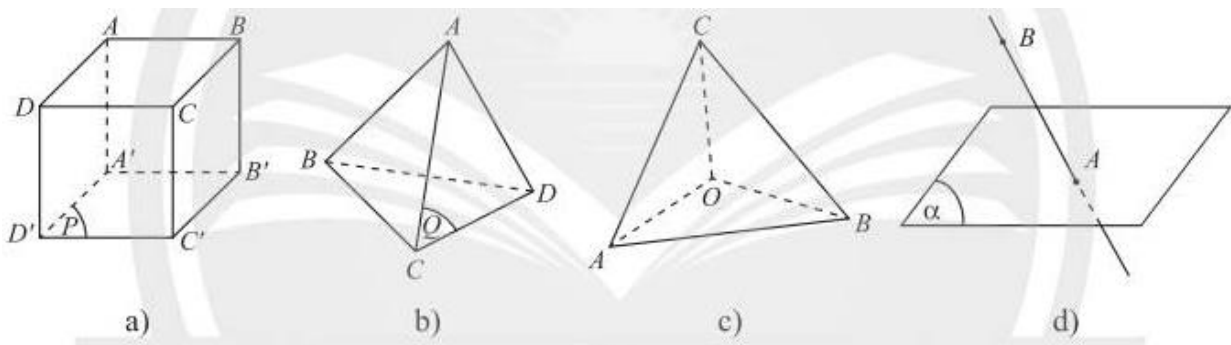
- Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói A nằm trên (P) hay (P) chứa A , hay (P) đi qua A và kí hiệu là $A \in (P)$.
- Nếu điểm B không thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói B nằm ngoài (P) hay (P) không chứa B và kí hiệu là $B \notin (P)$.



❖ Biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng

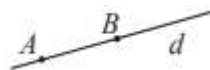
Quy tắc:

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Giữ nguyên tính liên thuộc (thuộc hay không thuộc) giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng.
- Giữ nguyên tính song song, cắt nhau giữa các đường thẳng.
- Biểu diễn đường nhìn thấy bằng nét vẽ liền và biểu diễn đường bị các mặt phẳng che khuất bằng nét vẽ đứt đoạn.



2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.



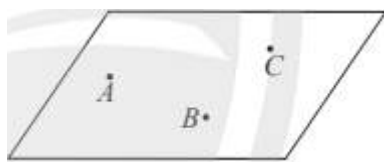
Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt A, B được kí hiệu là AB .

Ví dụ 1: Cho ba điểm phân biệt M, N, P không thẳng hàng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong ba điểm đã cho?

Giải

Do qua hai điểm phân biệt chỉ có một đường thẳng nên qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng M, N, P ta xác định được ba đường thẳng là MN, NP và PM .

Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.



Chú ý: Một mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng được kí hiệu là (ABC) .

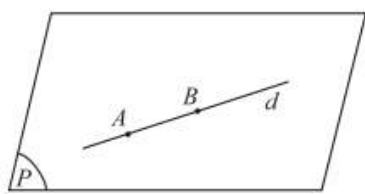
Ví dụ 2: Cho đường thẳng a đi qua hai điểm phân biệt M, N và điểm O không thuộc a . Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, O?

Giải

Do O không thuộc a nên ba điểm M, N, O không thẳng hàng. Do đó chỉ có một mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, O.



Tính chất 3: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.



Chú ý: Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) thường được kí hiệu $d \subset (P)$ hoặc $(P) \supset d$.

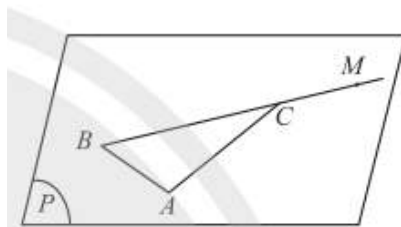
Ví dụ 3: Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và một điểm M nằm trên đường thẳng BC. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C. Chứng tỏ rằng $M \in (P)$.

Giải

Ta có (P) là mặt phẳng duy nhất đi qua ba điểm A, B, C (Tính chất 2).

Lại có mọi điểm của đường thẳng BC đều thuộc mặt phẳng (P) (Tính chất 3).

Vì $M \in BC$ (gt) suy ra $M \in (P)$.



Tính chất 4: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Chú ý: Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó *đồng phẳng*,

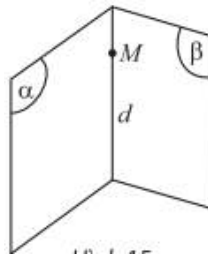
còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng *không đồng phẳng*.

Ví dụ 4: Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba trong bốn điểm đã cho?

Giải

Gọi A, B, C, D là bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng trong không gian (tính chất 4). Ta xác định được bốn mặt phẳng phân biệt là (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).

Tính chất 5: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.



Chú ý: Đường thẳng d chung của hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là **giao tuyến** của (α) và (β) , kí hiệu $d = (\alpha) \cap (\beta)$.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC và một điểm O không thuộc mặt phẳng (ABC). Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (OAB) và (ABC).

Giải

Ta có A, B là hai điểm chung của hai mặt phẳng (OAB) và (ABC). Suy ra AB là giao tuyến của hai mặt phẳng (OAB) và (ABC).

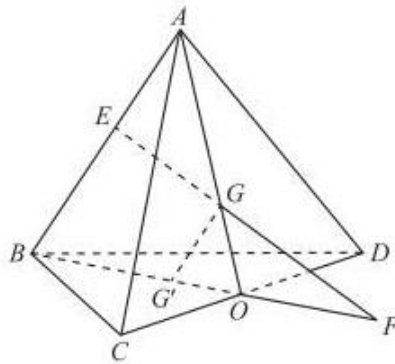
Tính chất 6: Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Ví dụ 6: Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng.

a) Gọi O là trung điểm của CD, G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD.

Chứng minh $GG' \parallel AB$;

b) Cho điểm E trên Ab sao cho EG cắt mặt phẳng đi qua ba điểm B, C, D tại F. Chứng minh bốn điểm B, G', O, F thẳng hàng.



Giải

a) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm O, A, B được xác định theo tính chất 2.

Trong mặt phẳng (P), ta có:

$$\frac{OG}{OA} = \frac{1}{3} \text{ (Vì G là trọng tâm của tam giác ACD);}$$

$$\frac{OG'}{OB} = \frac{1}{3} \text{ (Vì G' là trọng tâm của tam giác BCD).}$$

Suy ra $\frac{OG}{OA} = \frac{OG'}{OB}$. Áp dụng tính chất 6, suy ra $GG' \parallel AB$.

b) Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua ba điểm B, C, D. Các điểm B, G', O, F là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q). Theo tính chất 5, chúng phải cùng nằm trên giao tuyến của (P) và (Q). Vậy B, G', O, F thẳng hàng.

3. Cách xác định mặt phẳng

Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng.



Mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C không thẳng hàng, kí hiệu mp(ABC) hay (ABC).

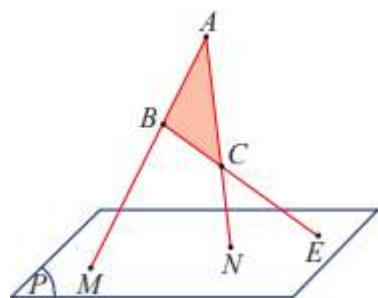
Ví dụ 7: Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và không nằm trong mặt phẳng (P). Biết ba đường thẳng AB, AC, BC lần lượt cắt (P) tại các điểm M, N, E (hình vẽ). Ba điểm M, N, E có thẳng hàng không? Giải thích.

Giải

Gọi (Q) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C. Ta có $M \in AB$ và $AB \subset (Q)$, suy ra $M \in (Q)$.

Mặt khác, $M \in (P)$. Vậy $M \in (P) \cap (Q)$.

Tương tự, ta cũng có $N \in (P) \cap (Q)$ và $E \in (P) \cap (Q)$. Suy ra ba điểm M, N, E thẳng hàng vì cùng nằm trên đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).



Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.

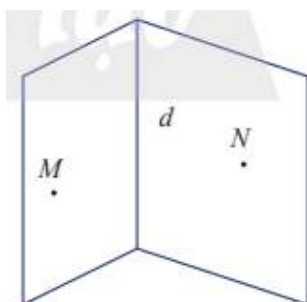


Mặt phẳng xác định bởi điểm A và đường thẳng a không qua điểm A, kí hiệu mp(A, a) hay (A, a).

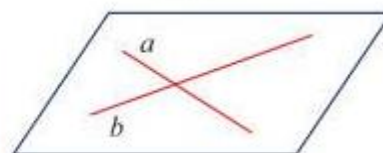
Ví dụ 8: Với đường thẳng d và hai điểm M, N phân biệt không thuộc d, ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

Giải

Với đường thẳng d và điểm M không thuộc d ta xác định được mặt phẳng thứ nhất là (M, d). Nếu điểm N thuộc mặt phẳng (M, d) thì ta chỉ xác định được một mặt phẳng. Nếu điểm N không thuộc (M, d) thì ta chỉ xác định được một mặt phẳng thứ hai là (N, d).



Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

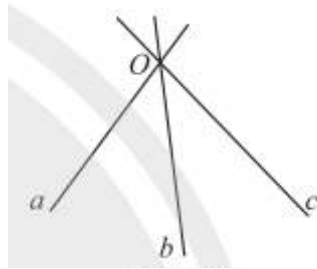


Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng a, b cắt nhau, kí hiệu mp(a, b).

Ví dụ 9: Với ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng đi qua một điểm O, ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

Giải

Từ ba cặp đường thẳng cắt nhau a và b , b và c , c và a , ta xác định được ba mặt phẳng là $mp(a,b)$, $mp(b,c)$, $mp(c, a)$.



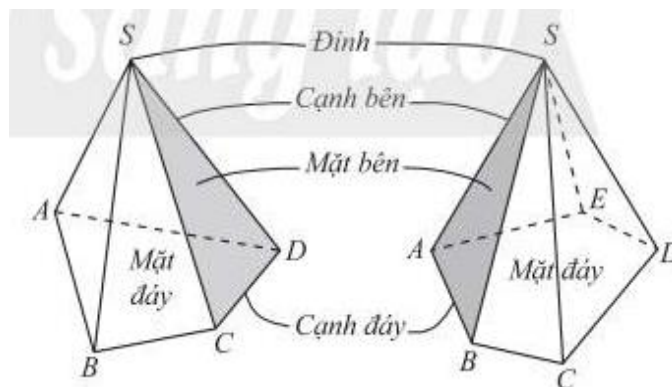
4. Hình chóp và hình tứ diện

Hình chóp

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm S không thuộc (α) . Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình tạo bởi n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là **hình chóp**, kí hiệu $S.A_1A_2...A_n$.

Trong hình chóp $SA_1A_2...A_n$, ta gọi:

- Điểm S là **đỉnh**;
- Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là **các mặt bên**;
- Đa giác $A_1A_2...A_n$ là **mặt đáy**;
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là **các cạnh bên**;
- Các cạnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ là **các cạnh đáy**.

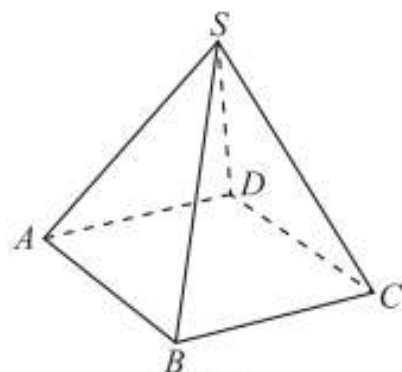


Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ (hình vẽ). Gọi tên các mặt bên, mặt đáy, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp $S.ABCD$.

Giải

Hình chóp $S.ABCD$ có:

- Các mặt bên: SAB, SBC, SCD, SDA ;
- Mặt đáy $ABCD$;



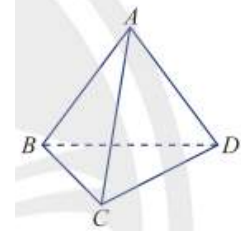
- Các cạnh bên: SA, SB, SC, SD;
- Các cạnh đáy: AB, BC, CD, DA.

Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình tạo bởi bốn tam giác ABC, ACD, ADB và BCD được gọi là **hình tứ diện** (hay **tứ diện**). Kí hiệu ABCD.

Trong hình tứ diện ABCD (hình vẽ), ta gọi:

- Các điểm A, B, C, D là **các đỉnh**.
- Các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, CD, BD là **các cạnh** của tứ diện.
- Hai cạnh không đi qua cùng một đỉnh là **hai cạnh đối diện**.
- Các tam giác ABC, ACD, ADB, BCD là **các mặt** của tứ diện.
- Đỉnh không thuộc một mặt của tứ diện là **đỉnh đối diện** với mặt đó



Ví dụ 11: Gọi tên các mặt, các cặp cạnh đối diện của tứ diện MNPQ (hình vẽ).

Giải

Tứ diện MNPQ có:

- Các mặt: MNP, MPQ, MQN, NPQ.
- Các cặp cạnh đối diện: MN và PQ, MP và NQ, MQ và NP.

Chú ý:

a) Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều được gọi là **hình tứ diện đều**.

b) Một tứ diện có thể xem như là một hình chóp tam giác với đỉnh là một đỉnh tùy ý của tứ diện và đáy là mặt của tứ diện không chứa đỉnh đó.

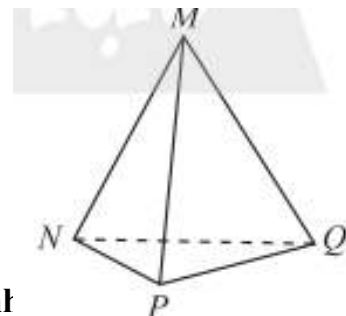
Ví dụ 12: Cho tứ diện SABC. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC.

- Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC);
- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SMN) và (SAC); (SAN) và (SCM).

Giải

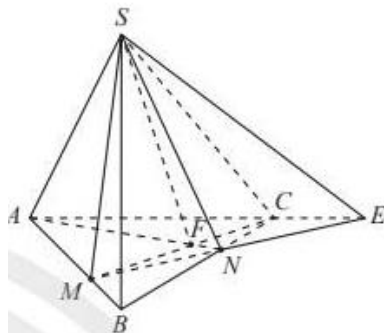
a) Trong mp(ABC), vẽ giao điểm E của MN và AC. Ta có $E \in AC \Rightarrow E \in (SAC)$.

Vậy E giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).



b) Ta có S và E là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC), suy ra $(SMN) \cap (SAC) = SE$.

Trong mp(ABC), vẽ giao điểm F của AN và MC. Ta có S và F là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAN) và (SCM), suy ra $(SAN) \cap (SCM) = SF$.



BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD, gọi O là giao điểm của AC và BD. Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC.

- Chứng minh đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC).
- Chứng minh O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

- Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD). Chứng minh $IA = 2IM$.
- Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM).
- Gọi N là điểm tùy ý trên cạnh AB. Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD).

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC.

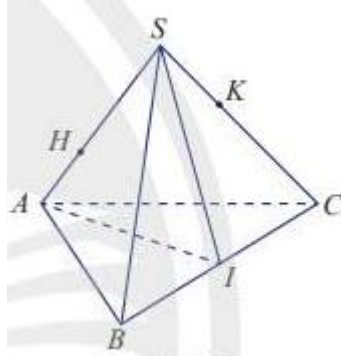
- Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP);
- Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP);
- Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I ($I \neq C$), EG cắt AD tại H ($H \neq D$).

- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (EFG) và (BCD); (EFG) và (ACD);
- Chứng minh ba đường thẳng CD, IG, HF cùng đi qua một điểm.

Bài 5: Cho tứ diện $SABC$. Gọi H, K lần lượt là hai điểm trên hai cạnh SA, SC ($H \neq S, A; K \neq S, C$) sao cho H, K không song song với AC . Gọi I là trung điểm của BC .

- Tìm giao điểm của đường thẳng HK và mặt phẳng (ABC) .
- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAI) và (ABK) ; (SAI) và (BCH) .



BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

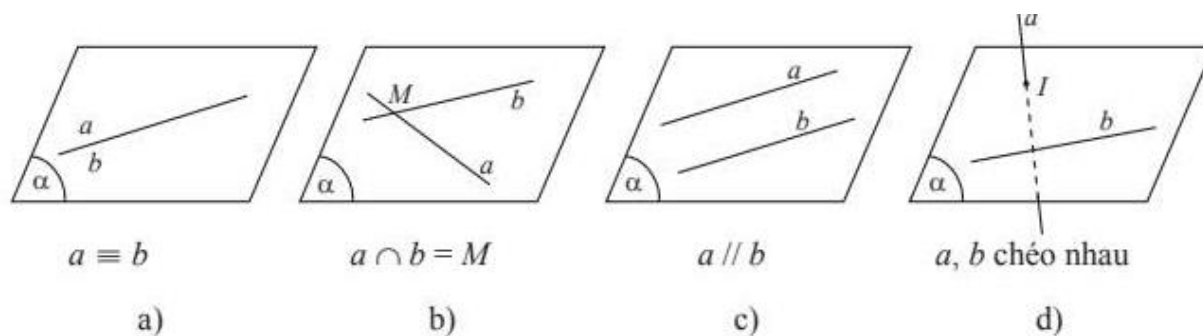
1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong hai trường hợp:

Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa a và b . Khi đó ta nói a và b *đồng phẳng*. Theo kết quả hình học phẳng, có ba khả năng sau đây xảy ra:

- Nếu a và b có hai điểm chung thì ta nói a trùng với b , kí hiệu: $a \equiv b$.
- Nếu a và b có một điểm chung duy nhất M thì ta nói a và b *cắt nhau tại M* , kí hiệu: $a \cap b = M$.
- Nếu a và b không có điểm chung thì ta nói a và b *song song với nhau*, kí hiệu $a \parallel b$.

Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b . Khi đó ta nói hai đường thẳng a và b *chéo nhau* hay a *chéo* b



Hai đường thẳng gọi là **song song** nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.

Chú ý:

- a) Hai đường thẳng gọi là **chéo nhau** nếu chúng không đồng phẳng.
b) Cho hai đường thẳng song song a và b . Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu $mp(a,b)$.

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

- a) MN và BC; b) AN và CD; c) MN và CD.

Giải

- a) Trong mặt phẳng (ABC), MN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $MN \parallel BC$.
b) Trong mặt phẳng (ACD), ta có AN cắt CD tại điểm C.
c) Giả sử MN và CD cùng nằm trong (P), suy ra đường thẳng NC nằm trong (P), suy ra (P) chứa điểm A. Tương tự, ta cũng có AM nằm trong (P), suy ra (P) chứa điểm B.

Suy ra (P) chứa cả bốn đỉnh của tứ diện ABCD. Điều này vô lí.

Vậy hai đường thẳng MN và CD không nằm trong bất kì mặt phẳng nào, suy ra MN chéo với CD.

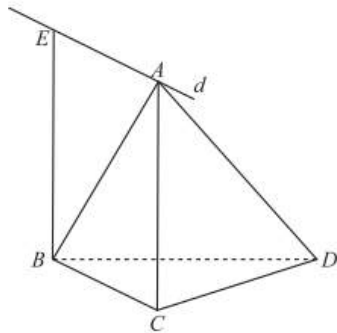
2. Tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song

Định lí 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

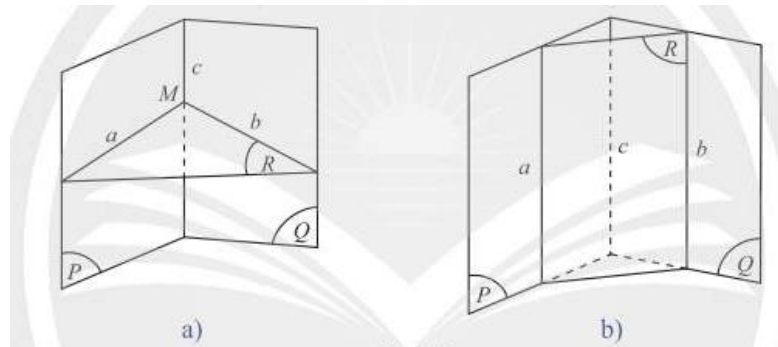
Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD. Trong mặt phẳng (ABC). Vẽ hình bình hành ACBE. Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua A và song song với BC. Chứng minh điểm E thuộc đường thẳng d.

Giải

Ta có ACBE là hình bình hành, suy ra $AE \parallel BC$. Do đó, trong không gian chỉ có duy nhất một đường thẳng đi qua A và song song với BC, suy ra AE phải trùng d, vậy điểm E phải thuộc d.

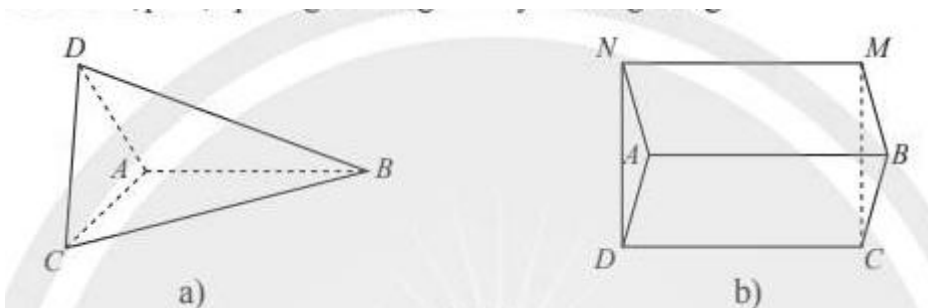


Định lý 2: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.



Ví dụ 3: a) Trong hình a, hai tam giác ABC và ABD không cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến đồng quy.

b) Trong hình b, hai hình bình hành ABCD và ABMN không cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến song song.



Giải

a) Trong hình a, ta có:

$$(BAC) \cap (BAD) = BA; (BAC) \cap (BCD) = BC; (BCD) \cap (BAD) = BD.$$

Ba giao tuyến vừa nêu đồng quy tại B. Vậy ba cặp mặt phẳng có giao tuyến đồng quy là

(BAC) và (BAD) ; (BAC) và (BCD) ; (BCD) và (BAD) .

b) Trong hình b, ta có

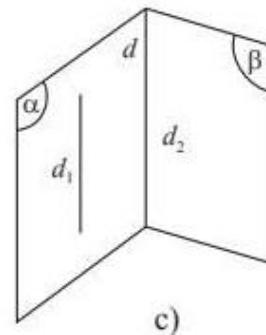
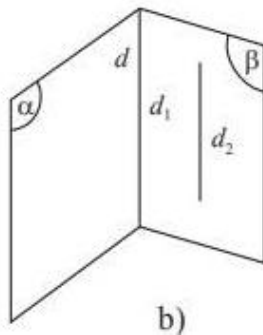
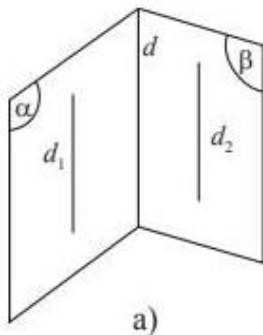
$$(ABCD) \cap (ABMN) = AB; (ABCD) \cap (CDNM) = CD; (CDNM) \cap (ABMN) = MN.$$

Ta có $AB \parallel CD \parallel MN$. Vậy ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến song song là $(ABCD)$ và $(ABMN)$; $(ABCD)$ và $(CDNM)$; $(CDNM)$ và $(ABMN)$.

Hệ quả:



Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

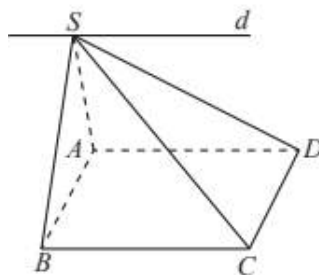


Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$$

Theo hệ quả của Định lý 2, giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD .

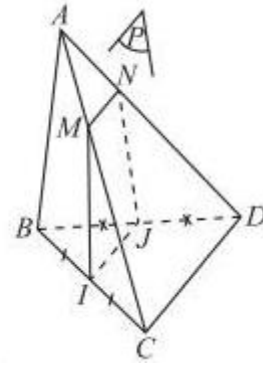


Định lý 3: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Ví dụ 5:

Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N .

- Chứng minh $IJNM$ là một hình thang.
- Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.



Giải

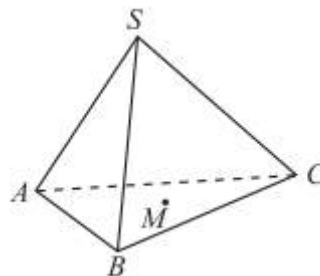
$$\text{a) Ta có: } \left. \begin{array}{l} (P) \cap (BCD) = IJ \\ (P) \cap (ACD) = MN \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \\ IJ \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel IJ \parallel CD$$

Xét tứ giác $IJNM$ có: $MN \parallel IJ$ nên $IJNM$ là một hình thang.

- Để $IJNM$ là hình bình hành thì $MN = IJ$. Ta có $IJ = \frac{1}{2}CD$ (vì IJ là đường trung bình của tam giác BCD) nên $MN = \frac{1}{2}CD$ và $MN \parallel CD$ nên MN là đường trung bình của tam giác ACD . Khi đó, M là trung điểm của AC .

BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC (hình vẽ). Qua M , vẽ đường thẳng d song song với SA , cắt (SBC) tại N . Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN) .



Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB) .
- Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N . Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

Bài 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD . Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx . Chứng minh rằng $Cx \parallel SB$.

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm của SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N .

- a) Hãy nói cách xác định hai điểm M và N . Cho $AB = a$. Tính MN theo a .
 b) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM . Chứng minh $SK \parallel BC \parallel AD$

Bài 5: Chỉ ra các đường thẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các đường thẳng song song trong thực tế.



a)



b)



c)



d)



e)



g)

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

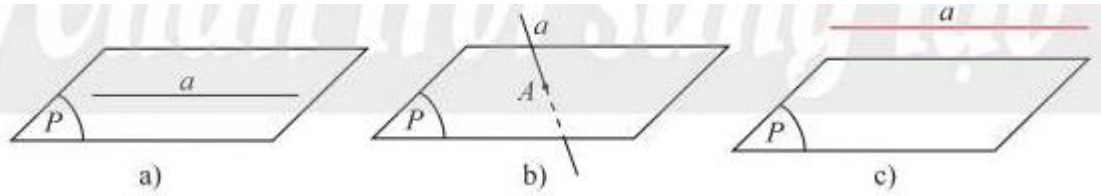
1. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Khi đó, có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: a và (P) có từ hai điểm chung phân biệt trở lên (Hình a), suy ra mọi điểm thuộc a đều thuộc (P) , ta nói a nằm trong (P) , kí hiệu $a \subset (P)$.

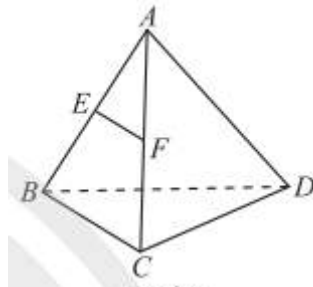
Trường hợp 2: a và (P) có một điểm chung duy nhất A (Hình b), ta nói a cắt (P) tại A , kí hiệu $a \cap (P) = A$.

Trường hợp 3: a và (P) không có điểm chung nào (Hình c), ta nói a song song với (P) , kí hiệu $a \parallel (P)$.



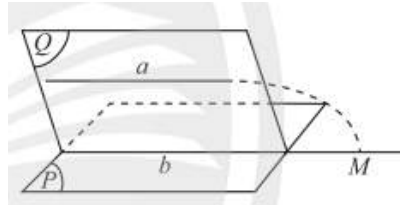
Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu chúng không có điểm chung.

Ví dụ 1: Cho E và F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC của tứ diện $ABCD$. Xác định vị trí tương đối của các đường thẳng BC , AD và EF với mặt phẳng (BCD) .

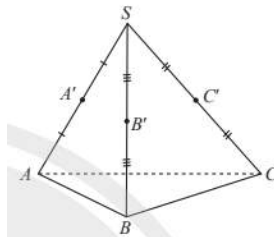


2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Định lý 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) song song với một đường thẳng b nào đó nằm trong (P) thì a song song với (P) .

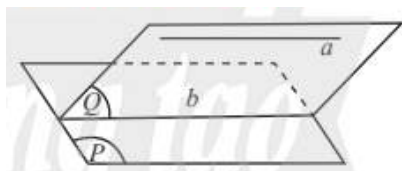


Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có A' , B' , C' lần lượt là trung điểm của SA , SB , SC . Tìm các đường thẳng lần lượt nằm trong , cắt, song song với mặt phẳng (ABC) .



3. Tính chất cơ bản của đường thẳng và mặt phẳng song song

Định lý 2: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a , cắt (P) theo giao tuyến b thì a song song với b .

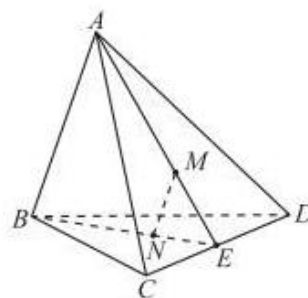


Ví dụ 3: Cho tứ diện ABCD có M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD (Hình vẽ). Chứng minh đường thẳng MN song song với các mặt phẳng (CAB) và (DAB).

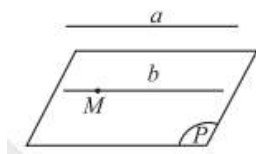
Giải

Gọi E là trung điểm của CD. Do M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD nên ta có $\frac{EM}{EA} = \frac{EN}{EB} = \frac{1}{3}$, suy ra $MN \parallel AB$.

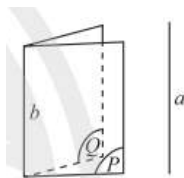
Đường thẳng MN không nằm trong (CAB) và song song với đường thẳng AB nằm trong (CAB), suy ra $MN \parallel (CAB)$. Tương tự ta cũng có $MN \parallel (DAB)$.



Hệ quả 1: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P).



Hệ quả 2: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



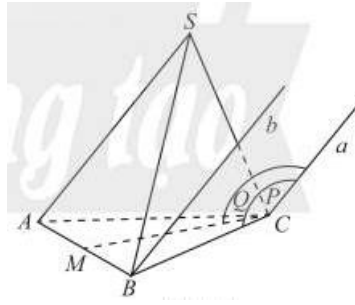
Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC có M là trung điểm của AB. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với SA, (Q) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) ;
- Vẽ đường thẳng b qua B và $b \parallel SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

Giải

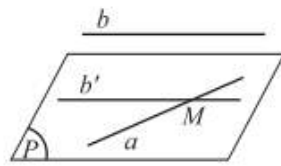
a) Ta có: $\begin{cases} (P) \cap (Q) = C \\ (P) \parallel SA, (Q) \parallel SA \end{cases} \Rightarrow$ Giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng a đi qua C và $a \parallel SA$.

b) Ta có: $SA \parallel (P)$ và B thuộc (P), b là đường thẳng đi qua B và $b \parallel SA \Rightarrow b \subset (P)$.



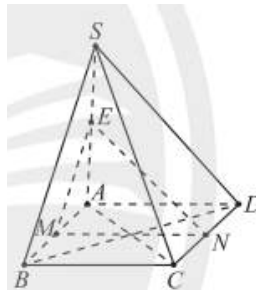
■ **Mặt phẳng đi qua một trong hai đường thẳng chéo nhau và song song với đường thẳng còn lại**

Định lý 3: Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a , có một và chỉ một mặt phẳng song song với b .



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, SA (Hình vẽ). Chứng minh rằng:

- MN song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) ;
- SB và SC song song với mặt phẳng (MNE) .



BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC .

- Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA) ;
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Bài 2: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$.

- Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng $(CDEF)$, (ADF) và (BCE) ;
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và BE . Chứng minh $MN \parallel (CDEF)$;

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và (ABCD).

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của CD, (P) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC. Tìm giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp S.ABCD.

Bài 4: Mô tả vị trí tương đối của các đường thẳng a, b, c, d, e với mặt phẳng (P) là mặt trước của tòa nhà (Hình vẽ).



Bài 5: Cho tứ diện ABCD và điểm M thuộc cạnh AB. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng BC và AD. Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB.

- Chứng minh MNPQ là hình bình hành.
- Trong trường hợp nào thì MNPQ là hình thoi?

BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

1. Hai mặt phẳng song song

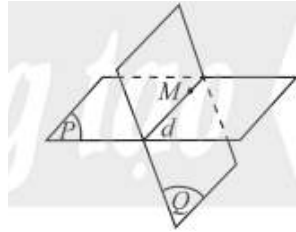
Định nghĩa: Hai mặt phẳng được gọi là **song song** với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q), có thể xảy ra một trong ba trường hợp:

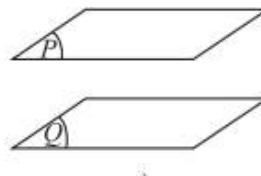
Trường hợp 1: (P) và (Q) có 3 điểm chung không thẳng hàng, ta nói hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau, kí hiệu $(P) \equiv (Q)$.



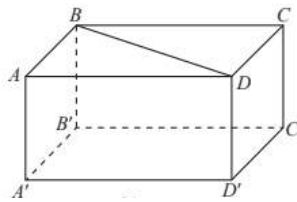
Trường hợp 2: (P) và (Q) phân biệt và có một điểm chung, ta nói (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d đi qua điểm chung, kí hiệu $(P) \cap (Q) = d$.



Trường hợp 3: (P) và (Q) không có bất kì điểm chung nào, nghĩa là $(P) \cap (Q) = \emptyset$, ta nói (P) và (Q) song song với nhau, kí hiệu: $(P) \parallel (Q)$ hoặc $(Q) \parallel (P)$.



Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D' (Hình vẽ). Quan sát và chỉ ra các cặp mặt phẳng song song với nhau?



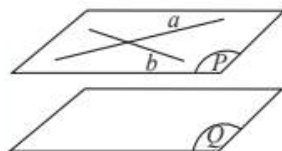
Giải

Các cặp mặt phẳng song song với nhau ở hình trên là:

$(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$; $(AA'B'B)$ và $(DD'C'C)$; $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$

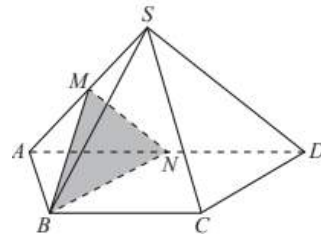
2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Định lí 1: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và hai đường thẳng đó cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).



Chú ý: Nếu A, B, C không thẳng hàng và $AB \parallel MN$ và $AC \parallel MP$ thì $(ABC) \parallel (MNP)$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và AD (Hình vẽ). Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BMN) và (SCD) song song với nhau.



Giải

Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD , suy ra $MN \parallel SD$,

do đó $MN \parallel (SCD)$. (1)

Tứ giác $BCDN$ có $BC \parallel ND$ và $BC = ND$ nên là hình bình hành, suy ra $BN \parallel CD$,

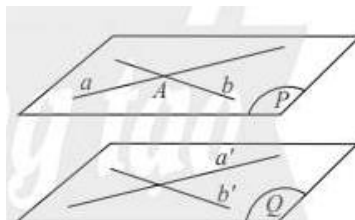
do đó $BN \parallel (SCD)$. (2)

Mặt khác ta có MN và BN cùng chứa trong (BMN) , $MN \cap BN = N$. (3)

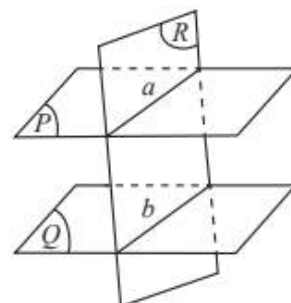
Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $(BMN) \parallel (SCD)$.

3. Tính chất của hai mặt phẳng song song

Định lý 2: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.



Định lý 3: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Nếu (R) cắt (P) thì cắt (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.



Ví dụ 3: Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành ABCD. Vẽ các nửa đường thẳng song song với nhau, nằm về một phía đối với (P) và lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'.

- Chứng minh mp(AA', BB') song song với mp(CC', DD');
- Chứng minh tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành;
- Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của ABCD và A'B'C'D'. Chứng minh $OO' \parallel AA'$.

Giải

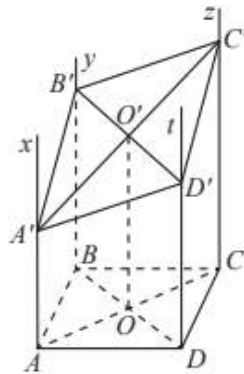
a) Ta có $AB \parallel CD$, $AA' \parallel DD'$, suy ra mp(AA', BB') $\parallel$ mp(CC', DD').

b) Mặt phẳng (P) cắt hai mặt phẳng song song mp(AA', BB') và mp(CC', DD') theo hai giao tuyến A'B' và C'D', suy ra $A'B' \parallel C'D'$.

Tương tự ta cũng có $A'D' \parallel B'C'$.

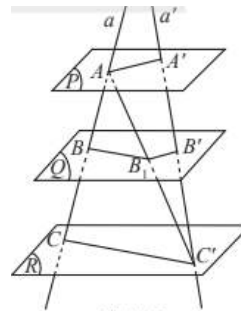
Tứ giác A'B'C'D' có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành.

c) Hai mặt phẳng (AA'C'C) và (BB'D'D) lần lượt đi qua hai đường thẳng song song AA', DD' và cắt nhau theo giao tuyến OO', suy ra $OO' \parallel AA'$.



4. Định lý Thales trong không gian

Định lý 4(Định lý Thales): Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Ví dụ 4: Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một song song. Hai đường thẳng d và d' cắt ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt tại A, B, C và A', B', C' . Cho $AB = 3$, $BC = 7$, $A'C' = 20$. Tính độ dài $A'B', B'C'$.

Giải

Áp dụng định lý Thalès trong không gian đối với ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R) và hai cát tuyến d, d' , ta có:

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{7}, \text{ suy ra } \frac{A'B'}{3} = \frac{B'C'}{7} = \frac{A'B' + B'C'}{3 + 7} = \frac{A'C'}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Suy ra $A'B' = 6$; $B'C' = 14$.

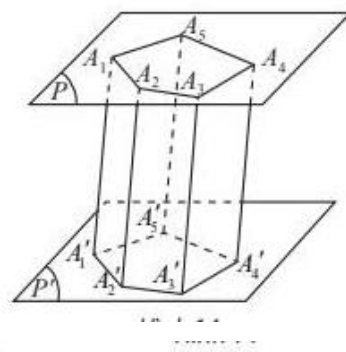
5. Hình lăng trụ và hình hộp

Hình lăng trụ

Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song với nhau. Trên (P) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh của đa giác này, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (P') lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Hình tạo bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, ..., A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n, A'_1A'_2...A'_n$ gọi là **hình lăng trụ**, kí hiệu $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.

Trong hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$, ta gọi:

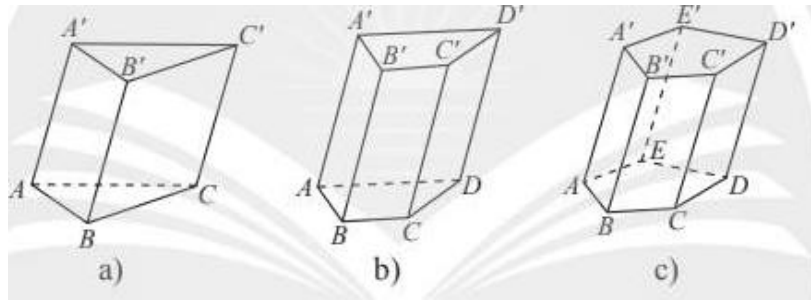
- Hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ là hai **mặt đáy** nằm trên hai mặt phẳng song song;
- Các điểm $A_1, A_2, ..., A_n, A'_1, A'_2, ..., A'_n$ là các **đỉnh**;
- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, ..., A_nA_1A'_1A'_n$ là các **mặt bên**;
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, ..., A_nA'_n$ là các **cạnh bên**. Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- Các cạnh của hai đa giác đáy là các **cạnh đáy**. Các cạnh đáy tương ứng song song và bằng nhau.



Chú ý: Hình lăng trụ có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác, ...

Ví dụ 5:

- Gọi tên các hình lăng trụ trong hình;
- Gọi tên các thành phần của hình lăng trụ trong hình a).



Giải

a) Hình a là hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

Hình b là hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$.

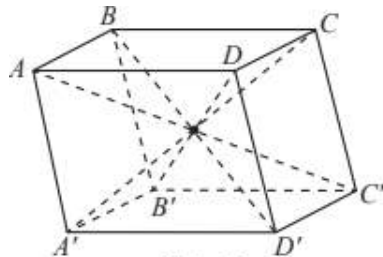
Hình c là hình lăng trụ ngũ giác $ABCDE.A'B'C'D'E'$.

b) Hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ trong hình a có:

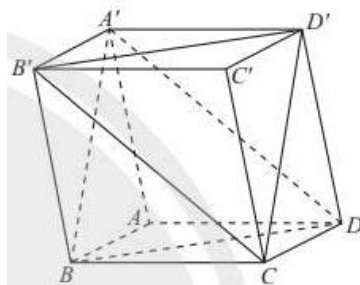
- Hai mặt đáy là các tam giác $ABC, A'B'C'$.
- Sáu đỉnh: A, B, C, A', B', C' ;
- Ba mặt bên là các hình bình hành: $AA'B'B, BB'C'C, CC'A'A$;
- Ba cạnh bên: AA', BB', CC' ;

Hình hộp

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.



Ví dụ 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh $(BD.A')$ và $(B'D'C)$ là các mặt phẳng song song.



Giải

Ta có: $BB' \parallel DD'$ và $BB' = DD'$, suy ra $BB'D'D$ là hình bình hành, do đó $BD \parallel B'D'$

Tương tự ta cũng có $A'B \parallel D'C$.

Từ đó suy ra $(BD.A') \parallel (B'D'C)$.

BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi E là trung điểm của AB và F là một điểm thuộc ON . Chứng minh EF song song với (SBC) .

Bài 2: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N' .

a) Chứng minh $(CBE) \parallel (ADF)$.

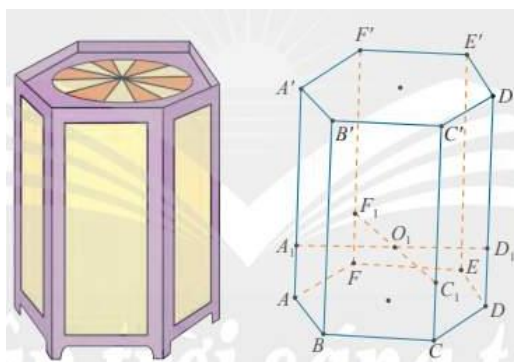
b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

Bài 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác BAD' và $B'D'C$. Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Bài 4: Để làm một khung đèn lồng kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (Hình vẽ).

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (A_1D_1, F_1C_1) với các mặt bên của lăng trụ.

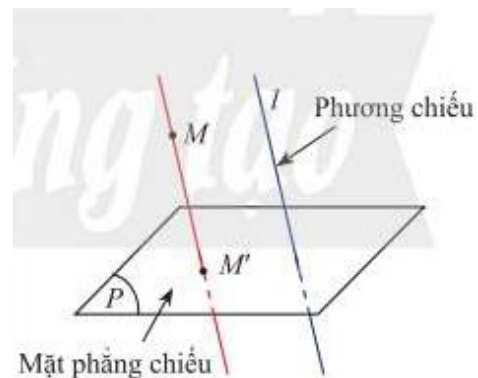
b) Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70\text{cm}$. Tính CC_1 và C_1C' .



BÀI 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

1. Khái niệm phép chiếu song song

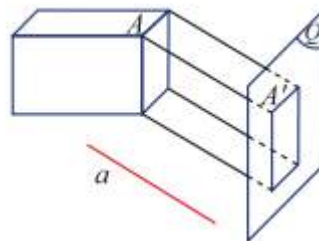
Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P). Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l . Đường thẳng này cắt (P) tại M' . Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là **phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l** .



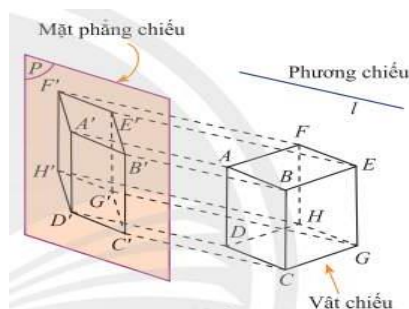
Mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng chiếu** và đường thẳng l được gọi là **phương chiếu**.

Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép chiếu theo phương l .

Ví dụ 1: Tìm phương chiếu, mặt phẳng chiếu của phép chiếu song song được mô tả trong hình vẽ sau:



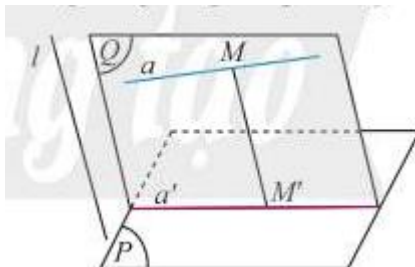
Ví dụ 2: Tìm ảnh của hình hộp ABEF.DCGH qua phép chiếu song song được mô tả trong hình vẽ sau:



2. Các tính chất cơ bản của phép chiếu song song

Tính chất 1:

Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng. Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng. Hình chiếu song song của một tia là một tia.



Tính chất 2:

Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

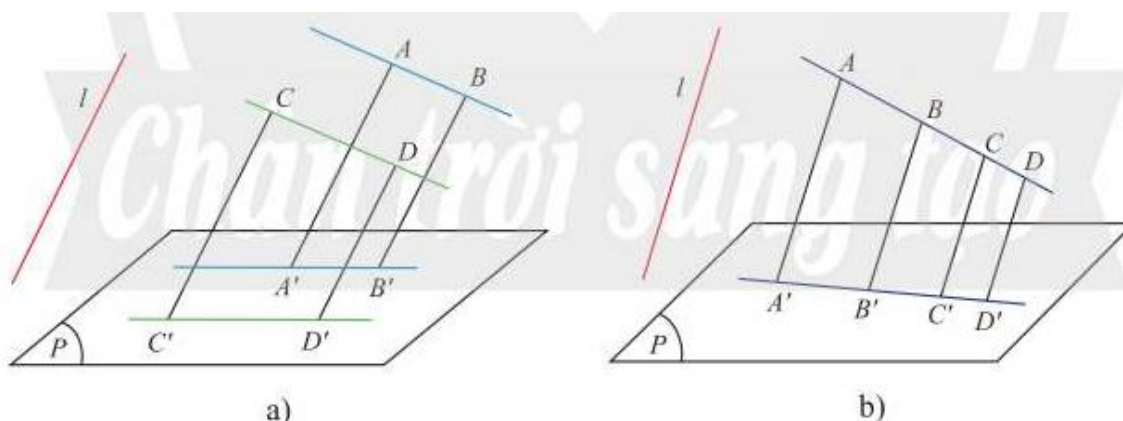
Tính chất 3:

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Ví dụ 3: a) Tìm hình chiếu song song của đoạn thẳng AC, tia AB và đường thẳng AD trong hình b;

b) Quan sát hình a và so sánh hai tỉ số $\frac{AB}{CD}$, $\frac{A'B'}{C'D'}$;

c) Quan sát hình b và so sánh hai tỉ số $\frac{DA}{DB}$, $\frac{D'A'}{D'B'}$;



Giải

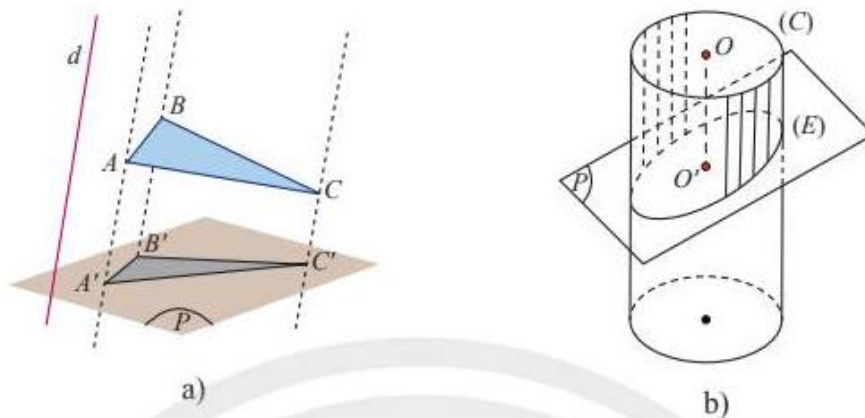
- a) Trong hình b, hình chiếu song song của đoạn thẳng AC, tia AB và đường thẳng AD lần lượt là đoạn thẳng $A'C'$, tia $A'B'$ và đường thẳng $A'D'$.
- b) Do phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của các đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song nên trong hình a, ta có $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$;
- c) Do phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của các đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song nên trong hình b, ta có $\frac{DA}{DB} = \frac{D'A'}{D'B'}$;

3. Hình biểu diễn của một hình không gian

Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Ví dụ 4: Quan sát hình vẽ và tìm hình biểu diễn của:

- a) đoạn thẳng AB; b) tam giác ABC; c) đường tròn (C) tâm O.



Giải

- a) Hình biểu diễn của đoạn thẳng AB là đoạn thẳng $A'B'$ với A', B' lần lượt là ảnh của A, B.
- b) Hình biểu diễn của tam giác ABC là tam giác $A'B'C'$ với A', B', C' là ảnh của A, B, C.
- c) Hình biểu diễn của đường tròn (C) là elip (E) với tâm O' là ảnh của O.

Ví dụ 5: Vẽ hình biểu diễn và nêu nhận xét về hình biểu diễn của các mặt của các hình sau:

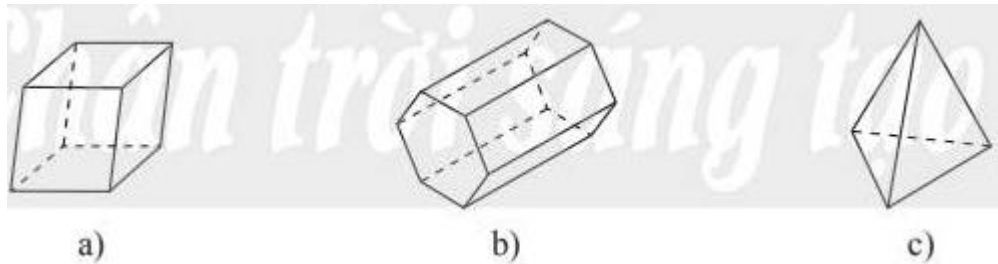
- a) Hình hộp; b) Lăng trụ có đáy là lục giác đều; c) Tứ diện.

Giải

- a) Hình biểu diễn của các mặt là các hình bình hành.

b) Hình biểu diễn của mặt đáy là lục giác có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau, đồng thời song song với đường chéo nối hai đỉnh còn lại. Hình biểu diễn của mặt bên là hình bình hành.

c) Hình biểu diễn của bốn mặt là bốn tam giác.



BÀI TẬP

Bài 1: Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

Bài 2: Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một hình tròn.

Bài 3: Cho hai điểm A, B nằm ngoài mặt phẳng (α) và đường thẳng d cắt (α) . Giả sử đường thẳng AB cắt (α) tại điểm O . Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu song song của A, B trên (α) theo phương của đường thẳng d . Ba điểm O, A', B' có thẳng hàng không? Vì sao? Chọn d sao cho:

a) $A'B' = AB$;

b) $A'B' = 2AB$;

Bài 4: Vẽ hình biểu diễn của:

a) Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều;

b) Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều;

c) Hình hộp.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

Bài 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AB, A'B'$ và O là một điểm thuộc miền trong của mặt bên $CC'D'D$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (OMN) với các mặt của hình hộp.

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tam giác SAD đều. M là điểm trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng qua M và $(\alpha) \parallel (SAD)$ cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q .

- a) Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình thang cân.
- b) Đặt $AM = x$, tính diện tích $MNPQ$ theo a và x .

Bài 3: Cho hai bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC và BF sao cho $MC = 2MA; NF = 2NB$. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB , cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1 . Chứng minh rằng:

- a) $MN \parallel DE$;
- b) $M_1N_1 \parallel (DEF)$
- c) $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$.

CHƯƠNG V. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

Học xong chương này, sinh viên có thể:

- Tính được các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm: số trung bình cộng (số trung bình), trung vị, tứ phân vị, mốt.
- Hiểu được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn.
- Rút ra được kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản.
- Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong chương trình toán và trong thực tiễn.

BÀI 1. SỐ TRUNG BÌNH VÀ MỐT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

1. Số liệu ghép nhóm

Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Chú ý:

- Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \leq j \leq k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.
- Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm **giá trị đại diện** cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.
- Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là **độ dài** của nhóm $[u_j; u_{j+1})$.

Ví dụ 1: Cho bảng thống kê về số lượng khách hàng nữ theo độ tuổi sau:

Khoảng tuổi	$[20; 30)$	$[30; 40)$	$[40; 50)$	$[50; 60)$	$[60; 70)$
Số khách hàng nữ	3	?	?	?	?

Tính giá trị đại diện và độ dài của mỗi nhóm?

Giải

Khoảng tuổi	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Giá trị đại diện	25	35	45	55	65
Độ dài của nhóm	10	10	10	10	10

Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu:

- Sử dụng từ $k=5$ đến $k=20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu.

Các nhóm có cùng độ dài bằng L thỏa mãn $R < k.L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

- Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

Ví dụ 2. Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho như sau:

55,4 62,6 54,2 56,8 58,8 59,4 60,7 58 59,5 63,6 61,8 52,3 63,4 57,9
49,7 45,1 56,2 63,2 46,1 49,6 59,1 55,3 55,8 45,5 46,8 54 49,2 52,6

Hãy chia mẫu dữ liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

Giải

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 63,6 - 45,1 = 18,5$.

Độ dài mỗi nhóm $L > \frac{R}{k} = \frac{18,5}{5} = 3,7$.

Ta chọn $L = 4$ và chia dữ liệu thành các nhóm $[45; 49)$, $[49; 53)$, $[53; 57)$, $[57; 61)$, $[61; 65)$.

Khi đó ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Cân nặng	[45; 49)	[49; 53)	[53; 57)	[57; 61)	[61; 65)
Giá trị đại diện	47	51	55	59	63
Số học sinh	4	5	7	7	5

Chú ý:

- Các đầu mút của các nhóm có thể không là giá trị của mẫu số liệu.
- Ta hay gặp các bảng số liệu ghép nhóm là số nguyên, chẳng hạn như bảng thống kê số lỗi chính tả trong bài kiểm tra giữa học kỳ 1 môn Ngữ Văn của học sinh khối 11 như sau:

Số lỗi	[1; 2]	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
Số bài	122	75	14	5	2

Bảng số liệu này không có dạng như Bảng 1. Để thuận lợi cho việc tính các số đặc trưng cho bảng số liệu này, người ta hiệu chỉnh về dạng như Bảng 1 bằng cách thêm và bớt 0,5 đơn vị vào đầu mút bên phải và bên trái của mỗi nhóm số liệu như sau:

Số lỗi	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số bài	122	75	14	5	2

2. Số trung bình

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính như sau:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \cdot c_1 + n_2 \cdot c_2 + \dots + n_k \cdot c_k}{n}$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Ví dụ 3. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

- Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.
- Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

Giải

Ta có bảng thống kê số lượng cam theo giá trị đại diện:

Cân nặng đại diện (g)	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

- Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A xấp xỉ bằng
 $(2 \cdot 152,5 + 6 \cdot 157,5 + 12 \cdot 162,5 + 4 \cdot 167,5 + 1 \cdot 172,5) : 25 = 161,7$ (g).
Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng B xấp xỉ bằng
 $(1 \cdot 152,5 + 3 \cdot 157,5 + 7 \cdot 162,5 + 10 \cdot 167,5 + 4 \cdot 172,5) : 25 = 165,1$ (g).
- Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng B nặng hơn cam ở lô hàng A.

Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

3. Mốt

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó **mốt của mẫu số liệu ghép nhóm**, kí hiệu là M_0 được xác định bởi công thức:

$$M_0 = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

Chú ý: Nếu không có nhóm kế trước của nhóm chứa một thì $n_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kế sau của nhóm chứa một thì $n_{m+1} = 0$.

Ví dụ 4. Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/m ²)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

- a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

Giải

a) Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm [18; 22).

Do đó $u_m = 18$, $n_{m-1} = 78$, $n_m = 120$, $n_{m+1} = 45$, $u_{m+1} - u_m = 22 - 18 = 4$.

Một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 18 + \frac{120 - 78}{(120 - 78) + (120 - 45)} \cdot 4 = \frac{758}{39} \approx 19,4.$$

- b) Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán rằng nếu công ty xây nhà ở mức giá 19,4 triệu đồng/m² thì sẽ có nhiều người có nhu cầu mua đất.

Ví dụ 5. Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3; 5]	[6; 8]	[9; 11]	[12; 14]	[15; 17]
Số ngày	5	13	7	3	2

- a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
b) Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

Giải

Do số cuộc gọi là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số cuộc gọi	[2,5; 5,5)	[5,5; 8,5)	[8,5; 11,5)	[11,5; 14,5)	[14,5; 17,5)
Số ngày	5	13	7	3	2

a) Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm [5,5; 8,5).

Do đó $u_m = 5,5$, $n_{m-1} = 5$, $n_m = 13$, $n_{m+1} = 7$, $u_{m+1} - u_m = 8,5 - 5,5 = 3$.

Một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 5,5 + \frac{13 - 5}{(13 - 5) + (13 - 7)} \cdot 3 = \frac{101}{14} \approx 7,2.$$

- b) Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán rằng khả năng người đó thực hiện 7 cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

Ý nghĩa của một của mẫu số liệu ghép nhóm

- Một của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Một của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_o xấp xỉ với một của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_o thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.
- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa một và nhiều một.

BÀI TẬP

Bài 1: Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét)

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

- a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.
b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	[69,2; 70)	[70; 70,8)	[70,8; 71,6)	[71,6; 72,4)	[72,4; 73,2)
Số lần	?	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.
d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

Bài 2: Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

15	16	13	21	17	23	15	21	6	11	12	23	19	25	11
25	7	29	10	28	29	24	6	11	23	11	21	9	27	15

- a) Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.
b) Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số xe	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số lần	?	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng trung bình số xe đi qua trạm thu phí trong mỗi phút từ bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài 3: Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

BÀI 2. TRUNG VỊ VÀ TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Trung vị

Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Gọi n là cỡ mẫu;
- Giả sử $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó, trung vị được tính bởi công thức:

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

Ví dụ 1: Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Giải

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{25}$ là cân nặng của 25 quả bơ xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1 \in [150; 155); x_2, \dots, x_8 \in [155; 160); x_9, \dots, x_{20} \in [160; 165)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{25}$ là $x_{13} \in [160; 165)$.

Ta xác định được $n = 25, n_m = 12, C = 1 + 7 = 8, u_m = 160, u_{m+1} = 165$.

Vậy trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 160 + \frac{\frac{25}{2} - 8}{12} \cdot (165 - 160) = 161,875.$$

Ví dụ 2: Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau:

Số vỏ chai nhựa	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Giải

Do số vỏ chai là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số vỏ chai nhựa	[10,5; 15,5)	[15,5; 20,5)	[20,5; 25,5)	[25,5; 30,5)	[30,5; 35,5)
Số học sinh	53	82	48	39	18

Số học sinh tham gia thu nhặt vỏ chai nhựa là

$$n = 53 + 82 + 48 + 39 + 18 = 240.$$

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{240}$ lần lượt là số vỏ chai 240 học sinh khối 11 thu nhặt được xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1, \dots, x_{53} \in [10,5; 15,5); x_{54}, \dots, x_{135} \in [15,5; 20,5)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{240}$ là

$$\frac{1}{2}(x_{120} + x_{121}) \in [15,5; 20,5).$$

Ta xác định được $n = 240, n_m = 82, C = 53, u_m = 15,5, u_{m+1} = 20,5$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 15,5 + \frac{\frac{240}{2} - 53}{82} \cdot (20,5 - 15,5) = \frac{803}{41} \approx 19,59.$$

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

2. Tứ phân vị

Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2 , cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1 , ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó



$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Tương tự, để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3 , ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_j; u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba;
- n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{j-1}$.

Khi đó,

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot (u_{j+1} - u_j).$$

Ví dụ 3: Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu

Giải

Nhắc lại: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{39}$ là thời gian luyện tập của 39 vận động viên.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{39}$ là $x_{20} \in [4; 6)$. Do đó tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_2 = 4 + \frac{\frac{2 \cdot 39}{4} - (3+8)}{12} \cdot (6-4) = \frac{65}{12} \approx 5,417.$$

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{39}$ là $x_{10} \in [2; 4)$. Do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 2 + \frac{\frac{1 \cdot 39}{4} - 3}{8} \cdot (4-2) = \frac{59}{16} = 3,6875.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{39}$ là $x_{30} \in [6; 8)$. Do đó tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 6 + \frac{\frac{3 \cdot 39}{4} - (3+8+12)}{12} \cdot (8-6) = \frac{169}{24} \approx 7,042.$$

Chú ý: Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó x_m và x_{m+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$ thì ta lấy $Q_k = u_j$.

Ví dụ 4: Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau:

- a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
b) Một người cho rằng có trên 25% xe của hãng gặp không ít hơn 4 sự cố về động cơ trong 2 năm sử dụng đầu tiên. Nhận định trên có hợp lý không?

Giải

a) Do số lần gặp sự cố là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số lần gặp sự cố	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số xe	17	33	25	20	5

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có $x_1, \dots, x_{17} \in [0,5; 2,5)$; $x_{18}, \dots, x_{50} \in [2,5; 4,5)$; $x_{51}, \dots, x_{75} \in [4,5; 6,5)$; $x_{76}, \dots, x_{95} \in [6,5; 8,5)$; $x_{96}, \dots, x_{100} \in [8,5; 10,5)$.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{50} + x_{51})$. Do $x_{50} \in [2,5; 4,5)$ và $x_{51} \in [4,5; 6,5)$ nên tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_2 = 4,5$.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26})$. Do x_{25} và x_{26} thuộc nhóm $[2,5; 4,5)$ nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 2,5 + \frac{\frac{1 \cdot 100}{4} - 17}{33} \cdot (4,5 - 2,5) = \frac{197}{66} \approx 2,98.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76})$. Do $x_{75} \in [4,5; 6,5)$ và $x_{76} \in [6,5; 8,5)$ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 6,5$.

b) Do tứ phân vị thứ nhất $Q_1 \approx 2,98$ nên nhận định trên là hợp lý.

Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau. Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

BÀI TẬP

Bài 1: Lương tháng của một số nhân viên một văn phòng được ghi lại như sau: (đơn vị: triệu đồng)

12,5	9,6	11,7	12,7	10,0	10,0	12,2	9,8	10,9	6,7	13,6	9,2
13,1	6,5	10,7	8,9	11,2	13,2	8,3	11,1	11,9	8,4	6,7	13,8

a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Lương tháng (triệu đồng)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số nhân viên	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài 2: Số điểm một cầu thủ bóng rổ ghi được trong 20 trận đấu được cho ở bảng sau:

25	23	21	13	8	14	15	18	22	11
24	12	14	14	18	6	8	25	10	11

a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Bài 3: Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiêu do một hãng sản xuất thu được kết quả sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

Hãy ước lượng số trung bình, một và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 4: Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở biểu đồ dưới đây (đơn vị: kg)



a) Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.

b) Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của cân nặng lợn con mới sinh giống A và của cân nặng lợn con mới sinh giống B.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

Bài 1: Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5; 7)	[7; 7,5)	[7,5; 8)	[8; 8,5)	[8,5; 9)	[9; 9,5)	[9,5; 10)
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 2: Để kiểm tra thời gian sử dụng pin của chiếc điện thoại mới, chị An thống kê thời gian sử dụng điện thoại của mình từ lúc sạc đầy pin cho đến khi hết pin ở bảng sau:

Thời gian sử dụng (giờ)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)	[15; 17)
Số lần	2	5	7	6	3

- Hãy ước lượng thời gian sử dụng trung bình từ lúc chị An sạc đầy pin điện thoại cho tới khi hết pin.
- Chị An cho rằng có khoảng 25% số lần sạc điện thoại chỉ dùng được dưới 10 giờ. Nhận định của chị An có hợp lí không?

Bài 3: Tổng lượng mưa trong tháng 8 đo được tại một trạm quan trắc đặt tại Vũng Tàu từ năm 2002 đến năm 2020 được ghi lại như dưới đây (đơn vị: mm):

121,8 158,3 334,9 200,9 165,6 161,5 194,3 220,7 189,8 234,2
165,9 165,9 134 173 169 189 254 168 255

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

- Xác định số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu trên.
- Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Tổng lượng mưa trong tháng 8 (mm)	[120; 175)	[175; 230)	[230; 285)	[285; 340)
Số năm	?	?	?	?

- Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

CHƯƠNG VI. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Mục tiêu:

Sau khi học xong chương này, sinh viên có thể:

- Nhận biết phép tính lũy thừa với số mũ thực, phép tính lôgarit; sử dụng các tính chất của phép tính lũy thừa, phép tính lôgarit trong tính toán, rút gọn biểu thức; tính giá trị của biểu thức chứa lũy thừa, lôgarit bằng máy tính cầm tay.
- Vận dụng phép tính lũy thừa, phép tính lôgarit trong tính toán, giải quyết các vấn đề trong môn học và trong thực tiễn.
- Nhận biết hàm số mũ và hàm số lôgarit; vẽ đồ thị và nhận biết tính chất của các hàm số này; vận dụng vào giải quyết các vấn đề trong các môn học khác và trong thực tiễn.
- Giải phương trình, bất phương trình mũ, lôgarit đơn giản; vận dụng vào giải quyết các vấn đề trong các môn học khác và trong thực tiễn.

BÀI 1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Định nghĩa: Với số nguyên dương n , số thực $a \neq 0$, **lũy thừa** của a với số mũ $-n$ xác định

bởi
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

☞ **Chú ý:** a) $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$;

b) 0^0 và 0^{-n} (với $n > 0$) không có nghĩa.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) 2^{-4} ; b) $9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : (\sqrt{3})^0$.

Giải

a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$;

b) $9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = 9 \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 9 \cdot \frac{1}{\frac{9}{16}} = 9 \cdot \frac{16}{9} = 16$

$$c) \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : (\sqrt{3})^0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} : 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức sau:

$$a) (-5)^{-1}; \quad b) 2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}; \quad c) 6^{-2} : \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : 2^{-2}.$$

2. Căn bậc n

Định nghĩa: Cho số nguyên dương n ($n \geq 2$) và số thực b bất kì. Nếu có số thực a sao cho $a^n = b$ thì a được gọi là một **căn bậc n** của b .

Mở rộng kết quả này, ta có:

Cho n là số nguyên dương ($n \geq 2$), b là số thực bất kì. Khi đó:

– Nếu n là số chẵn thì:

- $b < 0$: không tồn tại căn bậc n của b .
- $b = 0$: có một căn bậc n của b là 0.
- $b > 0$: có hai căn bậc n của b đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$ và giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

– Nếu n là số lẻ thì có duy nhất một căn bậc n của b , kí hiệu $\sqrt[n]{b}$.

■ **Chú ý:** a) Nếu n chẵn thì căn thức $\sqrt[n]{b}$ có nghĩa khi và chỉ khi ($\Leftrightarrow$) $b \geq 0$.

b) Nếu n lẻ thì căn thức $\sqrt[n]{b}$ có nghĩa với mọi số thực b ($\forall b \in \mathbb{R}$).

Ví dụ 3: Tìm $\sqrt[4]{16}, \sqrt[5]{-4\sqrt{2}}$

Giải

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2; \quad \sqrt[5]{-4\sqrt{2}} = \sqrt[5]{-(\sqrt{2})^4 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[5]{-(\sqrt{2})^5} = -\sqrt{2}$$

■ **Tính chất**

$$\begin{aligned} & \bullet \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} & \bullet \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & \bullet (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \\ & \bullet \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases} & \bullet \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) \sqrt[4]{(3-\pi)^4}; \quad b) \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{-4}; \quad c) \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}.$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sqrt[4]{(3-\pi)^4} = |3-\pi| = \pi-3 \text{ (vì } \pi > 3); \\ \text{b)} \quad & \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{-4} = \sqrt[5]{8 \cdot (-4)} = \sqrt[5]{-2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{-2^5} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2; \\ \text{c)} \quad & \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2}} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^3 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^4} = \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Tính giá trị các biểu thức

$$\text{a)} \quad \sqrt[4]{\frac{1}{16}}; \quad \text{b)} \quad (\sqrt[6]{8})^2; \quad \text{c)} \quad \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}.$$

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực dương a và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$.

Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu a^r , được xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ví dụ 6: Biểu thị các lũy thừa sau đây dưới dạng căn thức:

$$\text{a)} \quad 2^{\frac{1}{3}}; \quad \text{b)} \quad 5^{\frac{-2}{3}};$$

Giải

$$\text{a)} \quad 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}; \quad \text{b)} \quad 5^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}.$$

Ví dụ 7: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a)} \quad 25^{\frac{1}{2}}; \quad \text{b)} \quad \left(\frac{36}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad \text{c)} \quad 100^{1.5}.$$

Ví dụ 8: Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

$$\text{a)} \quad \sqrt{2^3}; \quad \text{b)} \quad \sqrt[5]{\frac{1}{27}}; \quad \text{c)} \quad (\sqrt[5]{a})^4 \quad (a > 0).$$

4. Lũy thừa với số mũ thực

Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) được gọi là *lũy thừa* của số thực dương a với số mũ α , kí hiệu là a^α .

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} \text{ với } \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n.$$

■ **Chú ý:** $1^\alpha = 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Ví dụ 9: Sử dụng máy tính cầm tay, tính các lũy thừa sau đây (làm tròn đến chữ số thập phân thứ sáu):

- a) $1,2^{1,5}$; b) $10^{\sqrt{3}}$; c) $(0,5)^{\frac{-2}{3}}$;

5. Tính chất của phép tính lũy thừa

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

$$\begin{aligned} & \bullet a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} & \bullet \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} & \bullet (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} \\ & \bullet (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha & \bullet \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha} \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$):

- a) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$; b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^{-3}} : \sqrt[6]{a^{-1}}$.

Giải

$$\text{a) } \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = (a \cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (a^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}};$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^{-3}} : \sqrt[6]{a^{-1}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} : a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}} = a^{-\frac{1}{4}}.$$

Ví dụ 11: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{6^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}}$

Giải

$$\begin{aligned} \frac{6^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}} &= \frac{(2 \cdot 3)^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}} = 2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}} \cdot 3^{-3-\sqrt{5}} \\ &= 2^{2+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} \cdot 3^{2+\sqrt{5}-3-\sqrt{5}} = 2^3 \cdot 3^{-1} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 12: Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$)

- a) $a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{2}{5}}$; b) $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \sqrt{a}$.

Ví dụ 13: Rút gọn biểu thức: $(x^{\sqrt{2}}y)^{\sqrt{2}} \cdot (9y^{-\sqrt{2}})$, với $x, y > 0$

BÀI TẬP

1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0$;

b) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

c) $(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5})$.

2. Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$):

a) $3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3}$;

b) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$;

c) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}}$.

3. Rút gọn các biểu thức sau ($a > 0, b > 0$):

a) $a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{7}{6}}$;

b) $a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}}$;

c) $\left(\frac{3}{2} a^{-\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}\right)$.

4. Với một chi vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1 m^2 và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Đồng xu 5 000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5 000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

5. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

6. Biết rằng $10^\alpha = 2$; $10^\beta = 5$.

Tính $10^{\alpha+\beta}$; $10^{\alpha-\beta}$; $10^{2\alpha}$; $10^{-2\alpha}$; 1000^β ; $0,01^{2\alpha}$.

7. Biết rằng $4^\alpha = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $16^\alpha + 16^{-\alpha}$;

b) $(2^\alpha + 2^{-\alpha})^2$.

BÀI 2. PHÉP TÍNH LÔGARIT

1. Khái niệm lôgarit

Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Số thực α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là **lôgarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Ví dụ 1: Viết các đẳng thức lũy thừa sau thành đẳng thức lôgarit:

a) $3^5 = 243$;

$$\text{b) } 10^{-2} = \frac{1}{100};$$

c) $(\sqrt{3})^0 = 1$.

Giải

a) $3^5 = 243 \Rightarrow \log_3 243 = 5;$

$$\text{b) } 10^{-2} = \frac{1}{100} \Rightarrow \log_{10} \frac{1}{100} = -2;$$

c) $(\sqrt{3})^0 = 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 1 = 0.$

■ **Chú yí:**

a) Biểu thức $\log_a b$ chỉ có nghĩa khi $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$.

b) Từ định nghĩa lôgarit, ta có:

$$\bullet \log_a 1 = 0; \quad (1)$$

$$\bullet \log_a a = 1; \quad (2)$$

$$\bullet \log_a a^b = b; \quad (3)$$

$$\bullet \quad a^{\log_a b} = b. \quad (4)$$

Hai công thức (3) và (4) cho thấy phép lấy lôgarit và phép nâng lên lũy thừa là hai phép toán ngược nhau.

Ví dụ 2: Tính : a) $\log_2 \frac{1}{4}$;

b) $9^{\log_3 5}$.

Giải

$$\text{a) } \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2;$$

$$\text{b) } 9^{\log_3 5} = (3^2)^{\log_3 5} = 3^{2 \log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25.$$

Ví dụ 3: a) $\log_3 \sqrt[3]{3}$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 8$; c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 4}$.

2. Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay

Sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính nhanh giá trị của các lôgarit (thường cần lấy giá trị gần đúng bằng cách làm tròn đến hàng nào đó).

■ **Chú ý:**

- a) Lôgarit cơ số 10 được gọi là **lôgarit thập phân**. Ta viết $\log N$ hoặc $\lg N$ thay cho $\log_{10} N$.
 b) Lôgarit cơ số e còn được gọi là **lôgarit tự nhiên**. Ta viết $\ln N$ thay cho $\log_e N$.

Ví dụ 4: Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ sáu):

- a) $\log_5 0,5$; b) $\log 25$; c) $\ln \frac{3}{2}$.

3. Tính chất của phép tính lôgarit

Cho các số thực dương a, M, N với $a \neq 1$, ta có:

- $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

■ **Chú ý:** Đặc biệt, với a, M, N dương, $a \neq 1$, ta có:

- $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$;
- $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 5: Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12$; b) $\log_3 (9^2 \cdot 3^2)$; c) $\log_5 \sqrt[3]{25}$.

Giải

$$\text{a) } \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12 = \log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot 12 \right) = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3.$$

$$\text{b) } \log_3 (9^2 \cdot 3^2) = \log_3 9^2 + \log_3 3^2 = 2 \log_3 3^2 + 2 \log_3 3 = 2 \cdot 2 \log_3 3 + 2 = 4 + 2 = 6.$$

$$\text{c) } \log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 25^{\frac{1}{3}} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_5 5 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

- Ví dụ 6:** Tính: a) $\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4}$; b) $\log_2 28 - \log_2 7$; c) $\log \sqrt{1000}$.

4. Công thức đổi cơ số

Cho các số dương a, b, N với $a \neq 1, b \neq 1$, ta có

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Đặc biệt, ta có:

- $\log_a N = \frac{1}{\log_N a} \quad (N \neq 1);$
- $\log_{a^\alpha} N = \frac{1}{\alpha} \log_a N \quad (\alpha \neq 0).$

Ví dụ 7: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_9 27$; b) $\log_2 3 \cdot \log_3 \frac{1}{4}$.

Giải

a) $\log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2};$

$$\text{b) } \log_2 3 \cdot \log_3 \frac{1}{4} = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 3} = \log_2 2^{-2} = -2 \log_2 2 = -2.1 = -2.$$

Ví dụ 8: Tính giá trị các biểu thức: a) $\log_{\frac{1}{4}} 8$;

b) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 8$.

Ví dụ 9: Đặt $\log_3 2 = a, \log_3 7 = b$. Biểu thị $\log_{12} 21$ theo a và b .

BÀI TẬP

Bài 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_7 16$;

b) $\log_3 \frac{1}{27}$;

c) $\log 1\,000$;

d) $9^{\log_3 12}$.

Bài 2: Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa:

a) $\log_3(1-2x)$;

b) $\log_{x+1} 5$.

Bài 3: Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $\log_3 15$;

b) $\log 8 - \log 3$;

c) $3\ln 2$.

Bài 4: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_6 9 + \log_6 4$;

b) $\log_5 2 - \log_5 50$;

c) $\log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2} \log_3 15.$

Bài 5: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 9 \cdot \log_3 4$;

b) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}}$;

c) $\log_2 3 \cdot \log_9 \sqrt{5} \cdot \log_5 4$.

Bài 6: Đặt $\log 2 = a, \log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

a) $\log_4 9$;

b) $\log_6 12$;

c) $\log_5 6$.

BÀI 3. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

1. Hàm số mũ

Cho số thực dương a khác 1.

Hàm số cho tương ứng mỗi số thực x với số thực a^x được gọi là **hàm số mũ** cơ số a , kí hiệu $y = a^x$.

■ **Nhận xét:** Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số mũ? Chỉ ra cơ số của nó.

- a) $y = 3^{\frac{x}{2}}$; b) $y = x^{-4}$; c) $y = 4^{-x}$;

Giải

a) $y = 3^{\frac{x}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = (\sqrt{3})^x$ là hàm số mũ với cơ số $\sqrt{3}$.

b) $y = x^{-4}$ không phải là hàm số mũ.

c) $y = 4^{-x} = (4^{-1})^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là hàm số mũ với cơ số $\frac{1}{4}$.

Đồ thị của hàm số mũ

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) có:

(1) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

(2) Sự biến thiên:

- Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và

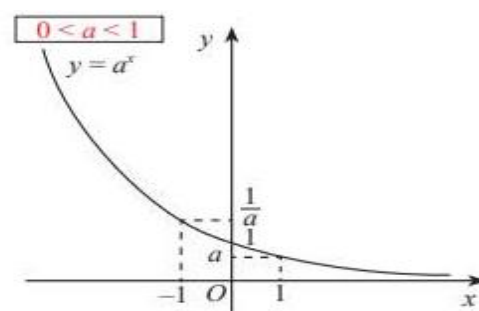
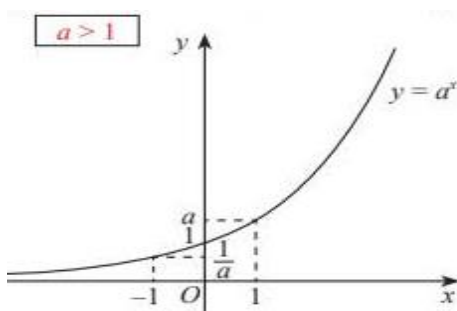
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

- Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

(3) Đồ thị:

- Cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$; đi qua điểm $(1; a)$.
- Nằm phía trên trục hoành.



Ví dụ 2: Sử dụng tính chất của hàm số mũ, so sánh các cặp số sau:

- a) $1,4^2$ và $1,4^{1,8}$; b) $0,9^{-1,2}$ và $0,9^{-0,8}$; c) $\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[5]{4}$.

Giải

a) Do $1,4 > 1$ nên hàm số $y = 1,4^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $2 > 1,8$ nên $1,4^2 > 1,4^{1,8}$.

b) Do $0,9 < 1$ nên hàm số $y = 0,9^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $-1,2 < -0,8$ nên $0,9^{-1,2} > 0,9^{-0,8}$.

c) Ta có: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^2} = 2^{\frac{2}{5}}$.

Do $2 > 1$ nên hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $\frac{1}{2} < \frac{2}{5}$ nên $2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{2}{5}}$, suy ra $\sqrt[3]{2} < \sqrt[5]{4}$.

Ví dụ 3: Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số là 1,05%/năm (nguồn: <https://www.worldmeters.info/world-population>). Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số thế giới sau t năm kể từ năm 2020 được tính bởi công thức:

$$P(t) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^t \text{ (tỉ người)}. \quad (*)$$

Khi đó, hãy tính dân số thế giới vào năm 2025 và vào năm 2030. (Mốc thời điểm để tính dân số của mỗi năm là ngày 1 tháng 7.)

Giải

Năm 2025 ứng với $t = 5$ nên có dân số thế giới là

$$P(5) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^5 \approx 8,213 \text{ (tỉ người)}.$$

Năm 2030 ứng với $t = 10$ nên có dân số thế giới là

$$P(10) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^{10} \approx 8,653 \text{ (tỉ người)}.$$

2. Hàm số lôgarit

Cho số thực dương a khác 1.

Hàm số cho tương ứng mỗi số thực dương x với số thực $\log_a x$ được gọi là **hàm số lôgarit** cơ số a , kí hiệu $y = \log_a x$.

■**Nhận xét:** Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

Ví dụ 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lôgarit? Chỉ ra cơ số của nó.

- a) $y = \log_{\sqrt{2}} x$; b) $y = -\log_3 x$; c) $y = x \log_2 3$.

Giải

a) $y = \log_{\sqrt{2}} x$ là hàm số lôgarit với cơ số $\sqrt{2}$.

b) $y = -\log_3 x = \log_{\frac{1}{3}} x$ là hàm số lôgarit với cơ số $\frac{1}{3}$.

c) $y = x \log_2 3$ không phải là hàm số lôgarit (mà là hàm bậc nhất với hệ số góc $\log_2 3$).

Đồ thị hàm số lôgarit

(1) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.

(2) Sự biến thiên:

• Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty.$$

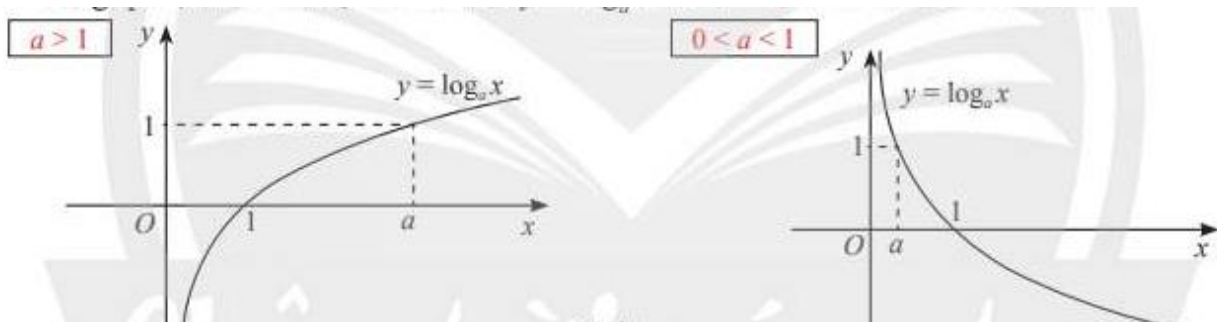
• Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty.$$

(3) Đồ thị:

• Cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$, đi qua điểm $(a; 1)$.

• Nằm bên phải trục tung.



Ví dụ 5: So sánh các cặp số sau:

a) $\log_3 7$ và $3\log_3 2$;

b) $2\log_{0,4} 5$ và $3\log_{0,4} 3$.

Giải

a) $3\log_3 2 = \log_3 2^3 = \log_3 8.$

Hàm số $y = \log_3 x$ có cơ số $3 > 1$ nên đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $7 < 8$ nên $\log_3 7 < \log_3 8$. Vậy $\log_3 7 < 3\log_3 2$.

b) $2\log_{0,4} 5 = \log_{0,4} 5^2 = \log_{0,4} 25$; $3\log_{0,4} 3 = \log_{0,4} 3^3 = \log_{0,4} 27.$

Hàm số $y = \log_{0,4} x$ có cơ số $0,4 < 1$ nên nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $25 < 27$ nên $\log_{0,4} 25 > \log_{0,4} 27$. Vậy $2\log_{0,4} 5 > 3\log_{0,4} 3$.

Ví dụ 6: So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}} 4,8$ và $\log_{\frac{1}{2}} 5,2$;

b) $\log_{\sqrt{5}} 2$ và $\log_5 2\sqrt{2}$;

c) $-\log_{\frac{1}{4}} 2$ và $\log_{\frac{1}{2}} 0,4$.

BÀI TẬP

Bài 1: Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 4^x$; b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Bài 2: So sánh các cặp số sau:

a) $1,3^{0,7}$ và $1,3^{0,6}$;

b) $0,75^{-2,3}$ và $0,75^{-2,4}$.

Bài 3: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \log_2(3 - 2x)$;

b) $y = \log_3(x^2 + 4x)$.

Bài 4: Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = \log x$;

b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$;

Bài 5: So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{\pi} 0,8$ và $\log_{\pi} 1,2$;

b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_{0,3} 2,1$.

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. Phương trình mũ

Phương trình dạng $a^x = b$, trong đó a và b là những số cho trước, $a > 0$, $a \neq 1$, được gọi là **phương trình mũ cơ bản**.

☞ **Cách giải phương trình mũ cơ bản**

Cho phương trình $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$). Khi đó,

Nếu $b > 0$ thì phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

■ **Chú ý:** a) Nếu $b = a^\alpha$ thì ta có $a^x = a^\alpha \Leftrightarrow x = \alpha$.

b) Tổng quát hơn, $a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $2^x = \frac{1}{8}$;

b) $5 \cdot 10^x = 1$;

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3}$.

Giải

a) $2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$;

b) $5 \cdot 10^x = 1 \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \log \frac{1}{5} = -\log 5$.

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3} \Leftrightarrow (3^{-2})^x = \frac{(3^3)^x}{3} \Leftrightarrow 3^{-2x} = 3^{3x-1} \Leftrightarrow -2x = 3x-1 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $3^{x+2} = \sqrt[3]{9}$;

b) $2 \cdot 10^{2x} = 30$;

c) $4^{2x} = 8^{2x-1}$.

2. Phương trình lôgarit

Phương trình dạng $\log_a x = b$, trong đó a và b là những số cho trước, $a > 0$, $a \neq 1$, được gọi là **phương trình lôgarit cơ bản**.

☞ **Cách giải phương trình lôgarit cơ bản**

Cho phương trình $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$). Khi đó, phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

■ **Chú ý:** Tổng quát, xét phương trình $\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0, v(x) > 0 \\ u(x) = v(x) \end{cases}$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a) $\log_3 x = -2$;

b) $\log_2(x^2 - 3) = \log_2 2x$.

Giải

a) Ta có: $\log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

b) Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} (*)$

PT $\Leftrightarrow x^2 - 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Thay lần lượt $x = -1$ và $x = 3$ vào (*), ta thấy chỉ có $x = 3$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) = -2$;

b) $\log_2(x + 6) = \log_2(x + 1) + 1$.

3. Bất phương trình mũ

Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$), với a, b là những số cho trước, $a > 0, a \neq 1$.

☞ **Cách giải:**

Dạng 1: $a^x > b$ (1) hoặc $a^x \geq b$ (2)

Nếu $b \leq 0$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của (1), bất pt (2) vô nghiệm

Nếu $b > 0$ thì :

- Với $a > 1$, nghiệm của (1) là $x > \log_a b$; nghiệm của (2) là $x \geq \log_a b$.

- Với $0 < a < 1$, nghiệm (1) là $x < \log_a b$; nghiệm của (2) là $x \leq \log_a b$.

Dạng 2: $a^x < b$ (3) hoặc $a^x \leq b$ (4)

Nếu $b \leq 0$ thì bất pt (3), (4) vô nghiệm

Nếu $b > 0$ thì :

- Với $a > 1$, nghiệm của (3) là $x < \log_a b$; nghiệm của (4) là $x \leq \log_a b$.

- Với $0 < a < 1$, nghiệm (3) là $x > \log_a b$; nghiệm của (4) là $x \geq \log_a b$.

Ví dụ 5: Giải các bất phương trình sau:

a) $10^x < 0,001$; b) $0,4^x > 2$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2 \cdot 4^x$;

Giải

a) $10^x < 0,001 \Leftrightarrow 10^x < 10^{-3} \Leftrightarrow x < -3$ (do $10 > 1$).

c) $0,4^x > 2 \Leftrightarrow x < \log_{0,4} 2$ (do $0 < 0,4 < 1$).

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2 \cdot 4^{2x} \Leftrightarrow (2^{-1})^x \geq 2 \cdot (2^2)^{2x} \Leftrightarrow 2^{-x} \geq 2^{1+4x} \Leftrightarrow -x \geq 1+4x$ (do $2 > 1$)
 $\Leftrightarrow 5x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{5}$.

Ví dụ 6: Giải các bất phương trình sau:

a) $2^x > 16$; b) $0,1^x \leq 0,001$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} > \left(\frac{1}{25}\right)^x$.

4. Bất phương trình lôgarit

Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$), với a, b là những số cho trước, $a > 0, a \neq 1$.

Cách giải

Xét bất phương trình $\log_a x > b$, điều kiện $x > 0$

- Với $a > 1$ nghiệm của bpt là $x > a^b$.

- Với $0 < a < 1$, nghiệm của bpt là $0 < x < a^b$.

■ **Chú ý:** a) Tương tự như trên, ta nhận được kết quả về nghiệm của bất phương trình $\log_a x \geq b; \log_a x < b; \log_a x \leq b$.

b) Nếu $a > 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) > v(x) > 0$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow 0 < u(x) < v(x)$.

Ví dụ 7: Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_2 (2x-1) \leq 1$; b) $\log_{\frac{1}{2}} (1-x) > \log_{\frac{1}{2}} (3x+2)$.

Giải

a) Điều kiện: $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Khi đó, do cơ số $2 > 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành

$$2x - 1 \leq 2^1 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 1. \quad (*)$

Khi đó, do cơ số $\frac{1}{2} < 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành

$$1 - x < 3x + 2 \Leftrightarrow 4x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{4} < x < 1$.

Ví dụ 8: Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2;$

b) $\log_5(x+2) \leq 1.$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $5^{2x-1} = 25;$

b) $3^{x+1} = 9^{2x+1};$

c) $10^{1-2x} = 100\,000.$

2. Giải các phương trình sau. Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

a) $3^{x+2} = 7;$

b) $3 \cdot 10^{2x+1} = 5.$

3. Giải các phương trình sau:

a) $\log_6(4x+4) = 2;$

b) $\log_3 x - \log_3(x-2) = 1.$

4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq 9;$

b) $4^x > 2^{x-2}.$

5. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_2(x-2) < 2;$

b) $\log(x+1) \geq \log(2x-1).$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

Bài 1: Biết $4^\alpha + 4^{-\alpha} = 5$. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $2^\alpha + 2^{-\alpha}$;

b) $4^{2\alpha} + 4^{-2\alpha}$.

Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức:

a) $\log_2 72 - \frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_2 27)$; b) $5^{\log_2 40 - \log_2 5}$; c) $3^{2 + \log_9 2}$;

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = \sqrt{8}$;

b) $9^{2x-1} = 81 \cdot 27^x$;

c) $2\log_5 (x-2) = \log_5 9$;

d) $\log_2 (3x+1) = 2 - \log_2 (x-1)$.

Bài 4: Giải các bất phương trình:

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \frac{1}{81}$;

b) $(\sqrt[4]{3})^x \leq 27 \cdot 3^x$;

c) $\log_2 (x+1) \leq \log_2 (2-4x)$.

Bài 5: Biết rằng $5^x = 3$; $3^y = 5$. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của xy .

CHƯƠNG VII. ĐẠO HÀM

Mục tiêu:

Sau khi học xong chương này, sinh viên có thể:

- Nhận biết được định nghĩa của đạo hàm. Dùng định nghĩa tính được đạo hàm của một số hàm đơn giản.
- Nhận biết được ý nghĩa hình học của đạo hàm.
- Viết được phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại một điểm.
- Nhận biết được số e thông qua bài toán lãi suất ngân hàng.
- Tính được đạo hàm một số hàm sơ cấp cơ bản.
- Sử dụng được các công thức tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số và đạo hàm của hàm hợp.
- Nhận biết được khái niệm đạo hàm cấp hai, tính được đạo hàm cấp hai của một số hàm số đơn giản và giải quyết được một số bài toán thực tiễn.

BÀI 1. ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.
Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn này được gọi là **đạo hàm** của hàm số $f(x)$ tại x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.
Vậy:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = x^2$. Tính $f'(x_0)$ với $x_0 \in \mathbb{R}$.

Giải

Ta có
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

■ **Chú ý:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số này có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì ta nói nó có **đạo hàm trên khoảng** $(a; b)$, kí hiệu y' hoặc $f'(x)$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = C$ (C là hằng số);

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$.

Giải

a) Với bất kì x_0 , ta có:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0.$$

Vậy $f'(x) = (C)' = 0$ trên $\mathbb{R}$.

b) Với bất kì $x_0 \neq 0$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{xx_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$.

■ **Chú ý:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$.

a) Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của biến tại x_0 . Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Khi đó, $x = x_0 + \Delta x$ và

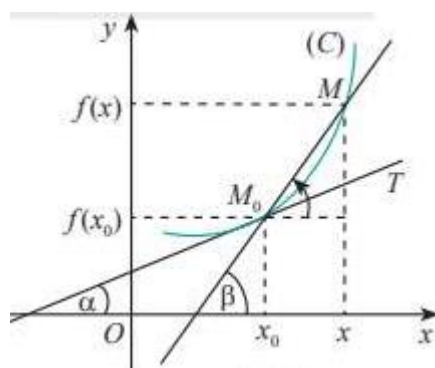
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

b) Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ biểu thị tốc độ thay đổi trung bình của đại lượng y theo đại lượng x trong khoảng từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$; còn $f'(x_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi (tức thời) của đại lượng y theo đại lượng x tại điểm x_0 .

Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm



Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm $x_0 \in (a; b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Tiếp tuyến M_0T có phương trình là $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(2; 4) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình của tiếp tuyến đó.

Giải

Ta có $(x^2)' = 2x$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4.$$

Ví dụ 5: Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$ và điểm $N(1; 1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm N và viết phương trình của tiếp tuyến đó.

3. Số e

Bài toán lãi suất ngân hàng:

Một người gửi tiết kiệm khoản tiền A triệu đồng (gọi là vốn) vào ngân hàng với lãi suất $r/\text{năm}$ và theo thể thức lãi kép (tiền lãi sau mỗi kì hạn được cộng gộp vào vốn). Tính tổng số tiền vốn và lãi sau một năm của người gửi nếu kì hạn là

- a) một năm; b) một tháng

Giải

Kí hiệu T là tổng số tiền vốn và lãi của người gửi sau một năm. Tùy theo kì hạn, ta có những công thức tính T khác nhau

☞ Nếu kì hạn là 1 năm thì $T = A \cdot (1+r)$.

☞ Nếu kì hạn là 6 tháng thì $T = A \left(1 + \frac{r}{2} \right)^2$.

☞ Nếu kì hạn là 3 tháng thì $T = A \left(1 + \frac{r}{4} \right)^4$.

☞ Nếu kì hạn là 1 tháng thì $T = A \left(1 + \frac{r}{12} \right)^{12}$.

☞ Nếu kì hạn là 1 ngày thì $T = A \left(1 + \frac{r}{365} \right)^{365}$ (luôn coi một năm có 365 ngày).

Tổng quát, nếu một năm được chia thành n kì hạn thì

$$T = A \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n = A \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mr} \quad (\text{với } m = \frac{n}{r}, r > 0).$$

Khi kì hạn càng ngắn thì n càng lớn, do đó m càng lớn. Người ta chứng minh được rằng có giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \approx 2,718281828... \text{ (số thập phân vô hạn không tuần hoàn).}$$

Số e xuất hiện trong nhiều bài toán ở những lĩnh vực khác nhau như Toán học, Vật lí, Sinh học, Kinh tế, ...

Ví dụ 6: Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6%/năm và theo thể thức lãi kép liên tục. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau

- a) một ngày; b) 30 ngày

(Luôn coi một năm có 365 ngày.)

BÀI TẬP

Bài 1: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $f(x) = -x^2$; b) $f(x) = x^3 - 2x$; c) $f(x) = \frac{4}{x}$.

Bài 2: Cho hàm số $f(x) = -2x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; -2) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A .

Bài 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$.

- a) Tại điểm $(-1; 1)$; b) Tại điểm có hoành độ bằng 2.

Bài 4: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

Bài 5: Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5%/năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau một năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức:

- a) lãi kép với kì hạn 6 tháng;
- b) lãi kép liên tục.

BÀI 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n, n \in \mathbb{N}^*$

Hàm số $y = x^n, n \in \mathbb{N}^*$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ và $x = \frac{-1}{2}$.

Giải

Ta có $(x^5)' = 5x^4$. Từ đó suy ra $y'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$ và $y'\left(\frac{-1}{2}\right) = 5 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^{10}$ tại điểm $x = -1$ và $x = \sqrt[3]{2}$.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 1$ và $x = \frac{1}{4}$.

Giải

Ta có: $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$. Từ đó, $y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ và $y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$.

Ví dụ 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 4.

■ Nhận xét

a) Cho số thực α . Hàm số $y = x^\alpha$ được gọi là *hàm số lũy thừa* (Với tập xác định: $(0; +\infty)$).

Công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ còn đúng khi n là số thực, tức là với số thực α bất kì

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} (x > 0).$$

b) $\bullet (C)' = 0$ (C là hằng số); $\bullet \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} (x \neq 0)$

Ví dụ 5: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm $x = 8$.

Giải

$$\text{Ta có } y' = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$\text{Từ đó, } y'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{2^3})^2} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{12}.$$

Ví dụ 6: Tìm đạo hàm của các hàm số:

a) $y = \sqrt[4]{x}$ tại $x = 1$; b) $y = \frac{1}{x}$ tại $x = \frac{-1}{4}$.

3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

Công thức đạo hàm của các hàm số lượng giác sau:

$\bullet (\sin x)' = \cos x$	$\bullet (\cos x)' = -\sin x$
$\bullet (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$	$\bullet (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ tại $\frac{\pi}{6}$.

Giải

$$\text{Ta có: } y' = (\cos x)' = -\sin x. \text{ Vậy } y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ tại $\frac{3\pi}{4}$.

4. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Công thức đạo hàm của các hàm số mũ và hàm số lôgarit:

- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
- $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$

Ví dụ 9: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = e^x$ tại $x = 2 \ln 3$;

b) $y = \log_5 x$ tại $x = 2$.

Giải

a) Ta có $y' = (e^x)' = e^x$. Từ đó, $y'(2 \ln 3) = e^{2 \ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9$.

b) Ta có $y' = (\log_5 x)' = \frac{1}{x \ln 5} \quad (x > 0)$. Từ đó, $y'(2) = \frac{1}{2 \ln 5}$.

Ví dụ 10: Tìm đạo hàm của các hàm số:

a) $y = 9^x$ tại $x=1$;

b) $y = \ln x$ tại $x = \frac{1}{3}$.

5. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số

Cho hai hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc tập xác định. Ta có:

- $(u + v)' = u' + v'$

- $(u - v)' = u' - v'$

- $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ (1)

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (\text{với } v = v(x) \neq 0)$ (2)

■ **Chú ý:** ● Với $u = C$ (C là hằng số), công thức (1) trở thành $(C \cdot v)' = C \cdot v'$.

● Với $u = 1$, công thức (2) trở thành $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \quad (\text{với } v = v(x) \neq 0)$.

Ví dụ 11: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x^2 - 4x + 2$; b) $y = x \sin x$; c) $y = \frac{3x+2}{2x-1}$.

Giải

a) $(3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' - (4x)' + (2)' = 3(2x) - 4(1) + 0 = 6x - 4$.

b) $(x \sin x)' = (x)' \sin x + x (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$.

c) $\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)' = \frac{(3x+2)' \cdot (2x-1) - (3x+2) \cdot (2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{3 \cdot (2x-1) - (3x+2) \cdot 2}{(2x-1)^2}$
 $= \frac{6x - 3 - 6x - 4}{(2x-1)^2} = -\frac{7}{(2x-1)^2}$.

Ví dụ 12: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 3^x$; b) $y = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

Giải

a) $(x^2 3^x)' = (x^2)' \cdot 3^x + x^2 \cdot (3^x)' = 2x \cdot 3^x + x^2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = x 3^x (2 + x \ln 3)$.

b) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\cos x}\right)' = \frac{(\sqrt{x})' \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sqrt{x}(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + 2x \sin x}{2\sqrt{x} \cos^2 x}$.

Ví dụ 13: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

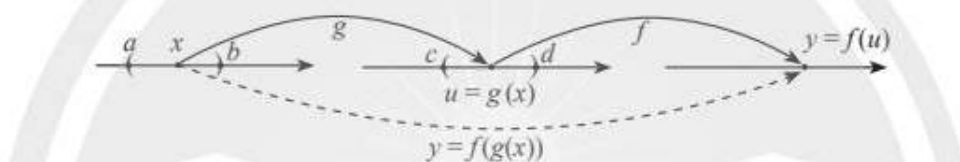
a) $y = x \log_2 x$; b) $y = x^3 e^x$.

6. Đạo hàm của hàm hợp

Cho $u = g(x)$ là hàm số của x xác định trên khoảng $(a; b)$ và lấy giá trị trên khoảng $(c; d)$; $y = f(u)$ là hàm số của u xác định trên khoảng $(c; d)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Ta lập hàm số xác định trên $(a; b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc sau:

$$x \mapsto f(g(x))$$

Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



Ví dụ 14: a) Hàm số $y = (2x+1)^3$ là hàm hợp của các hàm số nào?

b) Hàm số $y = \cos(x^2 + 1)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

Giải

- a) Hàm số $y = (2x + 1)^3$ là hàm hợp của hàm số $y = u^3$ với $u = 2x + 1$.
 b) Hàm số $y = \cos(x^2 + 1)$ là hàm hợp của hàm số $y = \cos u$ với $u = x^2 + 1$.

Ví dụ 15: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = (3x^2 + x)^3$; b) $y = \sin 2x$; c) $y = e^{x^2+1}$.

Giải

a) Đặt $u = 3x^2 + x$ thì $y = u^3$. Ta có $u'_x = 6x + 1$ và $y'_u = (u^3)' = 3u^2$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3u^2 \cdot (6x + 1) = 3(3x^2 + x)^2 \cdot (6x + 1)$.

Vậy $y' = 3(3x^2 + x)^2 \cdot (6x + 1)$.

b) Đặt $u = 2x$ thì $y = \sin u$. Ta có $u'_x = 2$ và $y'_u = (\sin u)' = \cos u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2 = 2 \cos 2x$.

Vậy $y' = 2 \cos 2x$.

c) Đặt $u = x^2 + 1$ thì $y = e^u$. Ta có $u'_x = 2x$ và $y'_u = (e^u)' = e^u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 2x = 2x e^{x^2+1}$.

Vậy $y' = 2x e^{x^2+1}$.

Ví dụ 16: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = (2x^3 + 3)^2$; b) $y = \cos 3x$; c) $y = \log_2(x^2 + 2)$.

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$ $(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$

7. Đạo hàm cấp hai

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi $x \in (a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là **đạo hàm cấp hai** của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$.

Ví dụ 17: Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số:

- a) $y = 3x^2 + 5x + 1$; b) $y = \sin x$.

Giải

a) $y' = 3.2x + 5 + 0 = 6x + 5, y'' = 6.1 + 0 = 6$.

b) $y' = \cos x, y'' = -\sin x$.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

Ví dụ 18: Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình

$s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

Giải

Ta có $s'(t) = 2t - 4$; $s''(t) = 2$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $s''(4) = 2 \text{ m/s}^2$.

BÀI TẬP

1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3}$;

b) $y = \frac{-2x+3}{x-4}$;

c) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$;

d) $y = \sqrt{5x}$.

2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin 3x$;

b) $y = \cos^3 2x$;

c) $y = \tan^2 x$;

d) $y = \cot(4 - x^2)$.

3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 - x) \cdot 2^x$;

b) $y = x^2 \log_3 x$;

c) $y = e^{3x+1}$.

4. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - 5x^2 + 3$;

b) $y = xe^x$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

Bài 1: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ có đồ thị (C) và điểm $M(-1; 6) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M.

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 1$;

b) $y = (x^2 - x)^3$;

c) $y = \frac{4x-1}{2x+1}$.

Bài 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + 3x - 1)e^x$;

b) $y = x^3 \log_2 x$.

Bài 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan(e^x + 1)$;

b) $y = \sqrt{\sin 3x}$;

c) $y = \cot(1 - 2^x)$.

Bài 5: Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$;

b) $y = x^2 e^x$.

Bài 6: Một viên sỏi rơi từ độ cao 44,1 m thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính:

a) Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 2$;

b) Vận tốc rơi của viên sỏi khi chạm đất.

CHƯƠNG VIII. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Mục tiêu:

Sau khi học xong chương này, sinh viên có thể:

- Nhận biết được quan hệ vuông góc giữa các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Sử dụng được các kiến thức về quan hệ vuông góc để mô tả các hình ảnh trong thực tiễn
- Giải thích được mối liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.
- Nhận biết được khái niệm phép chiếu vuông góc.
- Tính được được các loại góc và các loại khoảng cách trong không gian.
- Tính được thể tích của hình lăng trụ, hình hộp, hình chóp, hình chóp cụt đều.
- Vận dụng được kiến thức về quan hệ vuông góc trong không gian để giải quyết được một số vấn đề trong thực tiễn.

BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Định nghĩa: Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian, kí hiệu (a, b) , là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b .

■Chú ý:

- Để xác định góc giữa hai đường thẳng a, b ta có thể lấy một điểm O nằm trên một trong hai đường thẳng đó và vẽ đường thẳng song song với đường thẳng còn lại.
- Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ 0° đến 90° .

Ví dụ 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông và M, N, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh $BC, BA, AA', A'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

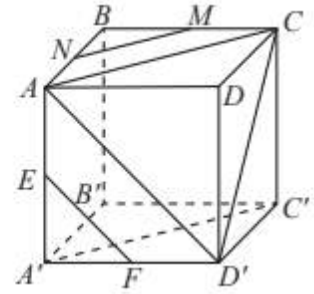
- $A'C'$ và BC ;
- MN và EF .

Giải

a) Ta có $AC \parallel A'C'$, suy ra $(A'C', BC) = (AC, BC) = \widehat{ACB} = 45^\circ$ (tam giác ACB vuông cân tại B).

b) Ta có $AC \parallel MN$, $AD' \parallel EF$,

suy ra $(MN, EF) = (AC, AD') = \widehat{CAD'} = 60^\circ$ (tam giác ACD' có ba cạnh bằng nhau).



2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Định nghĩa: Trong không gian, hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Hai đường thẳng a, b vuông góc được kí hiệu là $a \perp b$ hoặc $b \perp a$.

Ví dụ 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông. Chứng minh rằng $AB \perp CC'$, $AC \perp B'D'$.

Giải

Ta có $CC' \parallel BB'$, suy ra $(AB, CC') = (AB, BB') = \widehat{ABB'} = 90^\circ$. Vậy $AB \perp CC'$.

Ta có $B'D' \parallel BD$, suy ra $(AC, B'D') = (AC, BD) = 90^\circ$ (hai đường chéo của hình vuông luôn vuông góc với nhau). Vậy $AC \perp B'D'$.

■Chú ý:

a) Hai đường thẳng vuông góc có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

b) Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường kia.

b) Trong không gian, khi có hai đường thẳng phân biệt a, b cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba c thì ta chưa kết luận được $a \parallel b$ như trong hình học phẳng.



BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a . Cho biết $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp AB$ và $SA \perp AD$. Tính góc giữa SB và CD , SD và CB .

Bài 2: Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

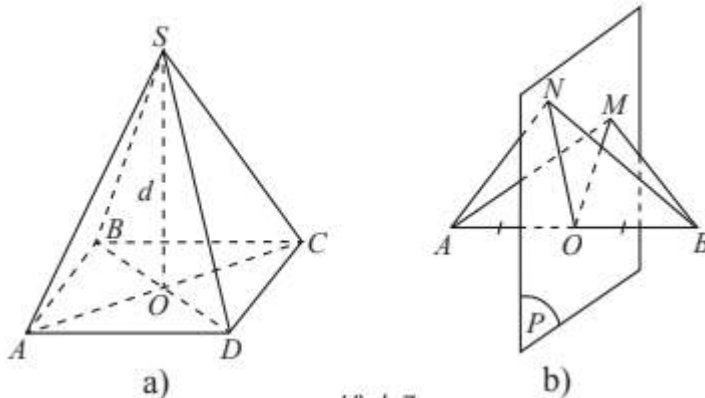
Bài 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD.

Định lí 2:

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Ví dụ 3:

- a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O (Hình a). Gọi d là đường thẳng đi qua S và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh d đi qua O .
- b) Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB ; M, N là hai điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng AB sao cho M, N, O không thẳng hàng (Hình b). Chứng minh M và N thuộc mặt phẳng (P) .



Giải

- a) Ta có: $SA = SC$ suy ra $SO \perp AC$; $SB = SD$ suy ra $SO \perp BD$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Theo giả thiết, ta có đường thẳng d đi qua S và vuông góc với $(ABCD)$. Do qua điểm S chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên d phải trùng với đường thẳng SO , suy ra d đi qua O .

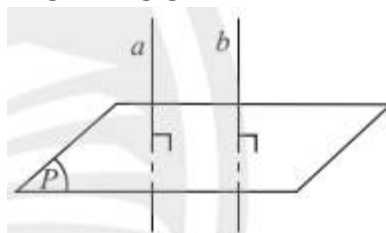
- b) Ta có: $MA = MB$ suy ra $OM \perp AB$; $NA = NB$ suy ra $ON \perp AB$. Suy ra $AB \perp (OMN)$.

Theo giả thiết, ta có (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB . Do qua điểm O chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với AB nên (P) phải trùng với (OMN) , suy ra M và N thuộc (P) .

2. Liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Định lí 3:

- a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



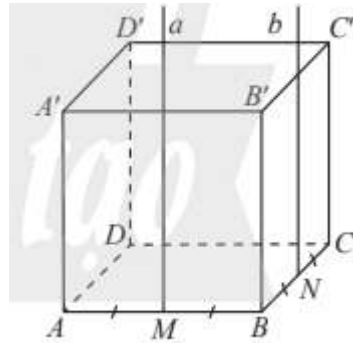
Ví dụ 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Qua M vẽ đường thẳng a song song với $AA' \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Qua M vẽ đường thẳng a song song với AA' . Chứng minh $a \perp (ABCD)$.

b) Qua N vẽ đường thẳng b vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh $b \parallel AA'$.

Giải



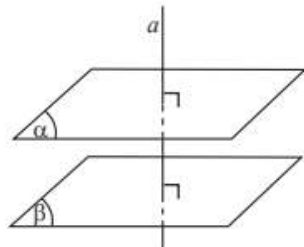
a) Theo đề bài ta có $a \parallel AA'$ và $AA' \perp (ABCD)$, suy ra $a \perp (ABCD)$.

b) Theo đề bài ta có $b \perp (ABCD)$ và $AA' \perp (ABCD)$, suy ra $b \parallel AA'$.

Định lý 4:

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

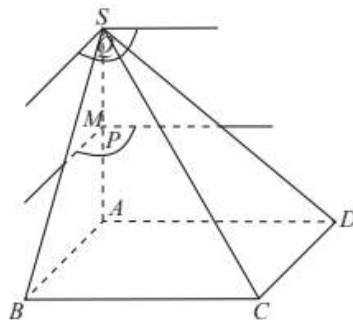
b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$.

a) Vẽ mặt phẳng (Q) đi qua S và song song với mặt phẳng (ABCD). Chứng minh $SA \perp (Q)$.

b) Cho M là trung điểm của SA. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với (ABCD). Chứng minh $SA \perp (P)$.



Giải

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$ (1)

và $(Q) \parallel (ABCD)$ (2)

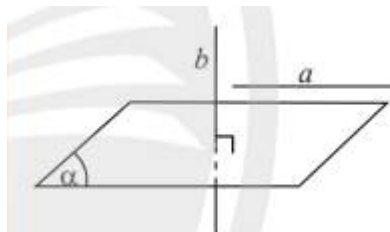
Từ (1) và (2) suy ra $SA \perp (Q)$.

b) Ta có $(P) \parallel (ABCD)$ (3). Từ (1) và (3) suy ra $SA \perp (P)$.

Định lý 5:

a) Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .

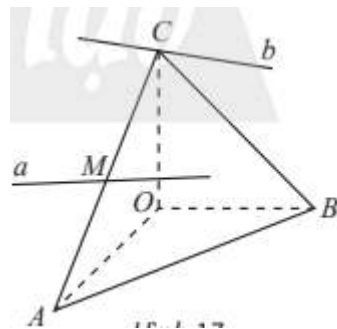
b) Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (α) (không chứa a) cùng vuông góc với một đường thẳng b thì chúng song song với nhau.



Ví dụ 6: Cho ba đoạn thẳng OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

a) Cho M là trung điểm của CA và a là đường thẳng tùy ý đi qua M và song song với mặt phẳng (OAB) . Chứng minh $a \perp OC$.

b) Gọi b là một đường thẳng tùy ý đi qua C và b vuông góc với OC . Chứng minh $b \parallel (OAB)$.



Giải

a) Ta có $OC \perp OA$ và $OC \perp OB$, suy ra $OC \perp (OAB)$. (1)

Ta có $(a) \parallel (OAB)$ (2)

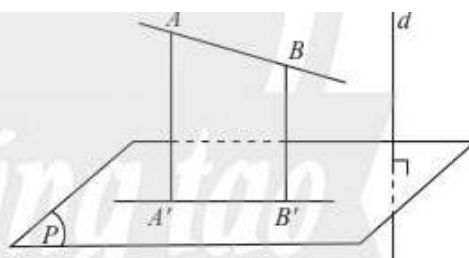
Từ (1) và (2) suy ra $a \perp OC$.

b) Ta có $b \perp OC$ (3). Từ (1) và (3) suy ra $b \parallel (OAB)$.

3. Phép chiếu vuông góc

Định nghĩa

Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d vuông góc với (P) . Phép chiếu song song theo phương của d lên mặt phẳng (P) được gọi là **phép chiếu vuông góc lên (P)** .



Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ và $SA \perp (ABCD)$. Tìm hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ và hình chiếu vuông góc của điểm D trên mặt phẳng (SAB) .

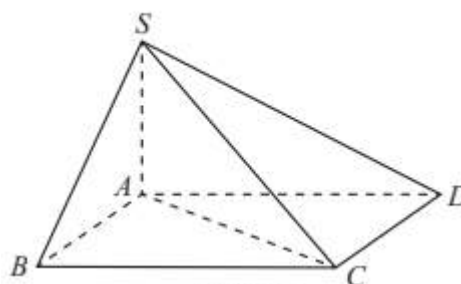
Giải

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$.

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $SA \perp AD$ (1)

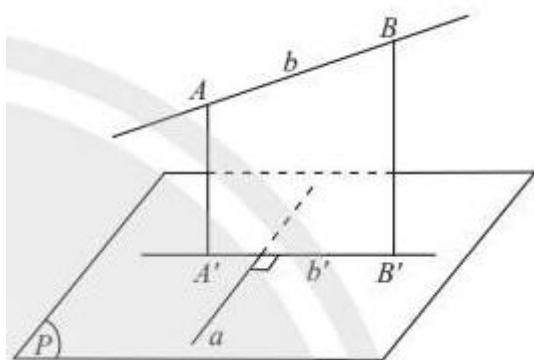
Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật, suy ra $AB \perp AD$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AD \perp (SAB)$, A là hình chiếu vuông góc của điểm D trên (SAB) .



Định lý 5 (Định lý ba đường vuông góc)

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không nằm trong (P) và không vuông góc với (P) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (P) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .



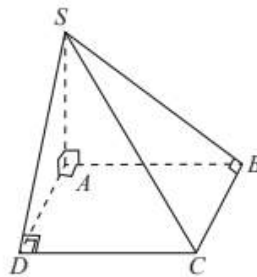
Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Chứng minh $CD \perp SD$ và $CB \perp SB$.

Giải

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra DA là hình chiếu vuông góc của DS trên mặt phẳng $(ABCD)$ và BA là hình chiếu vuông góc của BS trên $(ABCD)$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $CD \perp DA$, suy ra theo Định lý ba đường vuông góc ta có $CD \perp SD$.

Tương tự ta cũng có $CB \perp AB$, suy ra theo Định lý ba đường vuông góc ta có $CB \perp SB$.



BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$.

- Chứng minh $CD \perp (SAD)$.
- Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh $CM \perp (SAB)$.

Bài 2: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H , lấy điểm S . Chứng minh rằng:

- $AC \perp (SHK)$;
- $CK \perp (SDH)$.

Bài 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, có các cạnh bên đều bằng $2a$.

- Tính góc giữa SC và AB ;
- Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác SAB trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $ASB = 90^\circ$, $BSC = 60^\circ$ và $ASC = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm của cạnh AC . Chứng minh $SI \perp (ABC)$.

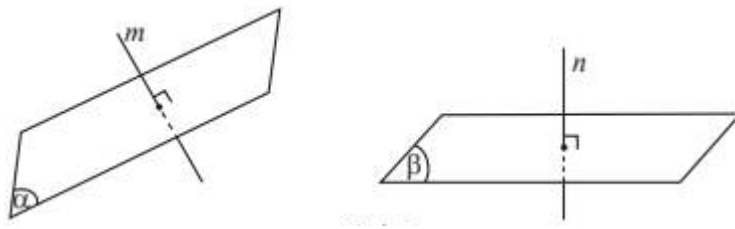
Bài 5: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Vẽ đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC) tại H. Chứng minh $AH \perp BC$.

BÀI 3. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai mặt phẳng

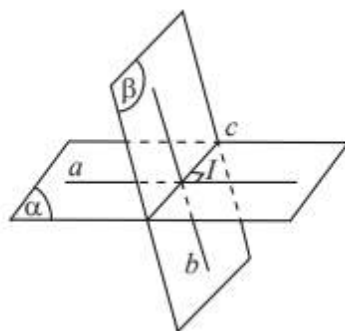
Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (α) và (β), kí hiệu ((α, β))

Ta có: $((\alpha), (\beta)) = (m, n)$ với $m \perp (\alpha), n \perp (\beta)$.



Người ta chứng minh được góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau, đó là:

Cho $(\alpha) \cap (\beta) = c$:

$$((\alpha), (\beta)) = (a, b) \text{ với } a \subset (\alpha), b \subset (\beta), a \perp c, b \perp c.$$


Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng:

- a) (SAC) và (SAD); b) (SAB) và (SAD).

Giải

- a) Ta có: $BO \perp SA$ và $BO \perp AC$, suy ra $BO \perp (SAC)$;

$BA \perp SA$ và $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$.

Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAD) là α thì

$$\alpha = (\overline{BO}, \overline{BA}) = \angle ABO = 45^\circ.$$

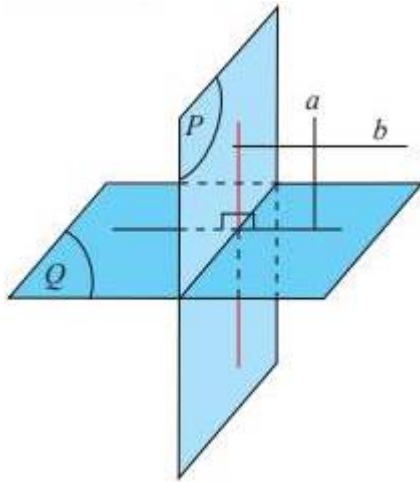
b) Ta có: $CB \perp SA$ và $CB \perp AB$, suy ra $CB \perp (SAB)$;

$CD \perp SA$ và $CD \perp AD$, suy ra $CD \perp (SAD)$.

Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là β thì $\beta = (\overline{CB}, \overline{CD}) = \angle BCD = 90^\circ$.

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa: Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc được kí hiệu là $(P) \perp (Q)$.



Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng $(ABC), (BAD), (CAD)$ đôi một vuông góc với nhau.

Giải

Ta có: $AB \perp AC, AB \perp AD \Rightarrow AB \perp (CAD)$

$$\Rightarrow (ABC) \perp (CAD), (BAD) \perp (CAD).$$

Tương tự ta cũng có $CA \perp AB, CA \perp AD \Rightarrow CA \perp (BAD)$

$$\Rightarrow (CAD) \perp (BAD).$$

Vậy các mặt phẳng $(ABC), (BAD), (CAD)$ từng đôi một vuông góc với nhau.

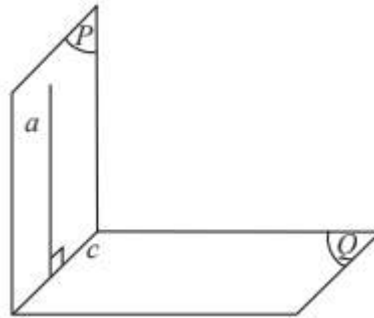
Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và đáy là hình vuông. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (ABCD)$;

b) $(SAC) \perp (SBD)$.

3. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

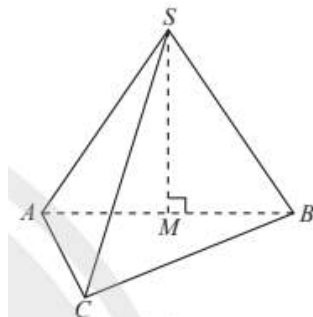
Định lý 2: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



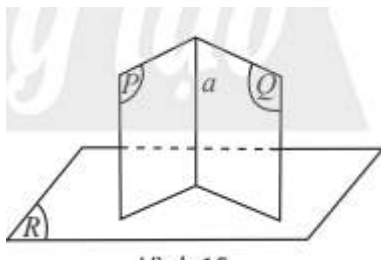
Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh $SM \perp (ABC)$.

Giải

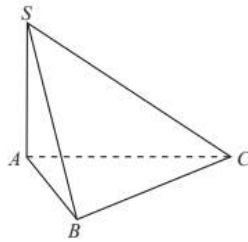
Theo đề bài ta có $(SAB) \perp (ABC)$. Ta có tam giác SAB đều và M là trung điểm của AB , suy ra $SM \perp AB$. Đường thẳng SM nằm trong (SAB) và vuông góc với giao tuyến AB của hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) . Từ đó suy ra $SM \perp (ABC)$.



Định lý 3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA = a$, đáy ABC là tam giác đều với cạnh bằng a . Cho biết hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính SB và SC theo a .



Giải

Ta có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC) , theo Định lí 3, giao tuyến SA của (SAB) và (SAC) vuông góc với (ABC) . Từ $SA \perp (ABC)$ ta có

$SA \perp AB$ và $SA \perp AC$, suy ra tam giác SAB và SAC vuông cân tại S , suy ra $SB = SC = a\sqrt{2}$.

4. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Định nghĩa

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có mặt đáy là đa giác đều.

Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

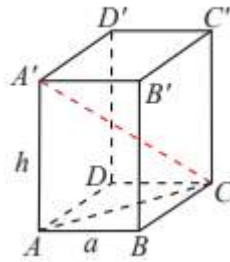
Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có mặt đáy là hình chữ nhật.

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Tính chất

Tên	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng		– Cạnh bên vuông góc với hai đáy. – Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều		– Hai đáy là hai đa giác đều. – Mặt bên là các hình chữ nhật. – Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy.
Hình hộp đứng		– Bốn mặt bên là hình chữ nhật. – Hai đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật		– Sáu mặt là hình chữ nhật. – Độ dài a, b, c của ba cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. – Độ dài đường chéo d được tính theo ba kích thước: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$
Hình lập phương		– Sáu mặt là hình vuông. – Độ dài đường chéo d được tính theo độ dài cạnh a: $d = a\sqrt{3}.$

Ví dụ 6: Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $AA' = h$ (Hình vẽ). Tính độ dài đường chéo $A'C$ theo a và h .



Giải

Đáy ABCD của lăng trụ đều phải là tứ diện đều, suy ra ABCD là hình vuông, vậy $AC = a\sqrt{2}$. Lăng trụ đều có cạnh bên vuông góc với đáy, suy ra $AA' \perp (ABCD)$, vậy $AA' \perp AC$.

Trong tam giác $A'AC$ vuông tại A ta có:

$$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{h^2 + 2a^2}.$$

☞ **Chú ý:** Lăng trụ đều có đáy tứ giác thường được gọi là lăng trụ tứ giác đều. Tương tự ta cũng có lăng trụ tam giác đều, lăng trụ lục giác đều,...

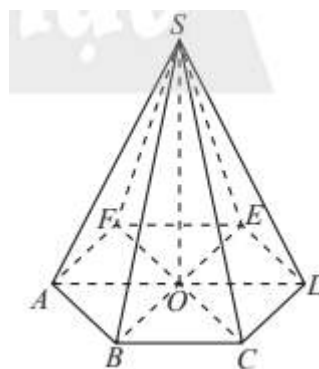
5. Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

Hình chóp đều

Định nghĩa: Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

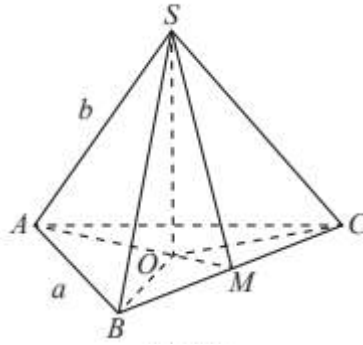
☞ **Chú ý:** Hình chóp đều có:

- Các mặt bên là các tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau.
- Đoạn thẳng nối từ đỉnh hình chóp đến tâm của đáy thì vuông góc với mặt đáy và gọi là đường cao của hình chóp.
- Độ dài đường cao gọi là chiều cao của hình chóp đều.



Ví dụ 7: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $SA = b$ (Hình vẽ).

Tính độ dài đường cao SO theo a, b .



Giải

Ta có O là trọng tâm của tam giác đều ABC, suy ra $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOA vuông tại O, ta có:

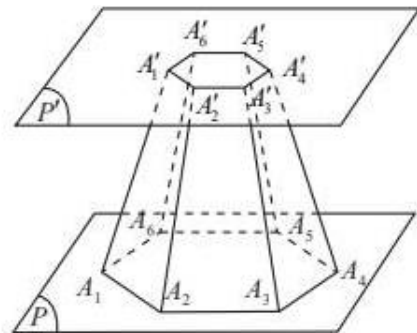
$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}.$$

Hình chóp cắt đều

Định nghĩa: Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là **hình chóp cắt đều**.

Trong hình chóp cắt đều $A_1A_2A_3...A_6.A'_1A'_2A'_3...A'_6$, ta gọi:

- Các điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_6, A'_1, A'_2, A'_3, ..., A'_6$ là các **đỉnh**.
- Đa giác $A_1A_2A_3...A_6$ là **đáy lớn**, đa giác $A'_1A'_2A'_3...A'_6$ là **đáy nhỏ**. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.



- Cạnh của hai đa giác đáy là **cạnh đáy**. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một.
- Các hình thang cân $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, ..., A_6A_1A'_1A'_6$ là các **mặt bên**.
- Cạnh bên của mặt bên gọi là **cạnh bên** của hình chóp cắt đều. Hình chóp cắt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là **đường cao**. Độ dài đường cao là **chiều cao**.

Ví dụ 8: Cho hình chóp cắt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy lớn ABCD có cạnh bằng a, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng b, chiều cao $OO' = h$ với O, O' lần lượt là tâm của hai đáy.

Tính độ dài cạnh bên CC' của hình chóp cắt đó.

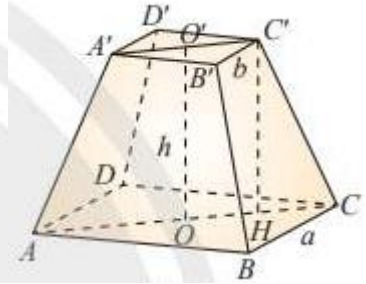
Giải

Trong hình thang vuông $OO'C'C$, vẽ đường cao $C'H$ ($H \in OC'$)

Ta có $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $O'C' = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, suy ra $HC = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $CC'H$, ta có

$$CC' = \sqrt{C'H^2 + HC^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{2}}.$$



BÀI TẬP

- Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) .
a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAC)$.
b) Gọi I là trung điểm của SC . Chứng minh rằng $(ABI) \perp (SBC)$.
- Cho tam giác đều ABC cạnh a , I là trung điểm của BC , D là điểm đối xứng với A qua I .
Vẽ đoạn thẳng SD có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với (ABC) . Chứng minh rằng:
a) $(SBC) \perp (SAD)$; b) $(SAB) \perp (SAC)$.
- Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AA' = 2a$, $AD = 2a$, $AB = BC = a$.
a) Tính độ dài đoạn thẳng AC' . b) Tính tổng diện tích các mặt của hình lăng trụ.
- Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Cho biết $AB = BD = a$, $A'C = 2a$.
a) Tính độ dài đoạn thẳng AA' . b) Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.
- Cho hình chóp cắt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ và đường nối tâm hai đáy bằng a . Tính độ dài cạnh bên và đường cao của mỗi mặt bên.
- Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21,6 m và cạnh đáy dài 34 m. Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của kim tự tháp.



Hình 29

(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Louvre_Pyramid)

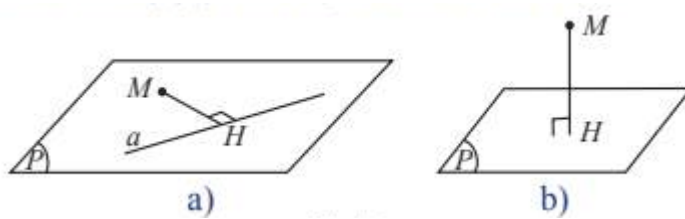
BÀI 4. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

Định nghĩa:

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dài đoạn MH được gọi là **khoảng cách từ M đến đường thẳng a** , kí hiệu $d(M, a)$.

Nếu h là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dài đoạn MH được gọi là **khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P)** , kí hiệu $d(M, (P))$.



■ **Chú ý:** ● $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc a ;

● $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc (P) .

Nhận xét:

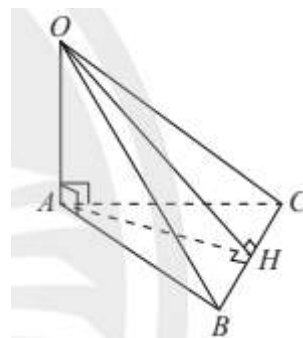
a) Lấy điểm N tùy ý trên đường thẳng a , ta luôn có $d(M, a) \leq MN$;

b) Lấy điểm N tùy ý trên mặt phẳng (P) , ta luôn có $d(M, (P)) \leq MN$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $O.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $OA \perp (ABC)$. Cho biết $OA = a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) .

b) Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC .



Giải

a) Ta có $OA \perp (ABC)$, suy ra $d(O, (ABC)) = OA = a$.

b) Vẽ $AH \perp BC$, ta có $OH \perp BC$ (Định lí ba đường vuông góc), suy ra $d(O, BC) = OH$.

Tam giác ABC đều có cạnh bằng a suy ra $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông OAH, ta có $OH = \sqrt{OA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Vậy ta có $d(O, BC) = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cho biết $SA = a$ và SA vuông góc với (ABCD).

- Tính khoảng cách từ điểm B đến (SAD);
- Tính khoảng cách từ điểm A đến cạnh SC.

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b, kí hiệu $d(a, b)$.

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P), kí hiệu $d(a, (P))$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ điểm bất kì trên (P) đến (Q), kí hiệu $d((P), (Q))$.

Ví dụ 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính theo a:

- Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và mặt phẳng (AA'CC');
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (AA'D'D) và (BB'C'C).

Giải

a) Ta có $DD' \parallel AA'$, $d(DD', (AA'CC')) = d(D, (AA'CC'))$. Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

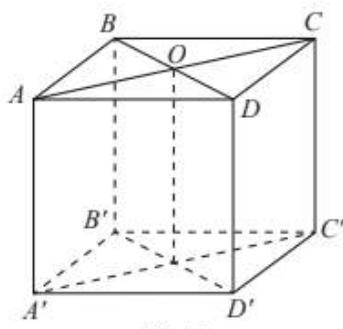
Ta có $DO \perp AC$ và $DO \perp AA'$, suy ra $DO \perp (AA'CC')$. Vậy

$$d(DD', (AA'CC')) = d(D, (AA'CC')) = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b) Ta có $(AA'D'D) \parallel (BB'C'C)$ suy ra $d((AA'D'D), (BB'C'C)) = d(A, (BB'C'C))$.

Do $AB \perp BB'$ và $AB \perp BC$, suy ra $AB \perp (BB'C'C)$.

Vậy $d((AA'D'D), (BB'C'C)) = AB = a$.



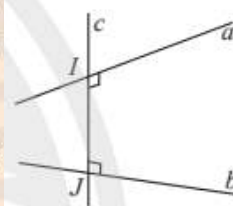
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Định nghĩa

Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là **đường vuông góc chung** của a và b .

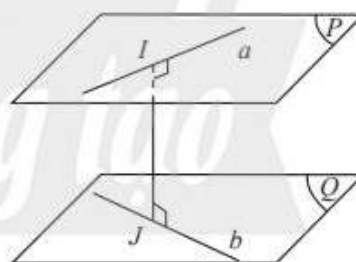
Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là **đoạn vuông góc chung** của a và b .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.



Chú ý:

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường còn lại.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a , cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

- SB và CD ;
- AB và SC ,

Giải

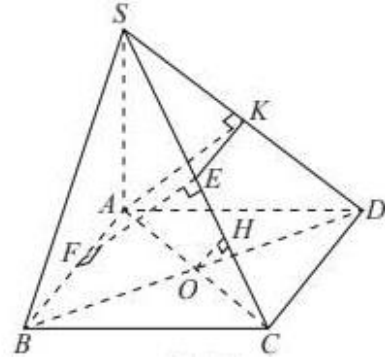
a) Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp SB$.

Mặt khác $BC \perp CD$, suy ra BC là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SB và CD . Ta có $d(SB, CD) = BC = a$.

b) **Cách 1.** Ta có $AB \perp (SAD)$ và SD là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD) . Vẽ $AK \perp SD$, $KE \parallel AB$, $EF \parallel AK$.

Ta có $AB \perp AK$, $AK \perp SD$, suy ra $AK \perp SC$. Do $EF \parallel AK$, suy ra ta cũng có $EF \perp AB$ và EF cắt AB tại F , $EF \perp SC$ và EF cắt SC tại E .

Các kết quả trên chứng tỏ EF là đoạn vuông góc chung của AB và SC .



Trong tam giác SAD vuông cân tại A ta có $AK = \frac{SD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AB, SC) = EF = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2. Ta có mặt phẳng (SCD) chứa SC và song song với AB , suy ra:

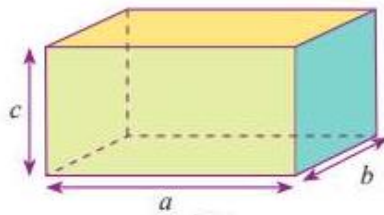
$$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

4. Công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp

■ Thể tích khối hộp chữ nhật

Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước.

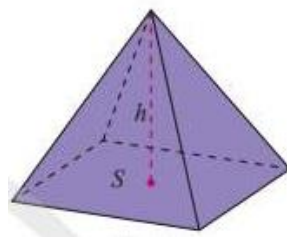
$$V = abc.$$



■ Thể tích khối chóp

Thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao.

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$



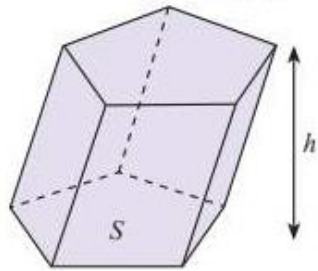
■Thể tích khối chóp cụt đều

Công thức tính: $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$, với h : chiều cao và S, S' là diện tích hai đáy.

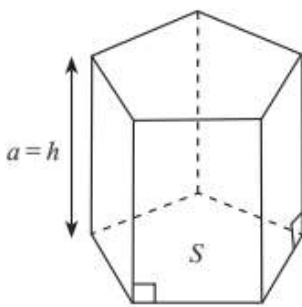
■Thể tích khối lăng trụ

Thể tích khối lăng trụ bằng diện tích đáy và chiều cao

$$V = Sh.$$



■**Chú ý:** Ta gọi khối lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy là khối lăng trụ đứng. Chiều dài cạnh bên a của khối lăng trụ đứng bằng chiều cao h và ta có công thức: $V = S.a$



Ví dụ 5: a) Tính thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước là : $6a$; $4a$; $3a$.

b) Tính thể tích khối tứ diện đều $SABC$ cạnh a .

c) Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $AA' = 2a$, hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD . Tính thể tích khối lăng trụ đó.

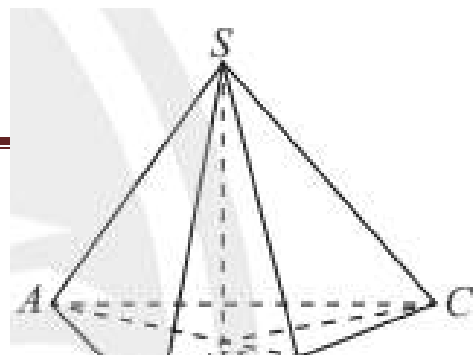
Giải

a) Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước:

$$V = 6a.4a.3a = 72a^3.$$

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) . Ta có ba tam giác vuông SHA , SHB , SHC bằng nhau, suy ra $HA = HB = HC$. Vậy H là tâm của tam giác đều ABC . Ta có

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$



$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

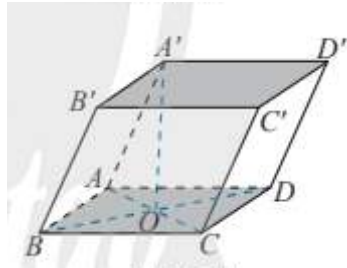
Khối tứ diện đều SABC có thể tích là

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

c) Chiều cao của khối lăng trụ:

$$h = A'O = \sqrt{A'A^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Thể tích khối lăng trụ: $V = S \cdot h = 4a^2 \cdot a\sqrt{2} = 4a^3\sqrt{2}.$



Ví dụ 6: Cắt khối chóp tam giác đều S.ABC với cạnh đáy bằng a và chiều cao 2a bởi một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm các cạnh bên. Tính thể tích khối chóp cắt đều được tạo thành.

Giải

Gọi $ABC.A'B'C'$ là khối chóp cắt đều được tạo thành, O và O' lần lượt là tâm của hai đáy

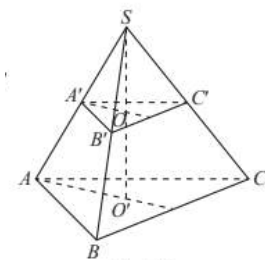
ABC và $A'B'C'$. Ta có: Chiều cao của khối chóp cắt đều là $h = OO' = \frac{SO}{2} = \frac{2a}{2} = a;$

Tam giác đều ABC có diện tích: $S = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$

Tam giác đều $A'B'C'$ có cạnh $A'B' = \frac{AB}{2}$ nên có diện tích: $S' = \frac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} = \frac{S}{4}.$

Do đó, thể tích khối chóp cắt đều được tạo thành là :

$$V = \frac{1}{3} h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} a \left(S + \frac{S}{2} + \frac{S}{4} \right) = \frac{7aS}{12} = \frac{7a}{12} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48}.$$



BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$, $SO = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) .
2. Cho hai tam giác cân ABC và ABD có đáy chung AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng.
 - a) Chứng minh rằng $AB \perp CD$.
 - b) Xác định đoạn vuông góc chung của AB và CD .
3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .
 - a) Chứng minh $AB \perp (SIJ)$.
 - b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .
4. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° .
 - a) Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.
 - b) Tính thể tích của khối lăng trụ.
5. Một cây cầu dành cho người đi bộ (Hình 22) có mặt sàn cầu cách mặt đường 3,5 m, khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là 0,8 m. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b .
6. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = 2a$ và đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$.
 - a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AA' .
 - b) Tính thể tích của khối hộp.
7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a và có O là giao điểm hai đường chéo của đáy.
 - a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .
 - b) Tính thể tích của khối chóp.
8. Tính thể tích của khối chóp cụt lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ với O và O' là tâm hai đáy, cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là a và $\frac{a}{2}$, $OO' = a$.



BÀI 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. GÓC NHỊ DIỆN

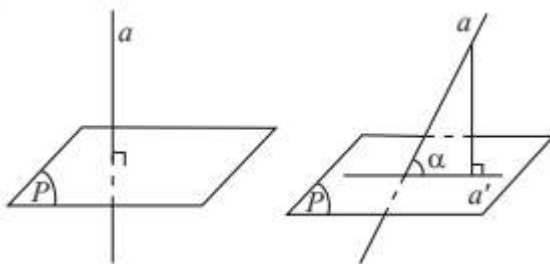
1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a với mặt phẳng (P) bằng 90° .

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của a trên mặt phẳng (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và (P) .

Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) được kí hiệu là $(a, (P))$.



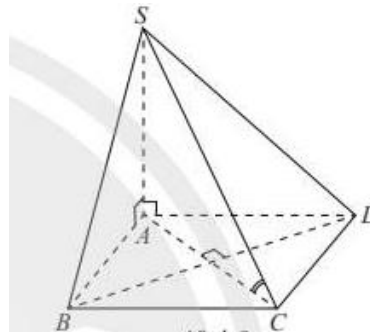
■ **Chú ý:** a) Góc α giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn thỏa mãn $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

b) Nếu đường thẳng a nằm trong (P) hoặc song song với (P) thì $(a, (P)) = 0^\circ$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Tính:

- Góc giữa đường thẳng BC và (SAB) ;
- Góc giữa đường thẳng BD và (SAD) ;
- Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$.

Giải



a) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BC \perp SA$. Ta lại có $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp (SAB)$, suy ra góc giữa đường thẳng BC và (SAB) bằng 90° .

b) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BA \perp SA$. Ta lại có $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$. Vậy AD là hình chiếu của BD trên (SAD) . Nếu gọi φ là góc giữa đường thẳng BD và (SAD) thì $\varphi = (BD, AD) = \widehat{BDA} = 45^\circ$ (vì tam giác ABD vuông cân tại A).

c) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$. Nếu gọi φ' là góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ thì $\varphi' = (SC, CA) = \widehat{SCA}$.

Trong tam giác SCA vuông tại A , ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng 60° .

Ví dụ 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các đường thẳng sau đây với mặt phẳng $(ABCD)$:

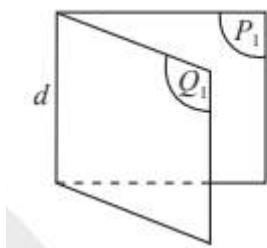
- a) AA' ; b) BC' ; c) $A'C$.

2. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

■ Góc nhị diện

Định nghĩa: Cho hai mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d . Hình tạo bởi (P_1) , (Q_1) và d được gọi là **góc nhị diện** tạo bởi (P_1) và (Q_1) , kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

Hai nửa mặt phẳng (P_1) , (Q_1) gọi là **hai mặt của nhị diện** và d gọi là **cạnh của nhị diện**.

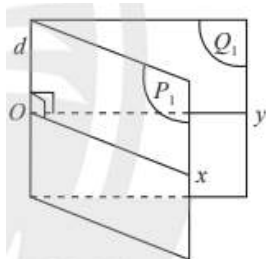


☞ **Chú ý:** a) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

b) Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$, với M , N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng (P_1) , (Q_1) .

■ Góc phẳng nhị diện

Định nghĩa: **Góc phẳng nhị diện** của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.



☞ **Chú ý**

a) Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.

BÀI TẬP

Bài 1: Cho tứ diện đều ABCD. Vẽ hình bình hành BCED.

- Tìm góc giữa đường thẳng AB và (BCD).
- Tìm góc phẳng nhị diện $[A, CD, B]; [A, CD, E]$.

Bài 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có O là tâm của đáy và có tất các cạnh bằng nhau.

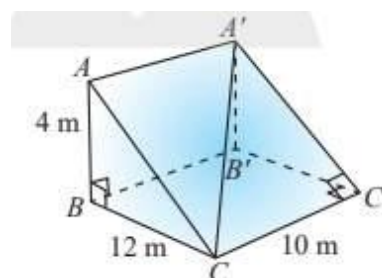
- Tìm góc giữa đường thẳng SA và (ABCD);
- Tìm góc phẳng nhị diện $[A, SO, B]; [S, AB, O]$.

Bài 3: Cho hình chóp cắt lục giác đều ABCDEF.A'B'C'D'E'F' với O và O' là tâm hai đáy, cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là a và $\frac{a}{2}$, $OO' = a$.

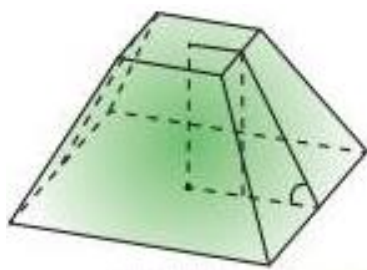
- Tìm góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
- Tìm góc phẳng nhị diện $[O, AB, A']; [O', A'B', A]$.

Bài 4: Một con dốc có dạng hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước (Hình vẽ)

- Tính số đo góc giữa đường thẳng CA' và (CC'B'B).
- Tính số đo góc nhị diện cạnh CC'.



Bài 5: Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cắt tứ giác đều có hai cạnh đáy là 14m và 10m. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135° . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm.



BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

Bài 1: Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD.

- a) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SNC)$.
- b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SNC).

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC và SD. Tính khoảng cách giữa AM và NP.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a$; $CD = a$; số đo góc nhị diện $[S, BC, A]$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 4: Một chân cột bằng gang có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a , chiều cao $h = 2a$ và bán kính đáy phân trụ rỗng bên trong bằng $\frac{a}{2}$.

- a) Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy;
- b) Tính thể tích chân cột nói trên theo a.

Bài 5: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có cạnh bên $AA' = a$, đáy ABCD là hình thoi có $AB = BD = a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với điểm O là giao điểm hai đường chéo của đáy. Tính thể tích của khối hộp.

CHƯƠNG IX. XÁC SUẤT

Mục tiêu:

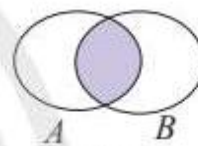
Sau khi học xong chương này, sinh viên có thể:

- Nhận biết được một số khái niệm về xác suất cổ điển: hợp và giao các biến cố; biến cố độc lập;
- Tính được xác suất của biến cố hợp bằng cách sử dụng công thức cộng;
- Tính được xác suất của biến cố giao bằng cách sử dụng công thức nhân (cho trường hợp biến cố độc lập);
- Tính được xác suất của biến cố trong một số bài toán đơn giản bằng phương pháp tổ hợp.
- Tính được xác suất của biến cố trong một số bài toán đơn giản bằng phương pháp sơ đồ hình cây.

BÀI 1. BIẾN CỐ GIAO VÀ QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

1. Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B . Biến cố “Cả A và B cùng xảy ra”, kí hiệu AB hoặc $A \cap B$ được gọi là **biến cố giao** của A và B .



■ **Chú ý:** Tập hợp mô tả biến cố AB là giao của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B . Biến cố AB xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B xảy ra.

Ví dụ 1: Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”, C là biến cố “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt một chấm”. Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố giao AC và BC .

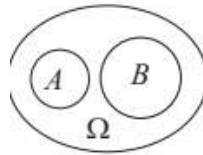
Giải

Biến cố $C = \{(1; 6); (6; 1); (1; 5); (5; 1); (1; 4); (4; 1); (1; 3); (3; 1); (1; 2); (2; 1); (1; 1)\}$.

Kết hợp tập hợp mô tả biến cố A , B , ta có biến cố $AC = \{(1; 4); (4; 1)\}$; biến cố $BC = \{(1; 6); (6; 1)\}$;

2. Hai biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** nếu A và B không đồng thời xảy ra.



■ **Chú ý:** Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.

Ví dụ 2: Một hộp có 5 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Hãy xác định các cặp biến cố xung khắc trong các biến cố sau:

A : “Hai viên bi lấy ra cùng màu xanh”;

B : “Hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ”;

C : “Hai viên bi lấy ra cùng màu”;

D : “Hai viên bi lấy ra khác màu”.

Giải

Ta có hai biến cố A và B xung khắc.

Biến cố C xảy ra khi lấy ra 2 viên bi xanh hoặc 2 viên bi đỏ hoặc 2 viên bi vàng. Khi lấy được 2 viên bi màu xanh thì biến cố A và biến cố C cùng xảy ra. Khi lấy được 2 viên bi màu đỏ thì biến cố B và biến cố C cùng xảy ra. Do đó biến cố C không xung khắc với biến cố A và biến cố B .

Biến cố D xảy ra khi lấy ra 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ; hoặc 1 viên bi xanh, 1 viên bi vàng; hoặc 1 viên bi đỏ, 1 viên bi vàng. Do đó biến cố D xung khắc với biến cố A , xung khắc với biến cố B và xung khắc với biến cố C .

Vậy có 4 cặp biến cố xung khắc là: A và B ; A và D ; B và D ; C và D .

3. Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

✎ **Nhận xét:** Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $\bar{A}$ và B ; A và $\bar{B}$, $\bar{A}$ và $\bar{B}$ độc lập.

Ví dụ 3: Trong hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng, xem màu rồi trả lại hộp. Lặp lại phép thử trên hai lần và gọi A_k là biến cố quả bóng lấy ra lần thứ k là bóng xanh ($k=1,2$).

a) A_1, A_2 có là các biến cố độc lập không? Tại sao?

b) Nếu trong mỗi phép thử trên ta không trả bóng lại hộp thì A_1, A_2 có là các biến cố độc lập không? Tại sao?

Giải

a) Nếu A_1 xảy ra thì sau khi trả lại quả bóng thứ nhất vào hộp, trong hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ và 1 quả bóng vàng, do đó xác suất xảy ra A_2 là $\frac{1}{3}$.

4. Quy tắc nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(AB) = P(A)P(B)$.

☞ **Chú ý:** Nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

Ví dụ 4: Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A)=0,6$ và $P(B)=0,8$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB, $\overline{A}B$ và $A\overline{B}$.

Giải

Do A và B là hai biến cố độc lập nên

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,48.$$

Vì $\overline{A}$ là biến cố đối của A nên $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,4$. Do $\overline{A}$ và B độc lập nên

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = 0,32.$$

Vì $\overline{B}$ là biến cố đối của B nên $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0,2$. Do A và $\overline{B}$ độc lập nên

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 0,08.$$

Ví dụ 5: Hai bệnh nhân X và Y bị nhiễm vi rút SARS-CoV-2. Biết rằng xác suất bị biến chứng nặng của bệnh nhân X là 0,1 và của bệnh nhân Y là 0,2. Khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là độc lập.

Hãy tính xác suất của các biến cố:

- a) “Cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng”;
- b) “Cả hai bệnh nhân đều không bị biến chứng nặng”;
- c) “Bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng”;

Giải

Gọi A là biến cố “Bệnh nhân X bị biến chứng nặng”. Ta có $P(A) = 0,1$ và $P(\overline{A}) = 0,9$.

Gọi B là biến cố “Bệnh nhân Y bị biến chứng nặng”. Ta có $P(B) = 0,2$ và $P(\overline{B}) = 0,8$.

a) Ta thấy A và B là hai biến cố độc lập nên xác suất cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng là

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,02.$$

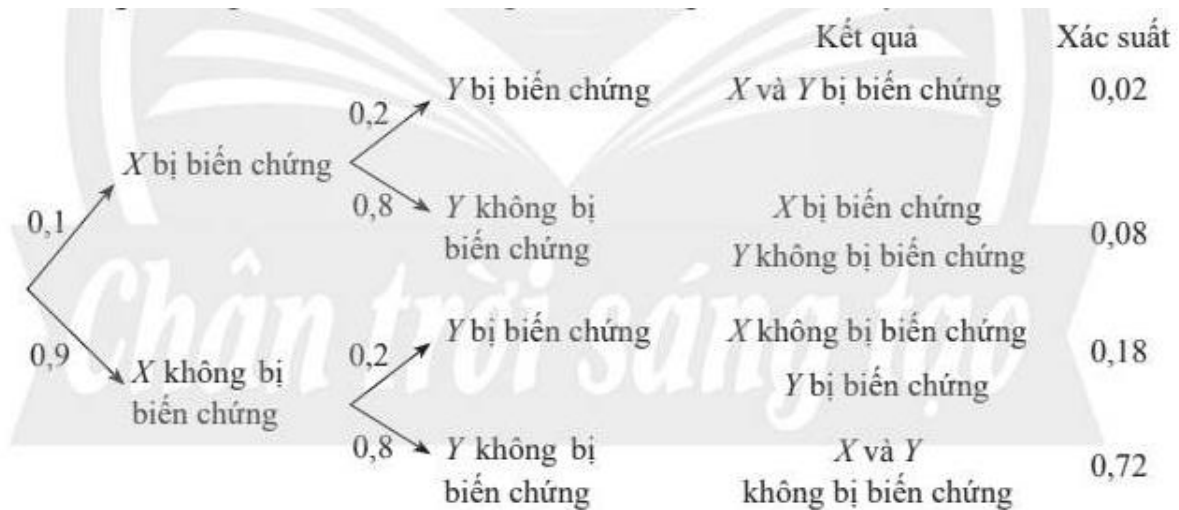
b) Do A và B độc lập nên xác suất cả hai bệnh nhân không bị biến chứng nặng là

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0,72.$$

c) Do A và $\overline{B}$ độc lập nên xác suất bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng là

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 0,08.$$

Ta cũng có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây như sau:



Theo sơ đồ trên thì:

- Xác suất cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng là 0,02;
- Xác suất cả hai bệnh nhân không bị biến chứng nặng là 0,72;
- Xác suất bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng là 0,08.

BÀI TẬP

Bài 1: Hộp thứ nhất chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 3. Hộp thứ hai chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 thẻ. Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên 2 thẻ bằng 6”, B là biến cố “Tích các số ghi trên 2 thẻ là số lẻ”.

- a) Hãy viết tập hợp mô tả biến cố AB và tính $P(AB)$.
- b) Hãy tìm một biến cố khác rỗng và xung khắc với cả hai biến cố A và B.

Bài 2: Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”.

- a) Hãy mô tả bằng lời biến cố AB.
- b) Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Bài 3: Cho A và B là hai biến cố độc lập.

- a) Biết $P(A) = 0,7$ và $P(B) = 0,2$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB, $\overline{AB}$ và $\overline{\overline{AB}}$.
- b) Biết $P(A) = 0,5$ và $P(AB) = 0,3$. Hãy tính xác suất của các biến cố B, $\overline{AB}$ và $\overline{\overline{AB}}$.

Bài 4: Một xạ thủ bắn lần lượt 2 viên đạn vào một tấm bia. Xác suất trúng đích của viên thứ nhất và thứ hai lần lượt là 0,9 và 0,6. Biết rằng kết quả các lần bắn là độc lập với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây:

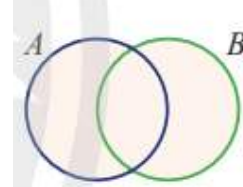
- a) “Cả hai lần bắn đều trúng đích”;
- b) “Cả hai lần bắn đều không trúng đích”;
- c) “Lần bắn thứ nhất trúng đích, lần bắn thứ hai không trúng đích”.

Bài 5: Một bệnh truyền nhiễm có xác suất truyền bệnh là 0,8 nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang; là 0,1 nếu tiếp xúc với người bệnh mà có đeo khẩu trang. Anh Lâm tiếp xúc với 1 người bệnh hai lần, trong đó có một lần đeo khẩu trang và một lần không đeo khẩu trang. Tính xác suất anh Lâm bị lây bệnh từ người bệnh mà anh tiếp xúc đó.

BÀI 2. BIẾN CỐ HỢP VÀ QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

1. Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Biến cố “A hoặc B xảy ra”, kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là **biến cố hợp** của A và B.



■ **Chú ý:** Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Tập hợp mô tả biến cố $A \cup B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B.

Ví dụ 1: Một hộp chứa 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Gọi A là biến cố “Hai viên bi lấy ra đều có màu xanh”, B là biến cố “Hai viên bi lấy ra đều có màu đỏ”.

- Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố A? Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố B?
- Hãy mô tả bằng lời biến cố $A \cup B$ và tính số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$.

Giải

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $C_5^2 = 10$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là $C_3^2 = 3$.

- $A \cup B$ là biến cố “Hai viên bi lấy ra có cùng màu”. Số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$ là $C_5^2 + C_3^2 = 13$.

Ví dụ 2: Thực hiện hai thí nghiệm. Gọi T_1 và T_2 lần lượt là các biến cố “Thí nghiệm thứ nhất thành công” và “Thí nghiệm thứ hai thành công”. Hãy biểu diễn các biến cố sau theo hai biến cố T_1 và T_2 .

- A: “Có ít nhất một trong hai thí nghiệm thành công”.
- B: “Có đúng một trong hai thí nghiệm thành công”.

Giải

- $A = T_1 \cup T_2$;
- $B = \overline{T_1}T_2 \cup T_1\overline{T_2}$.

Ví dụ 3: Một lớp học có 15 học sinh nam và 17 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 3 học sinh của lớp. Gọi A là biến cố “ Cả 3 học sinh được chọn đều là nữ”, B là biến cố “Có 2 học sinh nữ trong 3 học sinh được chọn”.

a) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố A? Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố B?

b) Hãy mô tả bằng lời biến cố $A \cup B$ và tính số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$.

2. Quy tắc cộng xác suất

☛ Quy tắc cộng cho hai biến cố xung khắc

Cho hai biến cố xung khắc A và B. Khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ví dụ 4: Một đội tình nguyện gồm 9 học sinh khối 10 và 7 học sinh khối 11. Chọn ra ngẫu nhiên 3 người trong đội. Tính xác suất của biến cố “ Cả 3 người được chọn học cùng một khối”.

Giải

Gọi A là biến cố “Cả 3 học sinh được chọn đều thuộc khối 10” và B là biến cố “Cả 3 học sinh được chọn đều thuộc khối 11”. Khi đó $A \cup B$ là biến cố “Cả 3 người được chọn học cùng một khối”. Do A và B là hai biến cố xung khắc nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$$\text{Ta thấy } P(A) = \frac{C_9^3}{C_{16}^3} \text{ và } P(B) = \frac{C_7^3}{C_{16}^3} \text{ nên } P(A \cup B) = \frac{C_9^3 + C_7^3}{C_{16}^3} = \frac{17}{80}.$$

☛ Quy tắc cộng cho hai biến cố bất kì

Cho hai biến cố A và B. Khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ví dụ 5: Một hộp chứa 100 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Tính xác suất của biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3 hoặc 5”.

Giải

Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3” và B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 5”.

$A \cup B$ là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3 hoặc 5”.

$$\text{Từ 1 đến 100 có 33 số chia hết cho 3 nên } P(A) = \frac{33}{100} = 0,33.$$

Từ 1 đến 100 có 20 số chia hết cho 5 nên $P(B) = \frac{20}{100} = 0,2$.

Một số chia hết cho cả 3 và 5 khi nó chia hết cho 15. Từ 1 đến 100 có 6 số chia hết cho 15 nên $P(AB) = \frac{6}{100} = 0,06$.

Vậy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,33 + 0,2 - 0,06 = 0,47$.

BÀI TẬP

Bài 1: Một hộp chứa 5 quả bóng xanh, 6 quả bóng đỏ và 2 quả bóng vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên từ hộp 3 quả bóng. Tính xác suất của các biến cố:

- “Cả 3 quả bóng lấy ra cùng màu”;
- “Có ít nhất 2 quả bóng xanh trong 3 quả bóng lấy ra”.

Bài 2: Trên đường đi từ Hà Nội về thăm Đền Hùng ở Phú Thọ, Bình, Minh và 5 bạn khác ngồi vào 7 chiếc ghế trên một xe ô tô 7 chỗ. Khi xe quay lại Hà Nội, mỗi bạn lại chọn ngồi ngẫu nhiên một ghế. Tính xác suất của biến cố “Có ít nhất một trong hai bạn Bình và Minh vẫn ngồi đúng ghế cũ của mình”.

Bài 3: Cho hai biến cố A và B độc lập với nhau.

- Biết $P(A) = 0,3$ và $P(AB) = 0,2$. Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.
- Biết $P(B) = 0,5$ và $P(A \cup B) = 0,7$. Tính xác suất của biến cố A.

Bài 4: Lan gieo một đồng xu không cân đối 3 lần độc lập với nhau. Biết xác suất xuất hiện mặt sấp trong mỗi lần gieo đều bằng 0,4. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của biến cố “Có đúng 1 lần gieo được mặt sấp trong 3 lần gieo”.

Bài 5: Một hộp chứa 50 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 50. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- A: “Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra là số chẵn”;
- B: “Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 4”.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

Bài 1: Cho A và B là hai biến cố thỏa mãn $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,7$ và $P(A \cup B) = 0,8$.

a) Tính xác suất của các biến cố AB, $\overline{AB}$ và $\overline{\overline{AB}}$.

b) Hai biến cố A và B có độc lập hay không?

Bài 2: Vệ tinh A lần lượt truyền một tin đến vệ tinh B cho đến khi vệ tinh B phản hồi là đã nhận được. Biết khả năng vệ tinh B phản hồi đã nhận được tin ở mỗi lần A gửi là độc lập với nhau và xác suất phản hồi mỗi lần đều là 0,4. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất vệ tinh A phải gửi tin không quá 3 lần.

Bài 3: Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 6”.

Bài 4: Một hộp có 5 quả bóng xanh, 6 quả bóng đỏ và 4 quả bóng vàng có kích thước và khối lượng như nhau. Chọn ra ngẫu nhiên từ hộp 4 quả bóng. Tính xác suất của các biến cố:

A: “Cả 4 quả bóng lấy ra có cùng màu”;

B: “Trong 4 bóng lấy ra có đủ 3 màu”.

Bài 5: Cường, Trọng và 6 bạn nữ xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Tính xác suất của biến cố “Có ít nhất một trong hai bạn Cường và Trọng đứng ở đầu hàng”.

Bài 6: Chọn ngẫu nhiên 3 trong số 24 đỉnh của một đa giác đều 24 cạnh. Tính xác suất của biến cố “3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân hoặc một tam giác vuông”.

Bài 7: Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Tính xác suất của các biến cố:

A: “Số được chọn chia hết cho 2 hoặc 7”;

B: “Số được chọn có tổng các chữ số là số chẵn”