

CHƯƠNG 3: HỆ LỰC KHÔNG GIAN

1. VÉC TƠ CHÍNH VÀ MÔMEN CHÍNH CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

1.1. Vectơ chính của hệ lực không gian

Cho hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$

1.1.1. Định nghĩa:

Véc tơ chính của hệ lực, ký hiệu $\vec{R}'$, là véc tơ tổng của các véc tơ lực của hệ lực:

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

1.1.2. Xác định véc tơ chính:

- Có thể dùng phương pháp vẽ đa giác lực. Trong trường hợp này đa giác lực là đa giác ghènh.
- Cũng có thể xác định vectơ chính qua các hình chiếu của nó trên ba trục tọa độ vuông góc theo các công thức sau:

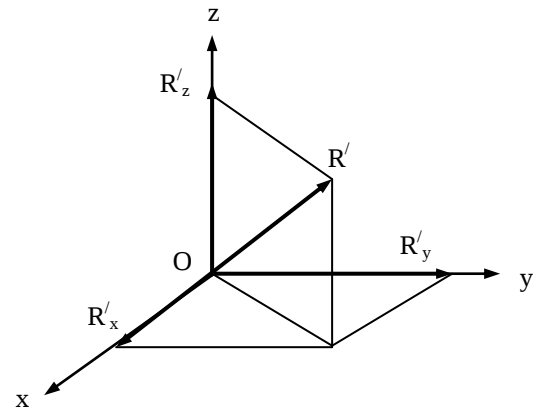
$$R'_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \dots + \vec{F}_{nx} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix}$$

$$R'_y = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \dots + \vec{F}_{ny} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy}$$

$$R'_z = \vec{F}_{1z} + \vec{F}_{2z} + \dots + \vec{F}_{nz} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz}$$

$$R' = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}; \quad \cos \alpha = \frac{R'_x}{R'}$$

$$\cos \beta = \frac{R'_y}{R'}; \quad \cos \gamma = \frac{R'_z}{R'}$$



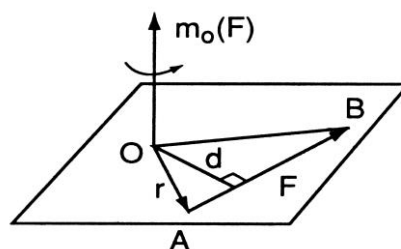
Trong đó α, β, γ là góc hợp bởi $\vec{R}'$ và các trục Ox, Oy, Oz

1.2. Mômen chính của hệ lực không gian đối với một điểm

1.2.1. Mômen của một lực đối với một điểm

Mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O , ký hiệu $\vec{m}_O(\vec{F})$ là véc tơ có:

- Phương: vuông góc với mặt phẳng qua O và chứa $\vec{F}$.
- Chiều: Nhìn từ đầu mút xuống thấy $\vec{F}$ quay ngược chiều kim đồng hồ quanh O .
- Trị số: bằng tích số của giá trị lực với cánh tay đòn của lực đối với điểm O ,
 $\vec{m}_O(\vec{F}) = Fd$
- Đơn vị: Nm



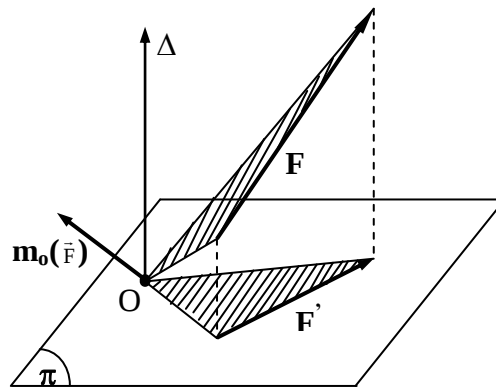
Để dàng thấy rằng vectơ mômen của lực đối với một điểm không thay đổi khi lực trượt trên đường tác dụng của nó và triệt tiêu khi lực $\vec{F}$ đi qua điểm lấy mômen ($d = 0$). Trị số của mômen bằng 2 lần diện tích tam giác ΔOAB

Từ đó suy ra: Vectơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O bằng tích có hướng của vectơ định vị điểm đặt lực $\vec{r} = \vec{OA}$ với vectơ lực $\vec{F}$:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

1.2.2. Mômen của một lực đối với một trục

Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ , ký hiệu $\vec{m}_\Delta(\vec{F})$ là mômen đại số của lực $\vec{F}$ đối với điểm O, ở đó $\vec{F}'$ là hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên mặt phẳng π vuông góc với trục Δ , còn O là giao điểm của trục Δ với mặt phẳng π : $\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}') = F'd$



Rõ ràng, khi $F = 0$ hoặc khi $\vec{F}$ song song hay cắt trục Δ (lực và trục đồng phẳng) thì $\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = 0$.

1.2.3. Định lý liên hệ giữa mômen của lực đối với một điểm và mômen của lực đối với một trục

Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ bằng hình chiếu trên trục ấy của vectơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O nằm trên trục.

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \text{hch}_\Delta[\vec{m}_O(\vec{F})]$$

Áp dụng công thức trên cho trường hợp trục Δ lần lượt là trục Ox, Oy, Oz mômen của lực $\vec{F}$ đối với ba trục là $\vec{m}_x(\vec{F})$, $\vec{m}_y(\vec{F})$, $\vec{m}_z(\vec{F})$, còn hình chiếu mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O trên ba trục là $\vec{m}_{Ox}(\vec{F})$, $\vec{m}_{Oy}(\vec{F})$, $\vec{m}_{Oz}(\vec{F})$ ta có:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) \begin{cases} \vec{m}_{Ox}(\vec{F}) = \vec{m}_x(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oy}(\vec{F}) = \vec{m}_y(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oz}(\vec{F}) = \vec{m}_z(\vec{F}) \end{cases}$$

Vậy có thể thay thế việc tính hình chiếu trên một trục của vectơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với một điểm O bằng tính mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục đó.

1.2.4. Mômen chính của hệ lực không gian đối với điểm O

Vectơ mômen chính của hệ lực không gian đối với điểm O, ký hiệu $\vec{m}^O$, là một vectơ bằng tổng hình học các vectơ mômen của các lực đối với điểm O.

$$\vec{m}^0 = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i)$$

Véc tơ mômen chính có thể được xác định bằng phương pháp đa giác véc tơ (tương tự đa giác lực, ở đó véc tơ lực được thay thế bằng các véc tơ mômen của lực), nhưng thuận tiện hơn, ta xác định các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ.

$$\vec{m}^0 = \begin{cases} \vec{m}^{0x} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{Ox}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_x(\vec{F}_i) \\ \vec{m}^{0y} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{Oy}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_y(\vec{F}_i) \\ \vec{m}^{0z} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{Oz}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_z(\vec{F}_i) \end{cases}$$

Từ đó dễ dàng xác định giá trị và phương chiều của véc tơ mômen chính

Nhận xét:

- Mômen chính của hệ lực đồng quy đối với điểm đồng quy bằng không.
- Mômen chính của hệ ngẫu đối với bất kỳ điểm nào cũng bằng véc tơ ngẫu lực

$$\text{tổng: } \vec{m}^0 = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i$$

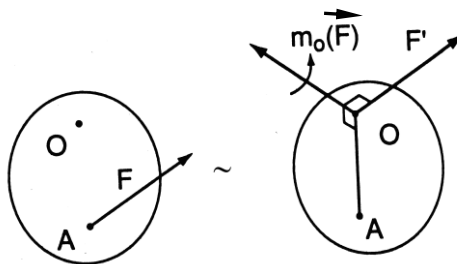
- Véc tơ chính là véc tơ tự do, còn véc tơ mômen chính thay đổi theo điểm lấy mômen: $\vec{m}^{0_1} = \vec{m}^0 + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}_O)$

2. THU GỌN HỆ LỰC KHÔNG GIAN

2.1. Định lý dời lực song song

Lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với tác dụng của nó tại O (lực $\vec{F}'$) và một ngẫu lực có véc tơ mômen bằng véc tơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O.

$$\vec{F} \sim [\vec{F}' \text{ và } \vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F})]$$



Chứng minh định lý này giống như chứng minh cho trường hợp hệ lực phẳng, khi thay thế mômen đại số bằng véc tơ mômen.

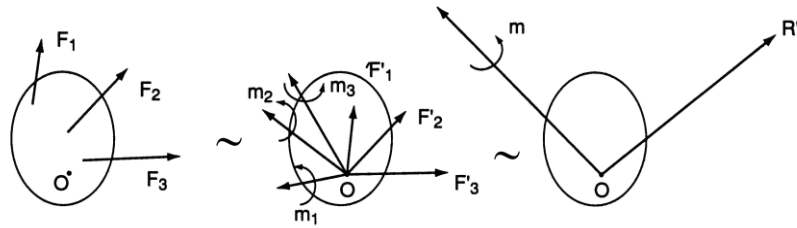
2.2. Thu gọn hệ lực không gian về tâm O

Lấy một điểm O tùy ý, gọi là tâm thu gọn. Sử dụng định lý dời lực song song để dời các lực về tâm O

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &\sim [\vec{F}'_1 \text{ và } \vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)] \\ \vec{F}_2 &\sim [\vec{F}'_2 \text{ và } \vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\vec{F}_n \sim [\vec{F}'_n \text{ và } \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}'_n)]$$

Như vậy thu gọn hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ về tâm O, ta được một hệ lực đồng quy (không gian) tại O: $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ và một hệ ngẫu lực (không gian): $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$



Hệ lực đồng quy có hợp lực qua O, kí hiệu $\vec{R}'_O$ được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực đã cho đặt tại O (vectơ chính của hệ lực đồng quy tại O và vectơ chính của hệ lực đã cho bằng nhau).

$$\vec{R}'_O \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R}'$$

Trong đó $\vec{R}'$ là vectơ chính của hệ lực đã cho.

Hệ ngẫu lực không gian $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$, tương đương với một ngẫu lực $\vec{m}$:

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}'_1) + \vec{m}_O(\vec{F}'_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}'_n)$$

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}'_i) = \vec{m}_O$$

Định lý : Hệ lực không gian tương đương với một lực và một ngẫu lực đặt tại một điểm tùy ý, chúng được gọi là lực thu gọn và ngẫu lực thu gọn . Lực thu gọn đặt tại tâm thu gọn có vectơ lực bằng vectơ chính của hệ lực, còn ngẫu lực thu gọn có vectơ mômen bằng vectơ mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

Nhận xét:

- Phương chiều và giá trị của lực thu gọn không phụ thuộc vào tâm thu gọn. Sự biến đổi của ngẫu lực thu gọn theo tâm thu gọn.
- Đối với hệ lực không gian , lực thu gọn không nằm trong mặt phẳng của ngẫu lực thu gọn như trường hợp hệ lực phẳng (tức vectơ chính và vectơ mômen chính không vuông góc với nhau như trong trường hợp hệ lực phẳng). Đây là sự khác biệt cơ bản giữa hệ lực không gian và hệ lực phẳng.

3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

3.1. Điều kiện cân bằng

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là vectơ chính và vectơ mômen chính của hệ lực đối với một điểm bất kỳ triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \\ \vec{m}_O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) = 0 \end{cases}$$

Chứng minh: Điều kiện cân được chứng minh dựa vào dạng thu gọn của hệ lực không gian. Thực vậy nếu điều kiện trên không được thoả mãn thì hệ lực đã cho thu về một trong các dạng: ngẫu lực, hợp lực hoặc một lực và một ngẫu lực. Dễ dàng chỉ ra rằng không có một dạng nào trong đó thoả mãn tiên đề 1 về cân bằng.

Điều kiện đủ là hiển nhiên vì từ vectơ chính bằng không, hệ lực thu về một ngẫu lực có mômen bằng mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn, nó bằng không thì chứng tỏ ngẫu lực thu gọn là hai lực cân bằng.

3.2. Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian

Để vectơ chính và vectơ mômen chính triệt tiêu thì các hình chiếu của chúng trên ba trục tọa độ vuông góc phải triệt tiêu:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \\ \sum_{i=1}^n \bar{m}_x(\vec{F}_i) &= 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_y(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_z(\vec{F}_i) = 0; \end{aligned} \right\}$$

Định lý: Điều kiện cân và đủ để hệ lực không gian cân bằng là tổng hình chiếu của các lực trên ba trục vuông góc và tổng mômen của các lực đối với ba trục đó đều bằng không.

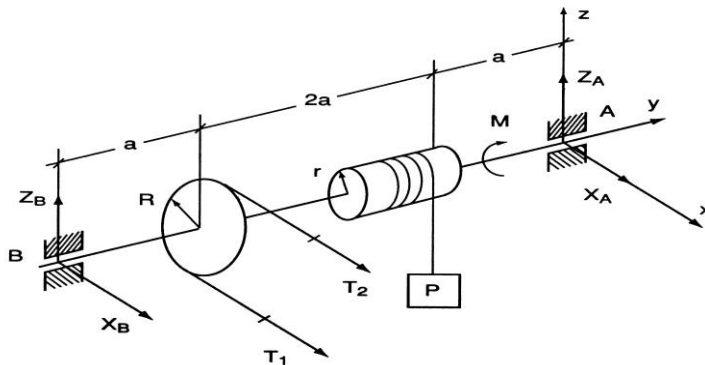
Các phương trình trên được gọi là các phương trình cân bằng của hệ lực không gian.

Từ điều kiện cân bằng ta có thể suy ra các phương trình cân bằng của các hệ lực đặc biệt: Hệ lực đồng quy không gian; hệ ngẫu lực không gian; hệ lực song song không gian. Đối với các hệ lực này số phương trình cân bằng giảm xuống còn ba phương trình.

Ví dụ:

Một trục kéo AB có đường trục nằm ngang và được đỡ trên hai ổ trục (bản lề trụ) A và B. Hai nhánh đai có puli có đường kính $D = 0,6\text{m}$ chịu các lực căng $T_1 = 5\text{kN}$, $T_2 = 2\text{kN}$. Vật được kéo có trọng lượng $P = 5\text{kN}$ và tang tời có đường kính $d = 0,3\text{m}$. Trục tời chịu tác dụng của ngẫu lực cân có mômen M .

Xác định ngẫu lực cân M cần thiết để trục cân bằng và các phản lực tại các gối trụ A và B. Bỏ qua ma sát, các kích thước cho trên hình vẽ.



Giải:

Trục kéo cân bằng dưới tác dụng của hệ lực: $(\vec{P}, \vec{M}, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B) \approx 0$

Với trục tọa độ như hình vẽ các phương trình cân bằng của hệ lực có dạng:

$$\sum \bar{F}_x = T_1 + T_2 + X_A + X_B = 0$$

$$\sum \bar{F}_z = -P + Z_A + Z_B = 0$$

$$\sum \bar{m}_x(\bar{F}) = aP - 4aZ_B = 0$$

$$\sum \bar{m}_y(\bar{F}) = T_1 \frac{D}{2} - T_2 \frac{D}{2} - P \frac{d}{2} - M = 0$$

$$\sum \bar{m}_z(\bar{F}) = 3aT_1 + 3aT_2 + 4aX_B = 0$$

Thay các giá trị bằng hệ số vào hệ phương trình trên và giải ra ta nhận được:

$$X_A = -1,75 \text{ kN}; \quad Z_A = 3,75 \text{ kN}; \quad X_B = -5,25 \text{ kN}$$

$$Z_B = 1,25 \text{ kN}; \quad M = 0,15 \text{ kN}$$

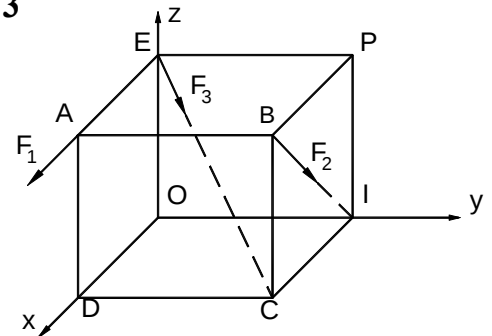
Ở đây thành phần X_A và X_B có chiều ngược so với chiều trên hình vẽ.

CÂU HỎI ÔN TẬP

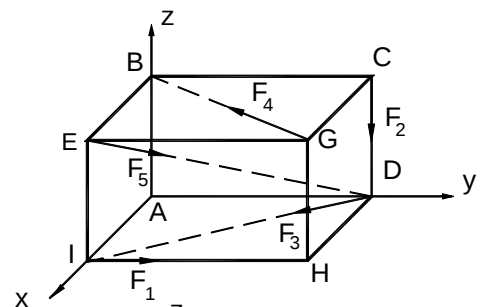
1. Định nghĩa vectơ chính của hệ lực không gian? Công thức xác định 3 hình chiếu của vectơ chính trên ba tọa độ vuông góc?
2. Định nghĩa mômen chính đối với một điểm của hệ lực không gian? Công thức xác định ba hình chiếu của vectơ mômen chính đối với một điểm của hệ lên trên ba tọa độ vuông góc?
3. Nêu các phương trình cân bằng của hệ lực không gian?

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

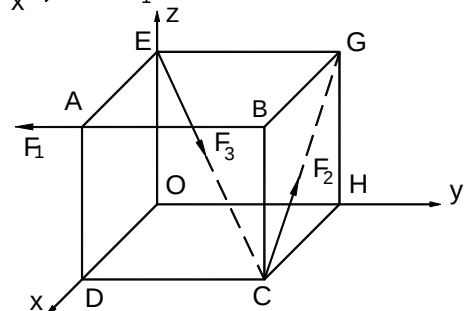
1. Xác định hình chiếu của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lên các trục của hệ trục Oxyz? Biết các lực đặt tại đỉnh của khối lập phương và có trị số là:
 $F_1 = 100\text{N}, F_2 = 200\text{N}, F_3 = 200\sqrt{3}\text{N}$



2. Hình hộp chữ nhật ABCDEGHI có $AB = 1\text{m}$; $AI = 1\text{m}$ và $AD = 2\text{m}$. Tại các đỉnh C, D, E, G, và I ta đặt các lực có trị số $F_1 = F_2 = F_4 = 10\text{KN}$; $F_3 = F_5 = 20\text{KN}$
 - a) Xác định hình chiếu các lực lên các trục tọa độ
 - b) Xác định mômen của các lực đối với các trục tọa độ



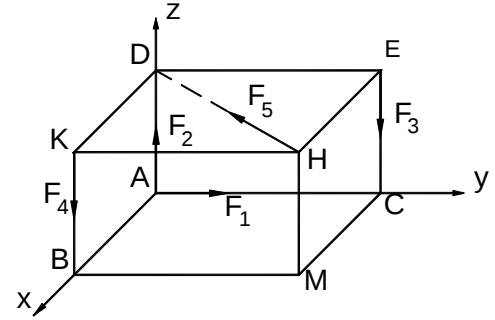
3. Xác định hình chiếu của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lên các trục của hệ trục Oxyz và moment của các lực đối với các trục tọa độ. Biết ABCDOEGH là hình lập phương có cạnh $a = 1\text{m}$, trị số của



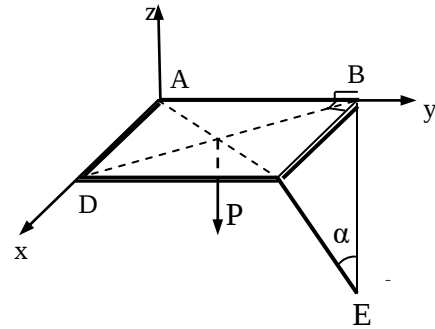
các lực $F_1 = 100\text{N}$, $F_2 = 200\sqrt{2}\text{N}$, $F_3 = 200\sqrt{3}\text{N}$

4. Ở các đỉnh A, K, E, H của hình hộp chữ nhật, đặt các lực có trị số $F_1 = F_2 = F_3 = 10\text{KN}$
 $F_4 = 10\text{KN}$, $F_5 = 30\text{KN}$

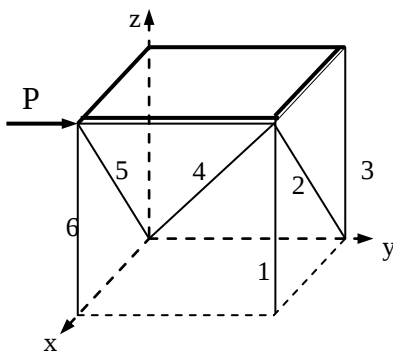
- a) Xác định hình chiếu của các lực lên hệ trục tọa độ Oxyz?
 b) Xác định mômen của các lực đối với các trục .Biết $KB = KD = 1\text{m}$, $AC = 2\text{m}$.



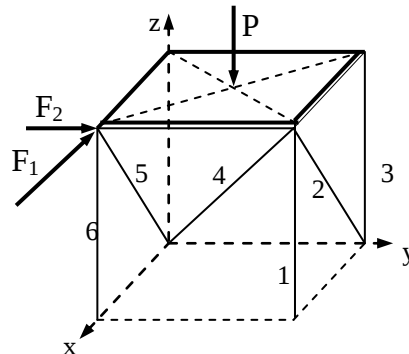
5. Tấm hình chữ nhật trọng lượng P được giữ nằm ngang nhờ liên kết cầu A , bản lề trụ B và thanh CE tạo với phương đứng góc 30° . Tìm lực liên kết tại A , B và lực nén thanh CE



6. Tấm phẳng chịu lực P và được giữ bởi 6 thanh như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng tấm và các thanh. Toàn hình có dạng khối lập phương. Tìm lực kéo nén các thanh.



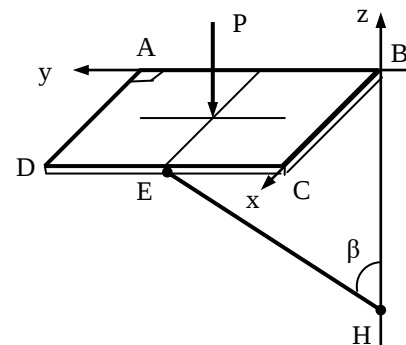
Hình câu 6



Hình câu 7

7. Tấm hình phẳng đồng chất trọng lượng $P = 2000\text{N}$, chịu tác dụng của các lực $F_1 = 500\text{N}$, $F_2 = 1000\text{N}$ ($\vec{F}_1 // O_x, \vec{F}_2 // O_y$) và được giữ bởi 6 thanh như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng các thanh, toàn hình có dạng khối lập phương. Tìm ứng lực các thanh.

8. Tấm đồng chất hình chữ nhật ABCD có trọng lượng $P = 500\text{N}$, được giữ cân bằng ở vị trí ngang. Các cạnh $AB = 2a$, đoạn $DE = EC = a$. Góc $\beta = 30^\circ$. Xác định phản lực liên kết tại bản lề trụ A, bản lề cầu B và ứng lực của thanh EH.



9. Trục truyền động AB chịu các lực tác dụng theo sơ đồ hình vẽ. Biết trị số $F_{t1} = 5000\text{N}$, $F_{r1} = 2000\text{N}$, $F_{t2} = 6000\text{N}$, $F_{r2} = 2500\text{N}$. Xác định phản lực tại hai ổ trụ A và B.

