

PHẦN II. ĐỘNG HỌC

CHƯƠNG 4: ĐỘNG HỌC ĐIỂM

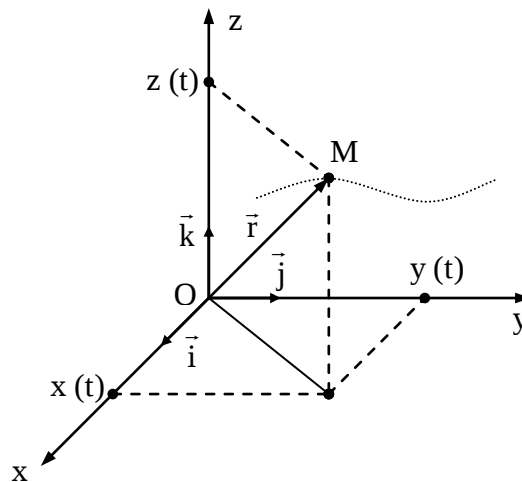
1. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

1.1. Phương trình chuyển động:

Trong hệ tọa độ Descartes, vị trí của điểm M được xác định bởi tọa độ (x, y, z) của nó. Khi M chuyển động, các thông số định vị này thay đổi theo thời gian t . Liên hệ giữa x, y, z và t gọi là phương trình chuyển động của điểm theo tọa độ Descartes

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

Khử t trong các phương trình chuyển động, ta có phương trình quỹ đạo của động điểm.



1.2. Vận tốc của điểm:

Gọi v_x, v_y, v_z là hình chiếu của $\vec{v}$ trên các trục tọa độ thì

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} \quad (*)$$

Trong đó: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vector đơn vị trên các trục tọa độ.

$$\text{Mà } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\text{Nên } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$$

$$= x'(t) \cdot \vec{i} + y'(t) \cdot \vec{j} + z'(t) \cdot \vec{k} \quad (**)$$

So sánh (*) và (**) ta rút ra: $v_x = x'(t); \quad v_y = y'(t); \quad v_z = z'(t)$

Vậy các hình chiếu của vận tốc trên các trục tọa độ Descartes bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của các tọa độ tương ứng.

Trị số, phương chiều của vận tốc được xác định như sau:

$$- \text{Trị số: } v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$- \text{Phương chiều: } \cos\alpha = \frac{v_x}{v}; \cos\beta = \frac{v_y}{v}; \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$$

Với α, β, γ : là góc tạo bởi $\vec{v}$ với các trục tọa độ x, y, z

1.3. Gia tốc của điểm:

Tương tự như vận tốc, gọi a_x, a_y, a_z là hình chiếu của $\vec{a}$ trên các trục tọa độ:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v'_x(t) = x''(t)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = v'_y(t) = y''(t)$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = v'_z(t) = z''(t)$$

$$- \text{Trị số gia tốc: } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$- \text{Phương chiều: } \cos\alpha' = \frac{a_x}{a}; \cos\beta' = \frac{a_y}{a}; \cos\gamma' = \frac{a_z}{a}$$

α', β', γ' : là góc tạo bởi $\vec{a}$ với các trục tọa độ x, y, z

* **Ví dụ:** Viên đạn bay trong không gian Oxy theo quy luật:

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad (a)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha \quad (b)$$

Trong đó v_0 là vận tốc ứng với thời điểm $t_0 = 0$, α là góc bắn.

Tìm vận tốc, gia tốc, quỹ đạo viên đạn, độ cao và tầm xa của viên đạn.

Giải

$$(a) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Thế vào (b) ta được:

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right)x^2 + x \cdot \tan\alpha$$

Vậy quỹ đạo của viên đạn là đường parabol

Vận tốc viên đạn:

$$v_x = x'(t) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = y'(t) = -gt + v_0 \sin\alpha$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}$$

Gia tốc viên đạn:

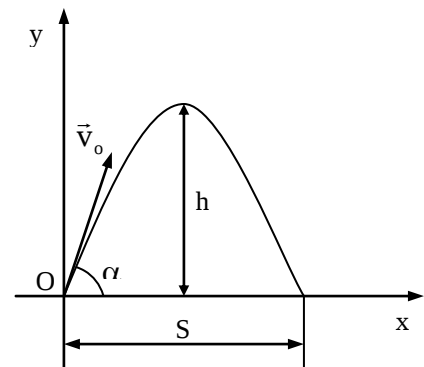
$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g$$

Khi viên đạn chạm đất thì $y(t) = 0$

$$\Leftrightarrow y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha = 0$$



$$\Rightarrow t = 0 \text{ và } t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (t \neq 0)$$

$$\text{Tầm xa của viên đạn: } s = x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Do tính đối xứng của Parabol, ta có độ cao của viên đạn đạt được tại thời điểm $\frac{t}{2}$

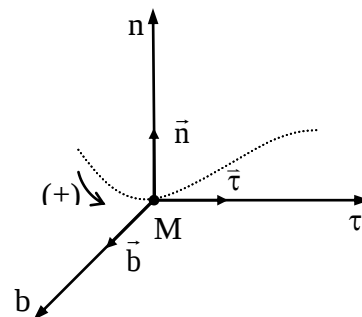
$$\Rightarrow h = y\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỰ NHIÊN

2.1. Phương trình chuyển động:

2.1.1. Hệ tọa độ tự nhiên:

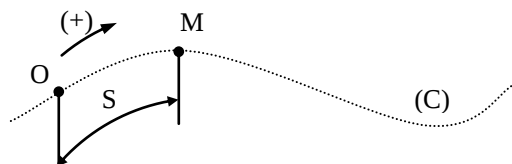
Dựng trong mặt phẳng tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm M trục Mt hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo về phía dương, có vectơ đơn vị là $\vec{\tau}$. Dựng trục Mn hướng theo pháp tuyến của quỹ đạo về phía lõm, Mn nằm trong mặt phẳng tiếp gọi là pháp tuyến chính có vectơ đơn vị là $\vec{n}$. Dựng pháp tuyến Mb gọi là trùng pháp tuyến có vectơ đơn vị là $\vec{b}$ (thường chọn chiều của $\vec{b}$ sao cho $M_{\vec{\tau}\vec{n}\vec{b}}$ là tam diện thuận)



Như vậy, tại mọi điểm của đường cong, ta luôn dựng được hệ tọa độ vuông góc có 3 trục hướng theo tiếp tuyến, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến gọi là hệ tọa độ tự nhiên. Hệ tọa độ tự nhiên thay đổi theo vị trí của điểm M trên quỹ đạo.

2.1.2. Phương trình chuyển động:

Trên quỹ đạo của động điểm, ta chọn O làm gốc. Khi đó, vị trí của động điểm được xác định bởi thông số $s = \widehat{OM}$. Khi M chuyển động, s biến thiên theo thời gian.



$s = s(t)$ gọi là phương trình chuyển động của điểm theo tọa độ tự nhiên.

* Chú ý: s là đại lượng đại số. Tuy nhiên nếu chọn chiều dương của quỹ đạo là chiều chuyển động của điểm thì s luôn dương.

2.2. Vận tốc của điểm:

Để xác định vận tốc $\vec{v}$ ta tìm hình chiếu của nó lên các trục của tọa độ tự nhiên. Vì $\vec{v}$ hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo tại M nên $\vec{v} = v_\tau \cdot \vec{\tau}$ (vì $v_n = v_b = 0$)

$$|\vec{v}| = |v_\tau| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = |s'(t)|$$

Dấu của v_τ và $s'(t)$ luôn trùng nhau (cùng dương nếu điểm chuyển động theo chiều dương quỹ đạo và cùng âm trong trường hợp ngược lại).

Vậy suy ra: $v_\tau = s'(t)$

2.3. Gia tốc của điểm:

Tương tự như vận tốc ta tìm hình chiếu của nó trên các trục tọa độ tự nhiên ta có:

$$\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n} + a_b \cdot \vec{b} \quad (*)$$

Mặt khác:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \cdot \vec{\tau}) = v'_\tau \cdot \vec{\tau} + v_\tau \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v'_\tau \cdot \vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Theo hình học vi phân thì $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$ với ρ là bán kính cong quỹ đạo tại điểm đang xét

$$\text{Vậy ta có: } \vec{a} = v'_\tau \cdot \vec{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho} \cdot \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (**)$$

So sánh (*) và (**) ta suy ra:

$$a_\tau = v'_\tau(t) = s''(t) \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad ; \quad a_b = 0$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Vì $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ luôn dương nên $\vec{a}$ luôn hướng vào bề lõm của quỹ đạo.

* Ý nghĩa của các thành phần gia tốc:

- $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ khi $\rho \rightarrow \infty$ tức là điểm chuyển động thẳng
- $a_n \neq 0$ điểm chuyển động cong.

Vậy, a_n biểu thị cho sự thay đổi về hướng của vận tốc.

- $a_\tau = v'_\tau(t) = 0$ thì $v_\tau =$ hằng số, tức là điểm chuyển động đều.
- $a_\tau \neq 0$ thì v_τ biến thiên, điểm chuyển động không đều.

Vậy, a_τ biểu thị cho sự thay đổi về trị số của vận tốc.

- + Khi a_τ và v cùng dấu : Điểm chuyển động nhanh dần.
- + Khi a_τ và v ngược dấu : Điểm chuyển động chậm dần.

* Ví dụ:

Điểm chuyển động trên vòng tròn bán kính $r = 1\text{m}$ theo phương trình $s = t^3 - 16t$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây)

- Xác định vận tốc và gia tốc tại thời điểm $t = 2s$
- Xét xem ở thời điểm đó, điểm chuyển động nhanh hay chậm dần.

Giải

$$v = s'(t) = 3t^2 - 16$$

Khi $t = 2s$ thì $v = 3 \cdot 2^2 - 16 = -4 \text{ m/s}$

$$a_\tau = v'(t) = 6t = 6 \cdot 2 = 12 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(-4)^2}{1} = 16 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ m/s}^2$$

Vì a_τ và v trái dấu nên điểm chuyển động chậm dần.

3. MỘT SỐ CHUYỂN ĐỘNG THƯỜNG GẶP:

3.1. Chuyển động đều:

Chuyển động đều là chuyển động mà vận tốc của điểm chuyển động có trị số không đổi.

$$v = \text{hằng số}$$

$$a_\tau = v'(t) = 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

3.1.1. Chuyển động thẳng đều:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \quad (\rho \rightarrow \infty) \quad ; \quad a_\tau = 0$$

Phương trình chuyển động : $s = s_0 + vt$

Trong đó: v và s_0 tương ứng là vận tốc và tọa độ cong ban đầu của động điểm.

3.1.2. Chuyển động cong đều:

$$a_\tau = 0 \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$$

Phương trình chuyển động : $s = s_0 + vt$

3.2. Chuyển động biến đổi đều:

Là chuyển động mà gia tốc tiếp tuyến của điểm có giá trị không đổi.

$$a_\tau = \text{hằng số} \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad ; \quad v = v_0 + a_\tau t$$

3.2.1. Chuyển động thẳng biến đổi đều:

$$a_n = 0 \quad ; \quad a_\tau = \text{hằng số}$$

$$v = v_0 + a_\tau t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2$$

3.2.1. Chuyển động cong biến đổi đều:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad ; \quad a_\tau = \text{hằng số} \quad ; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$v = v_0 + a_\tau t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2$$

* **Ví dụ:** Một điểm chuyển động nhanh dần đều trên cung tròn bán kính $r = 1000\text{m}$, từ trạng thái đứng yên sau 2 phút nó đi được quãng đường $S = 1200\text{m}$. Hãy tính trị số vận tốc và gia tốc sau 2 phút đó.

Giải

$$\text{Ta có : } s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2$$

$$\text{Chọn } s_0 = 0$$

$$\text{Mặt khác } v_0 = 0 \text{ (ban đầu điểm đứng yên)}$$

$$\text{Nên } s = \frac{1}{2} a_\tau t^2$$

$$\Rightarrow a_\tau = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 1200}{120^2} = \frac{1}{6} \text{ m/s}^2$$

Vận tốc sau 2 phút :

$$v = v_0 + a_\tau t = a_\tau \cdot t = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20 \text{ m/s}$$

$$\text{Gia tốc pháp tuyến : } a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{20^2}{1000} = 0,4 \text{ m/s}^2$$

Gia tốc sau 2 phút:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + (0,4)^2} = 0,43 \text{ m/s}^2$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

- Viết công thức xác định vận tốc và gia tốc của điểm theo phương pháp tọa độ Descartes.
- Điểm chuyển động có $\frac{v_x}{v_y} = \text{hằng số}$ thì quy luật chuyển động của điểm như thế nào?
- Viết biểu thức xác định vận tốc và gia tốc của điểm chuyển động cong tổng quát.
- Đối với các điểm chuyển động thẳng (hoặc cong) có thể xảy ra các trường hợp sau không?

$$\text{a) } v > 0 \text{ và } a_\tau < 0$$

$$\text{b) } v < 0 \text{ và } a_\tau > 0$$

Chuyển động ứng với mỗi trường hợp có đặc điểm gì?

- Phương trình chuyển động, vận tốc của động điểm trong chuyển động thẳng và cong biến đổi đều được xác định như thế nào? Nếu thay đổi góc quy chiếu hoặc góc thời gian thì các biểu thức đó có gì thay đổi không?

6. Khi nào điểm chuyển động không có gia tốc tiếp tuyến, không có gia tốc pháp tuyến và cả hai thành phần gia tốc đó đều không có?

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Động điểm chuyển động theo phương trình:

$$x = 2t^2$$

$$y = 1,5t^2 - 1$$

x, y tính bằng mét và t tính bằng giây. Xác định.

a) Quỹ đạo động điểm.

b) Vận tốc và gia tốc tại thời điểm $t = 2s$.

2. Viên đạn chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng theo phương trình:

$$x = 300t$$

$$y = 400t - 5t^2$$

x, y tính bằng mét và t tính bằng giây. Tìm:

a) Quỹ đạo của viên đạn

b) Vận tốc và gia tốc tại thời điểm đầu và lúc viên đạn rơi xuống đất.

c) Độ cao và tầm xa của đường đạn.

3. Điểm chuyển động theo phương trình :

$$x = b \cos \frac{\pi}{3} t$$

(với a, b là hằng số, x, y tính bằng mét; t tính bằng giây)

$$y = b \sin \frac{\pi}{3} t$$

a) Điểm chuyển động theo quỹ đạo gì?

b) Tìm vận tốc và gia tốc của động điểm

4. Chất điểm chuyển động theo phương trình

$$x = 75 \cos 4t^2$$

$$y = 75 \sin 4t^2$$

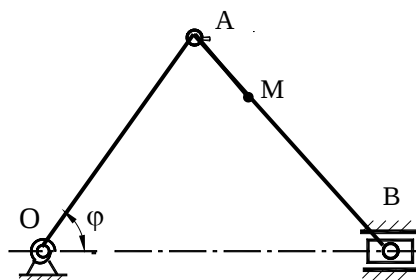
(x, y tính bằng cm và t tính bằng giây)

Tìm vận tốc và gia tốc của điểm.

5. Tìm quỹ đạo điểm M trên thanh truyền AB của cơ cấu tay quay con trượt (hình vẽ).

Biết $OA = AB = 60\text{cm}$; $MA = \frac{1}{3}AB$; $\varphi = 4\pi t$.

Xác định vận tốc và gia tốc của điểm M khi $\varphi = 0$



6. Điểm chuyển động theo phương trình $s = t^3 - 12t + 2$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây).

a) Xác định vận tốc và gia tốc của điểm tại các thời điểm $t_1 = 1s$ và $t_2 = 4s$.

b) Xác định thời điểm để vận tốc bằng không.

c) Mô tả quy luật chuyển động của điểm.

7. Điểm chuyển động trên quỹ tròn bán kính $R = 6\text{cm}$ theo phương trình

- $s = 6 + 9t^2 - 12t^3$ (s tính bằng cm, t tính bằng giây)
- Xác định vận tốc và gia tốc của điểm tại thời điểm $t = 2s$.
 - Xét xem ở thời điểm đó, điểm chuyển động nhanh dần hay chậm dần?
8. Điểm chuyển động trên cung tròn bán kính $R = 0,2m$ theo phương trình $s = 0,2\sin\pi t$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Tại thời điểm $t = 5s$, hãy xác định trị số và hướng của vận tốc, gia tốc của điểm.
9. Điểm chuyển động thẳng có phương trình $s = 2t + t^2$
- Sau khi mấy giây điểm đạt vận tốc $10m/s$?
 - Tại thời điểm đó, điểm vạch được quãng đường dài bao nhiêu?
 - Tìm gia tốc của điểm?
10. Một điểm trên vành bánh xe chuyển động theo phương trình $s = 0,1t^3$ (S tính bằng mét, t tính bằng giây). Bán kính của bánh xe bằng $2m$. Xác định gia tốc của điểm tại thời điểm vận tốc của nó bằng $30m/s$
11. Một ô tô chuyển động thẳng, trong giai đoạn khởi động, chạy nhanh dần đều với gia tốc $a = 1m/s^2$. Tính :
- Vận tốc và quãng đường chạy được sau thời gian khởi động 4 giây?
 - Vận tốc của ô tô sau khi đi được $32m$.
12. Trên đoạn đường dài $12,5km$, tàu hoả giảm tốc từ $54km/h$ xuống còn $36km/h$. Xem như trên đoạn đường đó, tàu hoả chuyển động chậm dần đều. Xác định gia tốc của tàu và thời gian tàu chạy được trên quãng đường đó.
13. Một ô tô chuyển động thẳng với vận tốc $v = 36km/h$ thì được hãm lại. Từ khi hãm ô tô chuyển động chậm dần đều và chạy được $25m$ thì dừng lại. Xác định :
- Khoảng thời gian từ khi bắt đầu hãm đến khi ô tô dừng lại?
 - Gia tốc của ô tô?
 - Vận tốc của ô tô sau khi hãm được $3s$?
14. Ô tô đang chuyển động trên đường thẳng với vận tốc v_0 km/h thì người lái nhìn thấy vật cản nên người lái đã hãm nhanh và sau $10s$ thì ô tô dừng lại. Hãy xác định vận tốc v_0 bằng bao nhiêu nếu đoạn đường hãm (tính vị trí bắt đầu hãm cho đến khi dừng hẳn) là $80m$.
15. Viên đạn được bắn ra theo hướng thẳng đứng lên trên với vận tốc đầu là $350m/s$. Hỏi viên đạn đạt được chiều cao bằng bao nhiêu và sau thời gian bao lâu nó rơi đến đất (không tính sức cản của không khí và lấy $g = 9,81m/s^2$)
16. Tàu điện xuất phát từ ga A và chuyển động trên đường thẳng tới ga B với yêu cầu vận hành của tàu như sau: Trên đoạn đường thứ nhất dài s_1 km, tàu chạy nhanh dần đều với gia tốc $0,04m/s^2$ và ở cuối đoạn có vận tốc 72 km/h; Trên đoạn đường thứ hai dài $s_2 = 36km$ tàu chạy với vận tốc không đổi 72 km/h; Trên đoạn đường thứ ba dài $s_3 = 1,5km$, tàu chạy chậm dần đều và dừng lại ở ga B. Hãy xác định thời gian tàu chạy trên quãng đường AB và chiều dài quãng đường đó.
17. Đầu tàu hoả có vận tốc đầu $15m/s$ và trong 30 giây đầu chạy được $600m$. Biết chuyển động của nó là biến đổi đều, xác định vận tốc và gia tốc của tàu hoả ở cuối giây thứ 30 nếu tàu hoả chuyển động trên cung tròn bán kính $R = 1km$.

18. Một tàu hoả chuyển động nhanh dần đều, vận tốc của nó tăng từ 18km/h đến 72km/h trong khoảng thời gian 2phút . Quãng đường nằm trên cung tròn bán kính $R = 1000\text{m}$. Xác định vận tốc và gia tốc của tàu sau 40 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động nhanh dần đều.
19. Hai điểm bắt đầu chuyển động ở cùng một thời điểm tại cùng một vị trí trên đường tròn và ngược chiều nhau . Các điểm chuyển động đều , gia tốc của hai điểm lần lượt là $8,2\text{m/s}^2$ và $73,9\text{m/s}^2$. Bán kính của đường tròn $R = 30\text{m}$. Xác định thời gian cần thiết để các điểm gặp nhau và đoạn đường mỗi điểm đã đi trong thời gian đó.
20. Đầu máy điện chuyển động chậm dần đều trên đường cong bán kính $R = 800\text{m}$ và đã đi được quãng đường 800m. Hãy xác định gia tốc ở cuối đường cong và thời gian để đầu máy chuyển động trên đường cong đó nếu vận tốc đầu và cuối tương ứng là $v_0 = 54 \text{ km/h}$ và $v = 18\text{km/h}$